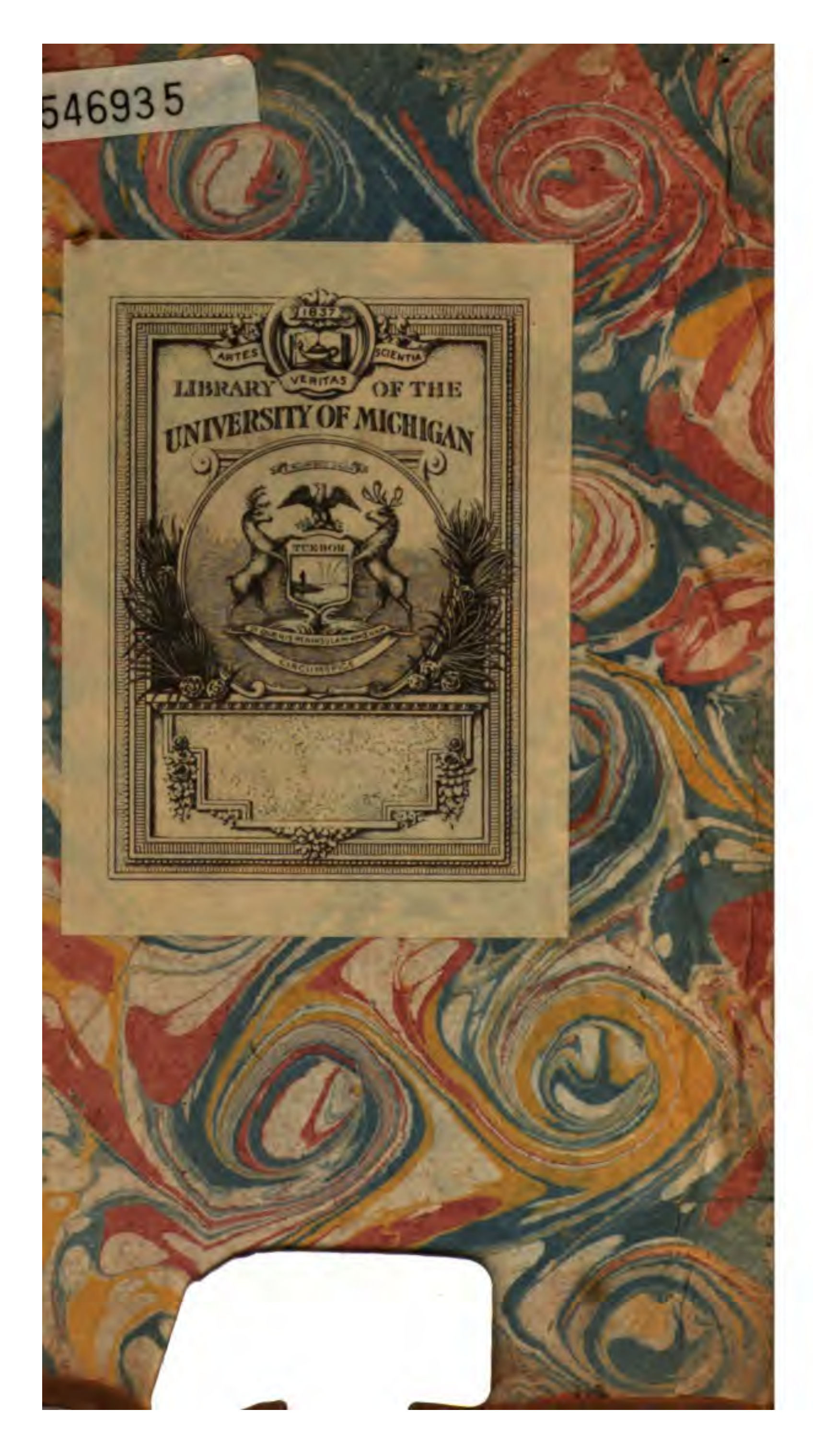

546935
1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR



COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

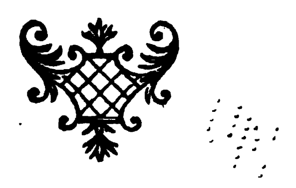
TOME V.

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES,

PAR M. L'ABBÉ SAURI,

ANCIEN PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE EN L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER.

TOME CINQUIEME.

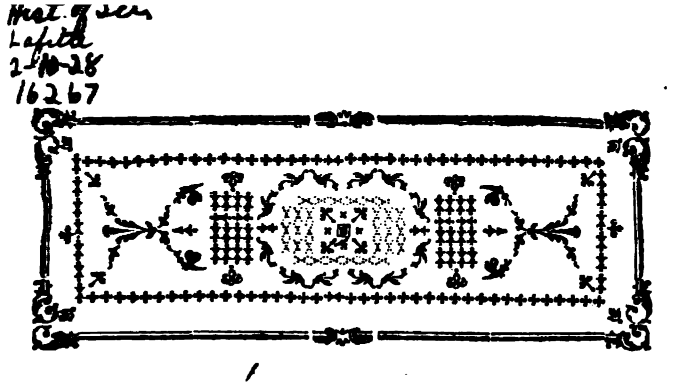


A PARIS,

Aux Dépens de RUAULT, Libraire, rue de la Harpe, près de la rue Serpente.

MDCCLXXIV.

Avec Approbation, & Privilége du Roi.



COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

Des Méthodes de M. Fontaine.

201. M. Fontaine dans ses Mémoires propose deux méthodes d'intégrer, dont nous croyons devoir donner une idée aux commençans.

La premiere méthode est fondée sur les quatre théorêmes suivans.

202. Théoreme I. V *étant une fonction homogène de plusieurs variables*, x, y, z, u, &c. *dont la dimension soit* e, *& la différence* $dV = Mdx + Ndy + Pdz + Qdu$, &c. (A),

on aura $eV = Mx + Ny + Pz + Qu + \&c.$ Si nous substituons dans V, $x + dx = x'$ au lieu de x, $y + dy = y'$ au lieu de y, &c. que nous prenions les différentielles dx, dy, &c. proportionnelles à x, y, &c. (ce qui est très-permis), & qu'alors V devienne V′, on aura $V' - V = dV$ & V′, V, seront des fonctions semblables l'une de x', y', &c. l'autre de x, y, &c. donc puisque la dimension de V est $= e$, on aura par la propriété des fonctions semblables, $V' : V :: x'^e : x^e :: y'^e : y^e :: z'^e : z^e$, &c. donc $V' - V : V :: x'^e - x^e : x^e :: y'^e - y^e : y^e :: z'^e - z^e : z^e$, &c. ou $d.V : V :: d.x^e : x^e :: d.y^e : y^e :: d.z^e : z^e$, &c. ou $d.V : V :: e\,dx : x :: e\,dy : y :: e\,dz : z$, &c. (*) donc $dV = eV\frac{dx}{x}$; de plus $dx : x :: dy : y :: dz : z$ (**); donc $dy = y\frac{dx}{x}$; $dz = z\frac{dx}{x}$; $du = u\frac{dx}{x}$; &c. donc en substituant les valeurs de dV, dy, dz, &c. dans l'équation (A) il viendra $eV\frac{dx}{x} = M\,dx + Ny\frac{dx}{x} + Pz\frac{dx}{x} + \&c.$ & $eV = Mx + Ny + Pz + \&c.$

Soit $V = axx + byz$, on aura $dV = 2ax\,dx + by\,dz + bz\,dy$; & par le théorème $eV = 2V = 2axx + byz + bzy = 2axx + 2byz$.

(*) Car la différentielle de x^e est $ex^{e-1}dx$; or $ex^{e-1}dx : x^e :: edx : x$.

(**) Car $edx : x :: edy : y$; donc en divisant les antécédents par e, $dx : x :: dy : y$.

Il est visible aussi que dans ce cas en supposant $x + dx = x'$, $y + dy = y'$, $z + dz = z'$; & faisant de plus $x : dx :: y : dy :: z : dz$, on aura $V' : V :: ax'x' + by'z' : axx + byz :: x'x' : xx$, &c. ce qui n'auroit pas lieu si V n'étoit pas une fonction homogène par rapport aux variables x, y, z: ainsi si V étoit $= ax + byz$, on n'auroit pas $ax' + by'z' : ax + byz :: x'x' : xx$; car $by'z' : byz :: y'y' : yy :: x'x' : xx$; mais ax' n'est pas à ax comme $x'x' : xx$.

On peut néanmoins rendre le théorême général au moyen d'un paramètre p, qu'on pourra regarder comme l'unité (qui est une quantité arbitraire) & qu'on traitera comme constant ou comme variable, suivant le besoin. Si, par exemple, on a $V = ax + byz$, on fera $V = apx + byz$, fonction homogène de deux dimensions. Ainsi on aura $dV = axdp + apdx + bzdy + bydz$; & par le théorême, $eV = 2V = 2apx + 2byz = 2ax + 2byz$ en mettant 1 au lieu de p.

En général si V est une fonction de dimension e par rapport aux variables x, y, z, &c. & que dans le cas où cette fonction n'est point homogène par rapport à ces variables, on introduise le paramètre p dans les termes qui n'ont pas la dimension e par rapport à ces variables x, y, z, &c. on aura $eV = Mx + Ny + Pz$, &c. $+ Tp$. Donc si on fait $dV = 0$, on aura $Mdx + Ndy + Pdz$, &c. $+ Tdp = 0$, ou $dx + \frac{N}{M}dy + \frac{P}{M}dz$, &c. $+ \frac{T}{M}dp = 0$; & en supposant $\frac{N}{M} = a'$, $\frac{P}{M} = b'$, &c. $\frac{T}{M}$

$= n'$, on aura $dx + a'dy + b'dz$, &c. $+ n'dp = 0$, les coefficients a', b', &c. étant tous de dimension nulle par rapport aux variables x, y, &c. & p. Si l'on fait p constante, on aura $dp = 0$, & l'équation deviendra $dx + a'dy + b'dz$, &c. $= 0$, les coefficients a', b', &c. restant les mêmes.

Soit proposé d'intégrer l'équation $dx + Ady + Bdz, + Cdu +$ &c. $= 0$. Supposons d'abord que les coefficients A, B, &c. soient des fonctions homogènes de dimension nulle par rapport aux variables x, y, z, &c. la question se réduit à trouver la fonction V de ces mêmes variables, dont la différence est $dV = Mdx + Ndy + Pdz + Qdu$, &c. telle que l'on ait $dx + \frac{N}{M}dy + \frac{P}{M}dz$, &c. $= dx + A\,dy + B\,dz$, &c. ou telle que l'on ait $\frac{N}{M} = A$, $\frac{P}{M} = B$, $\frac{Q}{M} = C$, &c. donc on doit avoir $dV = Mdx + Ndy + Pdz$, &c. $= Mdx + MAdy + MBdz$, &c. M étant une fonction homogène & inconnue des variables x, y, &c.

Supposons que la dimension inconnue de la fonction V soit $= e$, on aura par le théorême premier $eV = Mx + MAy + MBz +$ &c. donc $\frac{dV}{eV} = \frac{1}{e}.\frac{dV}{V} = \frac{1}{x + Ay + Bz, \&c.}dx + \frac{A}{x + Ay + Bz, \&c.}dy + \frac{B}{x + Ay + Bz, \&c.}dz +$ &c. & en intégrant de part & d'autre, il viendra $\frac{1}{e}$ L. V $=$ S. $\left(\frac{1}{x + Ay + Bz, \&c.}dx\right.$

$+ \frac{A}{x + Ay + Bz, \&c.} dy + \&c.$). Lorsqu'on aura trouvé par cette intégration la valeur de V, on la fera = A' constante arbitraire, & le problême sera résolu; car en faisant $V = A'$, on aura $dV = o = Mdx + MAdy + MBdz$, &c. & en divisant par M, on trouvera l'équation proposée $dx + Ady + Bdz$, &c. = o. Si $e = o$, *c'est-à-dire*, si la dimension de V étoit *nulle*, *on* auroit $eV = o = Mx + MAy +$ &c. = o, ou en divisant par M, $x + Ay + Bz$, &c. = o.

Si les coefficients A, B, C, &c. ne sont point des fonctions homogènes de dimension nulle par rapport aux variables x, y, z, &c. en introduisant le paramètre p, on les rendra de dimension nulle par rapport aux quantités x, y, z, &c. & p. Et supposant qu'alors l'équation proposée soit de cette forme $dx + a'dy + b'dz$, &c. $+ n'dp = o$, dans laquelle les coefficients a', b', &c. *sont* de dimension nulle par rapport aux quantités x, y, z, &c. p, la question sera réduite à trouver une fonction V des mêmes quantités, dont la différentielle $Mdx + Ndy +$ &c. divisée par M, ou $dx + \frac{N}{M}dy$, &c. soit $= dx + a'dy$, &c. $+ n'dp$. En supposant $\frac{T}{M} = n'$, & p constante, ou $dp = o$, on aura $dx + \frac{N}{M}dy$, &c. $= dx + a'dy$, &c. de plus $a' = \frac{N}{M}$, $b' = \frac{P}{M}$, &c. ainsi la différence $dV = Mdx + Ndy$, &c.

$+\frac{T}{M}dp$, sera $= Mdx + Ma'dy + Mb'dz$, &c. $+ Mn'dp$. M & n' sont des fonctions homogènes de x, & y, &c. & p. Mais M est une fonction qui peut n'être pas de dimension nulle, au lieu que n' est certainement de dimension nulle. En supposant que la dimension de V est e, on aura $eV = Mx + Ma'y +$ &c. $+ Mn'p$, $\frac{1}{e}.\frac{dV}{V} = \frac{1}{x + a'y + b'z, \&c. + n'p}dx + \frac{a'}{x + a'y + b'z, \&c. + n'p}dy +$ &c. donc en intégrant & faisant $x + a'y + b'z$, &c. $+ n'p = F$, on aura $\frac{1}{e}$ L. V $=$ S. $\left(\frac{1}{F}dx + \frac{a'}{F}dy + \frac{b'}{F}dz, \&c. + \frac{n'}{F}dp\right)$. Lorsqu'on aura trouvé par cette intégration la valeur de V, on la fera $=$ A' constante arbitraire, & le problême sera résolu. On ne peut trouver l'intégrale dont nous venons de parler, qu'en connoissant n'. Si la dimension e étoit nulle, on auroit $n' = \frac{-x - a'y, \&c.}{p}$ par l'équation $eV = Mx + Ma'y$; &c. mais cette valeur de n' rendant $F = 0$, ne peut nous servir ; il faut donc en trouver une autre. On y parviendra par le quatrieme problême suivant.

203. THÉOREME II. *Supposant que V est une fonction des variables x, y, z, &c. on aura* $\frac{d.\,S.\,V\,dx}{dy} = \mathrm{S}.\frac{dV}{dy}dx$, *c'est-à-dire, que la différence de* S. V dx *prise en ne faisant varier que* y

& divisée par dy, *est égale à l'intégrale du produit de la différence* dV *prise en ne faisant varier que* y, *divisant par* dy, *& multipliant le résultat par* dx. C'est une suite de ce qu'on a démontré ci-devant (90) que $dSAdx = dy \frac{S(dA)dx}{dy}$. Car alors $\frac{d.(SAdx)}{dy} = S.\frac{(dA)dx}{dy}$.

204. THÉOREME III. V *étant toujours une fonction des variables* x, y, z, *&c. telle que l'on ait* $dV = Mdx + Ndy + Pdz$, &c. *on aura les équations de condition* $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, $\frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}$, $\frac{dM}{du} = \frac{dQ}{dx}$, $\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}$, $\frac{dN}{du} = \frac{dQ}{dy}$, $\frac{dP}{du} = \frac{dQ}{dz}$, &c. (*) C'est une suite de ce qu'on a dit ci-dessus (89).

205. THÉOREME IV. *Dans la même supposition, en faisant* $N = AM$, $P = BM$, $Q = CM$, &c, *ce qui donne* $dV = Mdx + AMdy + BMdz$, &c., *l'on aura encore les équations de condition suivantes, pour trois termes* $A\frac{dB}{dx} - B\frac{dA}{dx}$

(*) L'expression $\frac{dN}{dx}$, indique qu'on a différencié N en faisant varier x, & qu'on a divisé par dx. L'expression $\frac{dM}{dy}$, indique la différentielle de M prise en faisant varier y, & divisée par dy, &c.

$+\frac{dA}{dz}-\frac{dB}{dy}=0$; car par le théorême précédent $\frac{dM}{dy}=A\frac{dM}{dx}+M\frac{dA}{dx}$ (à cause de $AM=N$), $\frac{dM}{dz}=B\frac{dM}{dx}+M\frac{dB}{dx}$, $A\frac{dM}{dz}+M\frac{dA}{dz}=B\frac{dM}{dy}+M\frac{dB}{dy}$. Si on égale les valeurs de $\frac{dM}{dz}$ prises des deux dernieres équations, il viendra en transposant, $M\left(A\frac{dB}{dx}+\frac{dA}{dz}-\frac{dB}{dy}\right)+B\left(A\frac{dM}{dx}-\frac{dM}{dy}\right)=0$ (P). Mais par la premiere équation, $A\frac{dM}{dx}-\frac{dM}{dy}=-M\frac{dA}{dx}$. Donc en substituant cette valeur dans l'équation (P), & divisant par M, on aura $A\frac{dB}{dx}-B\frac{dA}{dx}+\frac{dA}{dz}-\frac{dB}{dy}=0$ (*).

COROLLAIRE. Donc pour quatre termes $M\,dx+AM\,dy+AM\,dz+CM\,du$, on aura les trois équations,

$$A\frac{dB}{dx}-B\frac{dA}{dx}+\frac{dA}{dz}-\frac{dB}{dy}=0.$$

(*) On auroit pu trouver cette équation par le n°. (100); car si dans la premiere équation de condition de l'endroit cité, on fait $A=1$, A désigne dans cet endroit le coefficient de x, on aura $dA=0$; & l'on en tirera une équation de condition qui sera la même aux coefficients près, que celle que nous venons de trouver; & en changeant les lettres elle sera exactement la même.

$$A\frac{dC}{dx} - C\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{du} - \frac{dC}{dy} = 0.$$

$$B\frac{dC}{dx} - C\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{du} - \frac{dC}{dz} = 0.$$

On trouvera de même les équations de condition pour cinq termes de la différence de V, pour six, &c.

PROBLEME. *Intégrer l'équation* $dx + a'dy = 0$, *dans laquelle* a' *est une fonction de dimension nulle de* x, *de* y *&* *de* p. La question se réduit à trouver une fonction m de x, de y & de p, dont la différentielle en faisant p constante, divisée par le coefficient de dx, soit $dx + a'dy = 0$. Si l'on n'eût pas fait $dp = 0$, on auroit eu $dx + a'dy + n'dp = 0$; n' étant une fonction de dimension nulle de x de y & de p qui est inconnue; & si l'on n'eût pas divisé par le coefficient de dx que je suppose $= n$, on auroit eu $ndx + na'dy + nn'dp = 0$; n étant une fonction homogène de x, de y, & de p, qui est aussi inconnue. En supposant que la dimension de m est $= e$, on aura (par le premier théorême) $em = nx + na'y + nn'p$; donc $\frac{1}{e}.\frac{dm}{m} = \frac{1}{F}.dx + \frac{a'}{F}dy + \frac{n'}{F}dp$; (en faisant $F = x + a'y + n'p$), & en intégrant, $\frac{1}{e}l.m = S\left(\frac{1}{F}dx + \frac{a'}{F}dy + \frac{n'}{F}dp\right)$. Il ne s'agit donc plus que de trouver n'. Or par le dernier théorême, à cause de l'équation $dm = ndx + na'dy + na'dp$, on a $a'\frac{dn'}{dx} - n'\frac{da'}{dx} + \frac{da'}{dp}.\frac{dn'}{dy} = 0.$ (L)

Pour trouver par cette équation la valeur de la fonction n', remarquons qu'en faisant tout varier, on doit avoir (théorême 1er) l'équation $dm = Adx + Bdy + Cdp$. Si en supposant que les facteurs A, B, C, sont fractionnaires, on réduit tous les coefficients au même dénominateur D, on aura $\frac{1}{D}(Edx + Gdy + Hdp) = dm$; & en divisant les fonctions E, G, H, par leur plus grand diviseur P, il vient $\frac{P}{D}(gdx + idy + Kdp)$. Divisant encore g & i par leur plus grand commun diviseur Q, & faisant $g = MQ$, $i = NQ$, il viendra $\frac{P}{D}(MQdx + NQdy + Kdp) = 0$, en faisant $dm = 0$. Si on fait $dp = 0$, on aura $\frac{P}{D}(QMdx + NQdy) = 0$, ou $dx + \frac{N}{M}dy = 0$, & $a' = \frac{N}{M}$. De plus on a $\frac{K}{MQ} = n'$; car en divisant tout par QM, il vient $dx + a'dy + n'dp = 0$, ce qui donne $n' = \frac{K}{MQ}$; de sorte que M & N sont des fonctions homogènes de x, de y & de p, K & MQ étant aussi des fonctions homogènes de même dimension de x, de y & de p.

En substituant ces valeurs de a' & de n' dans l'équation (L), il vient $NQ\frac{dK}{dx} - NK\frac{dQ}{dx}$

$$-QK\frac{dN}{dx}+Q^2\left(M\frac{dN}{dp}-N\frac{dM}{dp}\right)-MQ\frac{dK}{dy}$$
$$+KM\frac{dQ}{dy}+QK\frac{dM}{dy}=o.$$

La fonction a' étant donnée, on aura N & M, en faisant N égal au numérateur, & M égal au dénominateur de la fonction a'; si de plus Q étoit donnée, on trouveroit K par la méthode des indéterminées. L'on prendroit pour K une fonction homogène de x, y & p, de même dimension que QM la plus générale qu'il seroit possible, & avec des coefficients indéterminés; on substitueroit cette valeur de K dans l'équation de condition qu'on vient de trouver entre M, N, K, Q, & l'on détermineroit les coefficients de K par des équations du premier degré, en satisfaisant à cette équation supposée identique, comme on le verra dans l'exemple que nous rapporterons bientôt: mais comme Q & K sont des fonctions inconnues, on pourra faire 1°. $Q=1$ pour avoir l'équation de condition $N\frac{dK}{dx}-K\frac{dN}{dx}+M\frac{dN}{dp}-N\frac{dM}{dp}-M\frac{dK}{dy}+K\frac{dM}{dy}=o$, (A). On pourra 2°. faire $Q=p$, & $dQ=dp=o$; & en divisant l'équation génerale de condition par p, on trouvera pour ce cas, $N\frac{dK}{dx}-K\frac{dN}{dx}+p\left(M\frac{dN}{dp}-N\frac{dM}{dp}\right)-M\frac{dK}{dy}+K\frac{dM}{dy}=o$. 3°. S'il n'entre aucun radical dans M ni dans N, on

pourra faire $Q = ap + bx + cy$. 4°. $Q = ap^2 + bpx + cpy + Dx^2 + exy + fy^2$. 5°. $Q = ap^3 + bp^2x +$ &c. 6°. $Q = ap^4 + bpx^3$ &c. Et l'on déterminera les coefficients de K comme si ceux de Q étoient donnés, on examinera ensuite quels doivent être les coefficients de Q pour qu'il n'y ait point de contradiction dans ceux de K.

Mais s'il entre des radicaux dans les fonctions N, M, après avoir essayé les hypothèses de $Q = 1$ & de $Q = p$, on fera entrer ces radicaux dans les valeurs successives de Q & de K comme autant de nouvelles variables, & de la maniere la plus générale qu'il sera possible.

Soit proposé d'intégrer l'équation $dx + \frac{ap + bx + cy}{ep + fx + gy} . dy = 0$. En supposant $Q = 1$, on aura $a' = \frac{ap + bx + cy}{ep + fx + gy}$, $N = ap + bx + cy$, $M = ep + fx + gy$, $K = Ap + Bx + Cy$, les coefficients A, B, C, étant inconnus, $\frac{dN}{dx} = b$, $\frac{dN}{dp} = a$, $\frac{dM}{dy} = g$, $\frac{dM}{dp} = e$, $\frac{dK}{dx} = B$, $\frac{dK}{dy} = C$, & en substituant dans l'équation (A) de condition, nous aurons $(aB - eC - bA + gA)p + (-be - fC + gB + af)x + (cB - ce + ag - bC)y = 0$; mais cette équation ne sauroit subsister dans toutes les suppositions des valeurs de x & y, à moins que les coefficients de y, x & p, ne soient chacun $= 0$; donc $aB - eC - bA + gA$

$=0$, $-be-fC+af+gB=0$, $cB-ce+ag-bC=0$. Regardant maintenant A, B, C, comme trois inconnues, on trouvera par le moyen de ces trois équations $A=\frac{-a(be-af)}{cf-bg}$; $B=\frac{f(ce-ag)-b(be-af)}{cf-bg}$; $C=\frac{g(ce-af)-c(be-af)}{cf-bg}$. Substituant ces valeurs dans l'équation $K=Ap+Bx+Cy$, & ensuite les valeurs de M & K dans $n'=\frac{K}{QM}=\frac{K}{M}$, à cause de $Q=1$, nous aurons $n'=[-a(be-af)+(f(ce-ag)-b(e-af))x+(g(ce-af)-c(be-af))y]:(cf-bg).(ep+fx+gy)$. (*)

Reprenons maintenant l'équation $\frac{1}{c}$ L. $m=S\left(\frac{1}{F}dx+\frac{a'}{F}dy+\frac{n'}{F}dp\right)$; si on intègre cette équation en regardant 1°. x seule comme variable; 2°. y seule comme variable; 3°. p seule comme variable, & en ajoutant à l'intégrale dans le premier cas une fonction de y & de p (parce que dans ce cas, on regarde y & p comme constantes) que nous désignerons par $f(y \,\&\, p)$; dans le second cas, une fonction arbitraire de x & de p, que nous désignerons par $f(x \,\&\, p)$, dans le troisieme cas une fonction arbitraire de x & de y que nous représenterons par $f(x \,\&\, y)$, nous aurons

(*) Les deux points indiquent une division.

$$\frac{1}{e} \text{L.}\, m = \text{S}\left(\frac{1}{\text{F}} dx\right) + f(y \,\&\, p)$$

$$\frac{1}{e} \text{L.}\, m = \text{S}\left(\frac{a'}{\text{F}} dy\right) + f(x \,\&\, p)$$

$$\frac{1}{e} \text{L.}\, m = \text{S}\left(\frac{n'}{\text{F}} dp\right) + f(x \,\&\, y)$$

Ces intégrales doivent être égales entr'elles, & chacune étant différenciée, doit rendre la proposée.

Lorsqu'il entrera des radicaux dans a', au lieu de l'équation $dx + a'dy = 0$, on écrira $dx + ady + n'dp = 0$, prenant la valeur de n' dans la supposition que la dimension e de V est $= 0$. On égalera le radical qu'on veut faire disparoître à une fonction rationnelle & homogène de p, x, y, & d'une nouvelle variable z, & choisissant cette fonction telle qu'on puisse avoir p ou x ou y, par une équation du premier degré. Supposons que ce soit p que l'on ait ainsi: en différenciant & faisant varier x, y & z, on aura dp; substituant les valeurs de dp & de p, au lieu de l'équation entre x, y, p, dx, dy, dp, on aura une équation entre x, y, z, dx, dy, dz dans laquelle il y aura un radical de moins. Lorsqu'on aura intégré cette équation (qu'on pourra intégrer si l'on veut en supposant dx, ou dy, ou $dz = 0$, par une méthode dont on parlera dans la suite), on chassera z, & l'on aura la vraie intégrale en p, x & y. Ceux qui voudront en savoir davantage sur cette méthode, peuvent consulter l'ouvrage de M. Fontaine. Passons à sa seconde méthode.

206. TOUTE équation différentielle ou intégrale qui ne contient ni fonctions transcendantes, ni

dénominateurs, ni radicaux, est dite rationnelle, algébrique & entiere.

On peut délivrer toute équation de ses dénominateurs, en multipliant l'équation par un multiplicateur divisible par tous les dénominateurs, ce qui est évident : or il est facile dans tous les cas de trouver un tel multiplicateur, qui tout au plus sera égal au produit de tous les dénominateurs.

Si l'équation proposée renferme des puissances dont les exposans soient négatifs, en faisant passer ces puissances dans les dénominateurs, on les rendra positives, & ensuite on pourra débarrasser l'équation de dénominateurs.

Si une équation contient des radicaux, on pourra l'en débarrasser dans quelques cas sans augmenter le nombre des variables; ainsi si l'on avoit l'équation $ay\sqrt{x}.\, dx - bxdy = 0$, en faisant $\sqrt{x} = z$, on auroit $x = zz$, $dx = 2zdz$, $dx\sqrt{x} = 2z^2dz$; & l'équation deviendroit $2ayzzdz - bzzdy = 0$. Mais on pourra l'en débarrasser dans tous les cas en égalant chaque radical à une nouvelle variable. Si l'équation contient des fonctions transcendantes, ou des intégrales sous le signe d'intégration, on pourra toujours l'en délivrer en égalant ces fonctions à de nouvelles variables. On pourra aussi quelquefois faire disparoître les fonctions intégrales, en différentiant l'équation. Si l'équation proposée étoit $adx\,S.ydx - bx^2dy = 0$, on auroit $S.ydx = \frac{bx^2dy}{adx}$; donc en différentiant, & faisant dx

conſtante, on aura $y\,dx = \frac{2bx\,dx\,dy + bxx\,ddy}{a\,dx}$;

& $ay\,dx^2 - 2bx\,dx\,dy - bx^2\,ddy = 0$.

Il n'y a point d'équations finies algébriques, entieres, rationnelles & homogènes, qu'on ne puiſſe exprimer par quelqu'une des ſuites ſuivantes.

1ere ſuite.
$$\begin{cases} Ap + Bx = 0. \\ Ap^2 + Bpx + Cx^2 = 0. \\ Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + Dx^3 = 0. \\ Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 \\ \quad + Ex^4 = 0. \\ \quad \text{\&c. à l'infini.} \end{cases}$$

2e ſuite.
$$\begin{cases} Ap + Bx + Cy = 0. \\ Ap^2 + Bpx + Cpy + Dx^2 \\ \quad + Exy + Fy^2 = 0.\ (V) \\ Ap^3 + Bp^2x + Cp^2y + Dpx^2 \\ \quad + Epxy + Fpy^2 + Gx^3 \\ \quad + Hx^2y + Ixy^2 + Ky^3 = 0. \\ Ap^4 + Bp^3x + Cp^3y + \text{\&c.} = 0. \\ \quad \text{\&c. à l'infini.} \end{cases}$$

3e ſuite.
$$\begin{cases} Ap + Bx + Cy + Dz = 0. \\ Ap^2 + Bpx + Cpy + Dpz \\ \quad + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hxz \\ \quad Iyz + Kz^2 = 0. \\ Ap^3 + Bp^2x + \text{\&c.} = 0. \\ \quad \text{\&c. à l'infini.} \end{cases}$$

4e ſuite.
$$\begin{cases} Ap + Bx + Cy + Dz + Eu = 0. \\ Ap^2 + Bpx + \text{\&c.} = 0. \\ \quad \text{\&c. à l'infini.} \end{cases}$$

5e ſuite. . . . .

&c. à l'infini.

6e ſuite.

6ᵉ suite. . . . .

&c. à l'infini.

&c. . . . &c. . . . &c. . . .

En continuant de même on trouvera toutes les suites qui sont des fonctions rationnelles, entieres & homogènes d'un nombre quelconque de variables, lesquelles renfermeront toutes les équations rationnelles, entieres, homogènes & finies. Les coefficients A, B, C, &c. désignent des constantes ou o, & p est l'unité arbitraire qui sert à conserver l'homogénéïté dans les termes de chaque suite.

207. POUR intégrer une équation différentielle, entiere, rationnelle & algébrique, on pourra la comparer avec les différentielles des suites ci-dessus. Ainsi pour intégrer l'équation $dx + 2dy - 2xdx - 3ydy = 0$, je la compare avec la différentielle de la suite (V) qui est $Bpdx + Cpdy + 2Dxdx + Eydx + Exdy + 2Fydy = 0$. La comparaison me donne $Bp = 1$, $Cp = 2$, $2D = -2$, $E = 0$, $2F = -3$; donc l'intégrale sera $Ap^2 + x + 2y - x^2 - \frac{3}{2}y^2 = 0$, qui est complette, parce que A est une constante arbitraire. Si on proposoit d'intégrer l'équation différentielle du second ordre $dx^2 + 2dy^2 + 2yddy = 0$, dans laquelle dx est supposé constant (lorsqu'il s'agira d'intégrer par cette méthode une équation, on fera toujours dx constant); je la compare avec la seconde différentielle de la suite (V) qui est $Cpddy + 2Ddx^2 + 2Edydx + Exddy + 2Fdy^2 + 2Fyddy = 0$, dans laquelle, comme il est aisé de le comprendre,

on a supposé dx constant. La comparaison donne $C = 0$, $2D = 1$, $E = 0$, $2F = 2$, & l'intégrale finie, sera $Ap^2 + Bpx + \frac{x^2}{2} + yy = 0$, dans laquelle A & B sont deux constantes arbitraires. On ne doit pas s'étonner si l'on trouve Bpx dans l'intégrale, parce que la supposition de dx constant avoit fait disparoître le terme qui auroit contenu B, & qui auroit été $Bpddx$, lequel s'est évanoui à cause de $ddx = 0$.

Nous supposerons que dans la seconde suite d'équations ci-dessus, les coefficients constants A, B, C, &c. désignent des fonctions d'un nombre arbitraire n, s'il s'agit d'une équation aux premieres différences; de deux nombres arbitraires n, m, s'il s'agit d'une équation aux secondes différences; de trois nombres arbitraires n, m, m'; s'il s'agit d'une équation aux troisiemes différences, &c.

Cela posé, prenez une de ces équations, celle du premier degré ou celle du second, ou celle du troisieme, &c. substitués au lieu des coefficients indéterminés A, B, C, &c. des fonctions de n à votre choix, vous aurez une équation qui sera l'intégrale d'une équation aux premieres différences. Pour avoir cette équation dont vous avez l'intégrale; différenciez cette intégrale, vous aurez deux équations, éliminés n, & l'équation qui restera entre x, y, p, dx, dy, sera celle dont vous avez l'intégrale.

Prenons pour exemple l'équation $Ap + Bx + Cy = 0$, & faisons $A = 1 - n$, $B = 2$, $C = \frac{2 - 5n}{n}$, il viendra l'équation $(1 - n)p$

$+ 2x + \frac{2-5n}{n} y = 0$, qui sera l'intégrale d'une équation aux premieres différences. Afin de connoître cette équation différentielle, différencions cette intégrale pour avoir $2ndx + (2 - 5n)dy = 0$; prenant la valeur de n dans cette équation, & la substituant dans l'équation précédente, on aura après les opérations ordinaires, $3pdy^2 + 10xdy^2 - 10ydxdy - 2pdxdy - 4xdxdy + 4ydx^2 = 0$, équation dont l'intégrale est $(1 - n)p + 2x + \frac{2-5n}{n} y = 0$. Supposons maintenant qu'à la place des coefficients A, B, C, &c. on substitue des fonctions arbitraires de n & de m dans l'équation (V), qu'on fasse par exemple $A = 3$, $B = 2n$, $C = n - m$, $D = 0$, $E = 3 - 2m$, $F = -nm$, pour avoir l'équation $3p^2 + 2npx + (n - m)py + (3 - 2m)xy - nmy^2 = 0$, qui sera l'intégrale d'une équation aux secondes différences. Pour avoir cette équation aux secondes différences, je différencie cette intégrale deux fois; la premiere différenciation donne $2npdx + (n - m)pdy + (3 - 2m)xdy + (3 - 2m)ydx - 2nmydy = 0$; & la seconde donne $(n - m)pddy + (3 - 2m)xddy + 2(3 - 2m)dxdy - 2nmyddy - 2nmdy^2 = 0$. (*) Chassez les nombres n & m de ces trois équations, & l'équation qui résultera entre x, y, p, dx, dy, ddy, sera celle dont il s'agit.

(*) On suppose dx constant.

Si au lieu de A, B, C, &c. on ſubſtitue dans la même équation (V) des fonctions de n, de m & de m'; on aura une équation qui ſera l'intégrale d'une équation aux troiſiemes différences. Pour avoir cette équation aux troiſiemes différences, on différenciera cette intégrale trois fois, & l'on aura quatre équations, deſquelles chaſſant n, m, m', l'équation reſtante entre x, y, p, dx, dy, ddy, d^3y, ſera l'équation aux troiſiemes différences dont vous avez l'intégrale.

Pour avoir l'intégrale d'une équation différencielle donnée, les valeurs des coefficients A, B, &c. (dans la formule qu'on choiſira) en n ſi c'eſt une équation aux premieres différences, en n & m ſi c'eſt une équation aux ſecondes différences, &c. doivent être telles que l'on arrive de cette intégrale à la différentielle propoſée.

De même que pour chaque intégrale il n'y a qu'une ſeule équation aux premieres, aux ſecondes, aux troiſiemes, &c. différences dont elle ſoit l'intégrale; pour chaque équation aux premieres différences, il n'y a qu'une ſeule équation en x, y, p & n, qui en ſoit l'intégrale; pour chaque équation aux ſecondes différences, il n'y a qu'une ſeule équation entre x, y, p, n & m, qui en ſoit l'intégrale; pour chaque équation aux troiſiemes différences, il n'y a qu'une équation entre x, y, p, n, m & m', qui en ſoit l'intégrale, &c. cette intégrale peut ſe préſenter ſous une infinité de formes différentes; mais ce ſera toujours eſſentiellement la même équation.

Si l'on a l'intégrale d'une équation aux premieres différences; & que l'on détermine n en faiſant par exemple $n = 0$, ou $n = 5$; &c.

l'équation qui en résultera ne sera pas l'intégrale de l'équation proposée aux premieres différences, mais elle sera un des cas de cette intégrale; il en est de même des équations aux secondes différences, aux troisiemes, &c. à chaque fois qu'on détermine un des nombres n, m, &c. l'équation résultante n'est plus qu'un des cas de l'intégrale : si par, exemple, on fait $n = 1$ dans l'intégrale $(1 - n)p + 2x + \frac{2 - 5n}{n} y = 0$ de l'équation $3pdy^2 + 10xdy^2 - 10ydxdy - 2pdxdy - 4xdxdy + 4ydx^2 = 0 \ldots$ (H); l'équation $2x - 3y = 0$, que vous aurez par cette supposition, ne sera pas l'intégrale de cette équation aux premieres différences, c'est-à-dire, que l'équation différentielle $2dx - 3dy = 0$, ne sera pas la même que l'équation (H); mais l'équation $2x - 3y = 0$ sera un des cas de l'intégrale complette de l'équation (H); c'est-à-dire, si l'on prend la valeur $x = \frac{3}{2}y$ que donne l'équation $2x - 3y = 0$, pour avoir $dx = \frac{3}{2}dy$, & qu'on substitue les valeurs de x & de dx dans l'équation (H), celle-ci sera identique : en effet elle deviendra $3pdy^2 + 15ydy^2 - 15ydy^2 - 3pdy^2 - 9ydy^2 + 9ydy^2 = 0$.

208. Pour chaque équation aux secondes différences, on peut avoir deux intégrales aux premieres différences; car après avoir différencié une fois seulement l'intégrale d'une équation aux secondes différences, on pourra chasser le nombre n, ou le nombre m, & par conséquent avoir une équation aux premieres différences dans laquelle il ne restera que m, &c. une autre équation dans laquelle il ne restera que n; & chacune de ces

équations sera également l'intégrale de l'équation aux secondes différences que l'on auroit en différenciant l'intégrale deux fois, & en éliminant n & m. Par la même raison, pour chaque équation aux troisiemes différences, on aura trois intégrales aux secondes différences, celle dans laquelle il ne restera que le nombre n, celle dans laquelle il ne restera que le nombre m, & celle qui ne contiendra que le nombre m', &c.

Ordonnons l'équation $(1-n)p+2x+\frac{2-5n}{n}y=0$ ..... (T) par rapport à n, pour avoir $nn-n.\frac{p+2x-5y}{p}=\frac{2y}{p}$, & $n=\frac{p+2x-5y}{2p}\pm\frac{\sqrt{(p+2x-5y)^2+8py}}{2p}$, fonction de dimension nulle de p, de x & de y (*). En différenciant l'équation (T), nous aurons $2dx+\frac{2-5n}{n}dy=0$, ou $dx+a'dy=0$, en faisant $a'=\frac{2-5n}{2n}$. Si on n'eût pas fait $dp=0$, on auroit eu l'équation $dx+a'dy+\left(\frac{-x-a'y}{p}\right)dp=0$, comme on peut le conclure de ce qu'on

(*) Il est facile de substituer à la place des coefficients A, B, &c. d'une formule proposée, des fonctions de n telles que l'on ait ensuite n égale à une dimension nulle de x, y, p.

a dit ci-devant (202). Si on n'eût pas divisé par le coefficient de dx, que nous ferons $= h$, & qu'on n'eût pas fait la fonction $V = 0$, on auroit eu $hdx + hn'dp = dV$, n', h, étant des fonctions de dimension nulle de p, x & y. On peut toujours supposer V de dimension nulle, puisque l'on peut la multiplier ou la diviser par p, jusqu'à ce qu'elle devienne telle. On aura donc par le premier théorême ci-dessus $hx + a'hy + hn'p = 0$; & par conséquent $x + a'y + n'p = 0$, & $n' = \frac{-x - a'y}{p}$.

209. SOIT maintenant l'équation $dx + \frac{N}{M}dy = 0$, M & N étant des fonctions de même dimension de p, de x & de y, qui n'ont aucun facteur commun, & dont tous les termes sont homogènes & composés de puissances positives. Si les fonctions M & N ne contiennent aucun radical, c'est-à-dire, si l'équation est contenue dans quelqu'une des formules suivantes.

$$dx + \frac{b1.p + b2.x + b3.y}{b'1.p + b'2.x + b'3.y}\, dy = 0. \ (*)$$

$$dx + \left\{ \frac{b1.p^2 + b2.px + b3.py + b4.x^2 + b5.xy + b6.y^2}{b'1.p^2 + b'2.px + b'3.py + b'4.x^2 + b'5.xy + b'6.y^2} \right\} dy = 0.$$

(*) Les expressions $b1$, $b2$, $b3$, &c. indiquent les coefficients de p, de x, de y; de sorte que $b2$ n'est pas la même chose que b^2. Il en est de même des expressions $b'1$, $b'2$, &c. Il est aisé maintenant de comprendre la signification de $a1$, $a2$, $a3$, &c. $a'1$, $a'2$, $a'3$, &c.

$$dx + \left\{ \frac{b1.p^3 + b2.p^2x + b3.p^2y + b4.px^2}{b'1.p^3 + b'2.p^2x + b'3.p^2y + b'4.px^2} \frac{+ b5.pxy + b6.py^2 + b7.x^3}{+ b'5.pxy + b'6.py^2 + b'7.x^3} \frac{+ b8.x^2y + b9.xy^2 + b10.y^3}{+ b'8.x^2y + b'9.xy^2 + b'10y^3} \right\} dy = 0.$$

&c. . . . . . . &c. . . . . . .

Et l'intégrale sera

$$n = \frac{a1.p + a2.x + a3.y}{a'1.p + a'2.x + a'3.y}, \text{ ou}$$

$$n = \left\{ \frac{a1.p^2 + a2.px + a3.py + a4.x^2}{a'1.p^2 + a'2.px + a'3.py + a'4.x^2} \frac{+ a5.xy + a6.y^2}{+ a'5.xy + a'6.y^2} \right\}, \text{ ou}$$

$$n = \frac{a1.p^3 + a2.p^2x + \&c.}{a'1.p^3 + a'2.p^2x + \&c.}, \text{ ou}$$

$$n = \frac{a1.p^4 + \&c.}{a'1.p^4 + \&c.}, \text{ ou}$$

$$n = \frac{a1.p^5 + \&c.}{a'1.p^5 + \&c.}$$

&c. . . . . . . &c. . . . . . .

Ceux qui voudront en savoir davantage sur cette méthode, pourront consulter l'Ouvrage du célèbre M. Fontaine.

Des marques auxquelles on peut reconnoître si une fonction différentielle est intégrable dans l'état où elle est.

210. QUOIQUE nous ayons déja dit beaucoup de choses sur cette matiere, nous croyons devoir la traiter d'une maniere plus générale ; mais afin que les commençants ne trouvent aucun embarras dans des questions d'ailleurs assez difficiles, nous allons expliquer la signification de certaines expressions. L'expression $\frac{dA}{dy}$ indiquera la différentielle de A prise en faisant varier y & divisée par dy, l'expression $\frac{dA}{dy}dy$ représente par conséquent la différentielle de A prise en faisant varier y; l'expression $\frac{dA}{dx}$ indique la différentielle de A prise en faisant varier x & divisée par dx; l'expression $\frac{ddA}{dxdy}$ indique la différentielle de $\frac{dA}{dy}$ prise en faisant varier x, & divisée par dx; ou la différentielle de $\frac{dA}{dx}$ prise en faisant varier y & divisée par dy; car cela revient au même (*). L'expression $\frac{ddA}{dx^2}$ indique la dif-

(*) On sait que si l'équation différentielle $Adx + Bdy = 0$, est intégrable, on a $\frac{dB}{dx} = \frac{dA}{dy}$ (88); donc si on fait $A = \frac{dV}{dx}$, $B = \frac{dV}{dy}$, on aura $\frac{ddV}{dydx} = \frac{ddV}{dxdy}$.

férentielle de $\frac{dA}{dx}$ prise en faisant varier x & divisée par dx. Mais on ne doit pas conclure que $\frac{ddA}{ddydy}$ est $= \frac{ddA}{dyddy}$ par les raisons qu'on dira bientôt. Ce que nous venons de dire, joint aux théorêmes suivans, suffira pour mettre tout Lecteur, un peu instruit, en état d'entendre cette matiere.

211. THÉOREME I. *La différentielle de* $\frac{dA}{d^m y} d^m y$, *prise en faisant varier* $d^m y$, *ou* $\frac{ddA}{d^{m+1}y d^m y} d^m y d^{m+1} y$, *est égale à* $d^{m+1} y \cdot \frac{dA}{d^m y} + \frac{ddA}{d^m y d^{m+1} y} \cdot d^{m+1} y d^m y$.

Comme on peut réduire tous les termes qui sont dans A à la forme B. $\overline{d^m y}^n$, & que ce qu'on dira d'un terme, doit s'entendre de tous les autres, nous supposerons pour plus de simplicité que $A = B. \overline{d^m y}^n$; donc $\frac{dA}{d^m y} d^m y = \frac{dB}{d^m y} d^m y \overline{d^m y}^n$; (car dans cette différenciation on regarde $d^{m-1} y$ seule comme variable); mais $d^m y$ se trouve dans le numérateur & le dénominateur de $\frac{dB}{d^m y}$; donc on peut supposer que $d^m y$, a disparu dans cette expression; de sorte que si l'on fait $\frac{dB}{d^m y} = M$, on aura $\frac{dA}{d^m y} \cdot d^m y = M. \overline{d^m y}^{n+1}$. donc en différenciant dans la supposition de $d^m y$ variable, tout le reste étant constant, & remettant la valeur

de M, on aura $\frac{ddA}{d^{m+1}y\,d^m y}.\,d^m y.\,d^{m+1}y = (n+1).\times$ $\frac{dB}{d^m y}.\,\overline{d^m y}^{\,n}\,d^{m+1}y$ (G); mais $\frac{dA}{d^{m+1}y}.\,d^{m+1}y$ $= n.\,B.\,\overline{d^m y}^{\,n-1}.\,d^{m+1}y$, & $\frac{ddA}{d^m y.\,d^{m+1}y}.\,d^m y.\,d^{m+1}y$ $= n.\frac{dB}{d^m y}.\,d^m y.\,\overline{d^m y}^{\,n-1}.\,d^{m+1}y, = n.\frac{dB}{d^m y}.\,(d^m y)^n.$ $d^{m+1}y$; & $\frac{1}{n}.\frac{ddA}{d^m y\,d^{m+1}y}\,d^m y\,d^{m+1}y = \frac{dB}{d^m y}\,\overline{d^m y}^{\,n}\times$ $d^{m+1}y$; mais si l'on divise tous les termes de l'équation (G) par $n+1$, son second membre devient égal à celui de la derniere équation qu'on vient de trouver; donc on a $\frac{1}{n+1}.\,\frac{ddA}{d^{m+1}y\,d^m y}.\,d^m y\,d^{m+1}y$ $= \frac{1}{n}\,d\,\frac{ddA}{d^m y\,d^{m+1}y}.\,d^m y\,d^{m+1}y$, ou $\frac{ddA}{d^{m+1}y\,d^m y}.$ $d^{m+1}y\,d^m y = \frac{n+1}{n}.\,\frac{ddA}{d^m y\,d^{m+1}y}.\,d^m d y^{m+1}y$ $= \left(\frac{1}{n}.\frac{ddA}{d^m y\,d^{m+1}y} + \frac{ddA}{d^m y\,d^{m+1}y}\right).\,(d^m y\,d^{m+1}y)$; équation que nous désignerons par (D). Mais $\frac{dA}{d^{m+1}y}.$ $d^{m+1}y = n.\,B.\,\overline{d^m y}^{\,n-1}.\,d^{m+1}y$, & $\frac{dA}{d^{m+1}y} = n.\,B.$ $\overline{d^m y}^{\,n-1}$; donc $\left(\frac{ddA}{d^m y\,d^{m+1}y}\right)d^m y = n.\frac{dB}{d^m y}.\,\overline{d^m y}^{\,n-1}\times$ $d^m y = n.\,\frac{dB}{d^m y}.\,\overline{d^m y}^{\,n}$; & $\frac{1}{n}.\frac{ddA}{d^m y\,d^{m+1}y}.\,d^m y =$ $\frac{dB}{d^m y}.\,(d^m y)^n$. De plus il est évident que $\frac{dA}{d^m y} = \frac{dB}{d^m y}\times$

REMARQUE. Excepté les cas dont on vient de parler dans les deux théorêmes précédens, on peut indifféremment écrire les différentielles de x ou de y, l'une avant l'autre. Ainsi $\frac{ddA}{d^n x d^m y} = \frac{ddA}{d^m y d^n x}$, $\frac{ddA}{d^m x d^n x} = \frac{ddA}{d^n x d^m x}$, pourvu que dans ce dernier cas m & n différent plus que d'une unité. En général, si l'on doit différencier A deux fois en faisant varier différentes quantités, y, x, dy, dx, $d^m y$, $d^n x$, $d^m x$, &c. La différentielle sera toujours la même lorsqu'on fera varier différentes variables; ainsi $\frac{ddA}{dxdy} = \frac{ddA}{dydx}$, il en sera de même lorsqu'il s'agira de la même variable, pourvu que la différence des exposans soit plus grande que l'unité; ainsi $\frac{ddA}{d^3 x dx} = \frac{ddA}{dx d^3 x}$, parce que si l'on prend d'abord $\frac{dA}{dx}$, & ensuite la différentielle de cette quantité en faisant varier ddx, la seconde différenciation ne peut affecter dx & réciproquement. De même si p différe de plus d'une unité de m, on aura $\frac{1}{d^p x} \cdot \frac{ddA}{d^m x d^n y} = d\left(\frac{dA}{d^n y} \cdot \frac{1}{d^p x}\right)$ prise en faisant varier $d^{m-1} x$, & divisée par $d^m x$.

Avant de passer plus loin, nous allons exposer un principe qui peut être utile dans la question que nous traitons.

215. PRINCIPE. *Deux quantités identiques resteront identiques, si on les différencie en faisant varier la même variable.* Ce principe n'a besoin d'aucune démonstration.

216. PROBLEME. *Trouver l'équation de condition qui doit avoir lieu pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque à deux variables x & y, où dx est supposé*

constant, soit une différentielle exacte d'un ordre inférieur d'une unité.. Soit V la différentielle proposée, A la différentielle moins élevée d'une unité, dont V est supposée la différentielle ; je fais dans V & dans A, $dx = p$, $dp = 0$, à cause de dx constant, $dy = p'$, $ddy = dp' = q'$, $d^3y = d^2p' = dq' = r'$, $dr' = s'$, &c. On aura V & A fonctions de x, y, p, p', q', r', s', &c.; la derniere de ces lettres p', q, r', s', &c. qui se trouve dans la fonction V, ne pouvant se trouver dans A ; *par exemple*, si $r' = d^3y$, est la derniere de ces lettres qui se trouve dans V, $q' = ddy$ sera la derniere de ces lettres qui se trouvera dans A qui est d'un ordre inférieur d'une unité ; de sorte qu'alors A sera du second ordre, & V du troisieme ordre.

Cela posé, on aura $V = dA = \frac{dA}{dx}dx + \frac{dA}{dy}dy + \frac{dA}{dp'}dp' + \frac{dA}{dq'}dq'$, &c. & en mettant dans les numérateurs de la valeur de V que nous venons de trouver, à la place de dx, dy, dp', &c. leurs valeurs p, p', q', &c. on aura $V = \frac{dA}{dx}p + \frac{dA}{dy}p' + \frac{dA}{dp'}q' + \text{\&c.}$ forme que doit avoir V pour être différentielle de A.

Si nous différencions les deux membres de cette équation, l'on aura en différenciant le premier membre selon la méthode ordinaire, on aura, dis-je, $dV = N\,dx + N'dy + P\,dp + Q\,dq$, &c. où les coefficients N, N', P, &c. sont censés connus. En différenciant le second membre selon l'autre méthode, on a $d.\left(\frac{dA}{dx}p + \frac{dA}{dy}p' + \frac{dA}{dp'}q' + \text{\&c.}\right) = \left(\frac{ddA}{dx^2}p + \frac{ddA}{dxdy}p' + \frac{ddA}{dxdp'}q' + \frac{ddA}{dxdq'}r' + \frac{ddA}{dxdr'}s' + \text{\&c.}\right)dx + \left(\frac{ddA}{dydx}p + \frac{ddA}{dy^2}p' + \frac{ddA}{dydp'}q'\right.$

$+ \frac{ddA}{dydq'} r' + \&c.\Big) dy + \Big(\frac{dA}{dy} + \frac{ddA}{dp'dx} p +$
$+ \frac{ddA}{dp'dy} p' + \frac{ddA}{dp'^2} q' + \frac{ddA}{dp'dq'} r' \&c.\Big) dp'$
$+ \Big(\frac{dA}{dp'} + \frac{ddA}{dq'dx} p + \frac{ddA}{dq'dy} p' + \frac{ddA}{dq'dp'} q'$
$+ \frac{ddA}{dq'^2} r' + \frac{ddA}{dq'dr'} s', \&c.\Big) dq' + \Big(\frac{dA}{dq'} + \frac{ddA}{dr'dx} p$
$+ \frac{ddA}{dr'dy} p' + \frac{ddA}{dr'dp'} q' + \frac{ddA}{dr'dq'} r' + \frac{ddA}{dr'^2} s',$
$\&c.\Big) dr' + \Big(\frac{dA}{dr'} + \ldots\ldots + \&c.\Big) ds' + \&c.$
équation que nous désignerons par (B).

La différentielle du second membre $\frac{dA}{dx} p + \frac{dA}{dy} p'$, &c. se trouve en prenant en particulier la différentielle de chacun de ses termes. 1°. En faisant varier x, 2°. en faisant varier y, 3°. en faisant varier p', 4°. en ne faisant varier que q', & ainsi de suite. Mais la différence du second membre en ne faisant varier que x est
$\frac{ddA}{dx^2} pdx + \frac{ddA}{dxdy} p'dx + \frac{ddA}{dxdp'} q'dx +$
$\frac{ddA}{dxdq'} r'dx + \frac{ddA}{dxdr'} s'dx + \&c. = \Big(\frac{ddA}{dx^2} p$
$+ \frac{ddA}{dxdy} p' + \frac{ddA}{dxdp'} q' + \&c.\Big) dx$; de même la différence du second membre prise en ne faisant varier que y, est $= \Big(\frac{ddA}{dydx} p + \frac{ddA}{dy^2} p' + \frac{ddA}{dydp'} q'$
$+ \frac{ddA}{dydq'} r' + \frac{ddA}{dydr'} s' + \&c.\Big) dy$; la différence

du

du second membre prise en ne faisant varier que $p'=dy$, sera (en ayant égard à l'avant-dernier théorême) $= \frac{ddA}{dp'dx} p\,dp' + \frac{dA}{dy} dp' + \frac{ddA}{dp'dy} p'dp' + \frac{ddA}{dp'^2} q'dp'$, &c. $= \left(\frac{dA}{dy} + \frac{ddA}{dp'dx} p + \frac{ddA}{dp'dy} p' + \frac{ddA}{dp'^2} q' + \frac{ddA}{dp'dq'} r' + \frac{ddA}{dp'dr'} s' + \&c.\right) dp'$. On trouve de même les autres différentielles du second membre, en ne faisant varier que q', ensuite en ne faisant varier que r', &c. mais la différence de $\frac{dA}{dx}$ prise en faisant tout varier (*), & que nous désignerons par $d.\frac{dA}{dx}$ est $= \frac{ddA}{dx^2} dx + \frac{ddA}{dxdy} dy + \frac{ddA}{dxdp'} dp' + \frac{ddA}{dxdq'} dq' + \frac{ddA}{dxdr'} dr' + \frac{ddA}{dxds'} ds' + \&c. = \frac{ddA}{dx^2} p + \frac{ddA}{dxdy} p' + \&c.$ & par conséquent $dx.d.\frac{dA}{dx} = \left(\frac{ddA}{dx^2} p + \frac{ddA}{dxdy} p' + \frac{ddA}{dxdp'} q' + \frac{ddA}{dxdq'} r' + \frac{ddA}{dxdr'} s' + \&c.\right) dx$, on trouvera de même que $dy.d.\frac{dA}{dy} = \left(\frac{ddA}{dydx} p + \frac{ddA}{dy^2} p' + \frac{ddA}{dydp'} q' + \&c.\right) dy$. On trouvera assez facilement que $\left(\frac{dA}{dy} + d.\frac{dA}{dp'}\right) dp' = \left(\frac{dA}{dy}\right.$

(*) On doit cependant supposer dx constant & faire $dp = ddx = 0$.

$+ \frac{ddA}{dp'dx} p + \frac{ddA}{dp'dy} p' + \frac{ddA}{dp'^2} q' + \frac{ddA}{dp'dq'} r'$ $+ \frac{ddA}{dp'dr'} s' +$ &c.$\Big).dp'$; & encore que $\Big(\frac{dA}{dp'}$ $+ d.\frac{dA}{dq'}\Big)dq' = \Big(\frac{dA}{dp'} + \frac{ddA}{dq'dx} p + \frac{ddA}{dq'dy} p'$ $+ \frac{ddA}{dq'dp'} q' + \frac{ddA}{dq'^2} r' + \frac{ddA}{dq'dr'} s' +$ &c.$\Big).dq'$.

Si l'on ſubſtitue dans l'équation (B) à la place des ſuites qui multiplient les dx, dy, dp', dq', dr', &c. leurs valeurs $d.\frac{dA}{dx}$, $d.\frac{dA}{dy}$, $\frac{dA}{dy} + d.\frac{dA}{dp'}$, $\frac{dA}{dp'}$ $+ d.\frac{dA}{dq'}$, $\frac{dA}{dq'} + d.\frac{dA}{dr'}$, &c. on aura $d.\Big(\frac{dA}{dx} p$ $+ \frac{dA}{dy} p' + \frac{dA}{dp'} q' + \frac{dA}{dq'} r' + \frac{dA}{dr'} s' +$ &c.$\Big) =$ $dx.\frac{dA}{dx} + dy\,d.\frac{dA}{dy} + \Big(\frac{dA}{dy} + d.\frac{dA}{dp'}\Big)dp' +$ $\Big(\frac{dA}{dp'} + d.\frac{dA}{dq'}\Big).dq' + \Big(\frac{dA}{dq'} + d.\frac{dA}{dr'}\Big).dr' +$ $\Big(\frac{dA}{dr'} \ldots\ldots\Big).ds' +$ &c. ; mais puiſque V & $\frac{dA}{dx} p$ $+ \frac{dA}{dy} p' +$ &c. ſont une même choſe ; leurs différences doivent être égales terme à terme. On aura donc $N\,dx = dx.d.\frac{dA}{dx}$, & $N = d.\frac{dA}{dx}$; $N'dy$ $= dy.d.\frac{dA}{dy}$, & $N' = d.\frac{dA}{dy}$; $P'dp' = \Big(\frac{dA}{dy}$ $+ d.\frac{dA}{dp'}\Big).dp'$, & $P' = \frac{dA}{dy} + d.\frac{dA}{dp'}$; $Q' = \frac{dA}{dp'}$

$+ d. \frac{dA}{dq'}$; $R' = \frac{dA}{dq'} + d. \frac{dA}{dr'}$; $S' = \frac{dA}{dr'} + \ldots\ldots$

équations qui donnent les valeurs que doivent avoir N, N', P', &c. pour que V soit la différentielle exacte de A. On peut remarquer maintenant que dans la suite d'équations

$$N' = d. \frac{dA}{dy}$$

$$P' = \frac{dA}{dy} + d. \frac{dA}{dp'}$$

$$Q' = \frac{dA}{dp'} + d. \frac{dA}{dq'}$$

$$R = \frac{dA}{dq'} + d. \frac{dA}{dr'}$$

$$S' = \frac{dA}{dr'} + \ldots\ldots \; (*)$$

Le second membre de sa premiere, n'a qu'un seul terme, & que le second membre de la derniere, ne peut avoir non plus qu'un seul terme. Car supposons que la quatrieme de ces équations soit la derniere, c'est-à-dire, que A soit une différentielle du second degré qui contienne par conséquent ddy, & non d^3y; dans ce cas le terme $d. \frac{dA}{dr'}$ est $= 0$, & cette équation devient $R' = \frac{dA}{dq'}$ Mais si on prend la premiere différence de la seconde équation, la seconde différence de la troisieme, la troisieme différence de la quatrieme, & ainsi de suite, on aura, en laissant la premiere équation telle qu'elle est, on aura, dis-je;

(*) La lettre S' ne désigne pas ici l'intégrale.

$$N' = d.\frac{dA}{dy}$$

$$dP' = d.\frac{dA}{dy} + dd\frac{dA}{dp'}$$

$$ddQ' = d^2\frac{dA}{dp'} + ddd\frac{dA}{dq'}$$

$$d^3R' = d^3\frac{dA}{dq'} + d^4\frac{dA}{dr'}$$

$$d^4S' = d^4\frac{dA}{dr'} + \ldots\ldots$$

Maintenant ſi l'on retranche la ſeconde de la premiere, & qu'on ajoute la troiſieme au réſultat pour en retrancher la quatrieme, & qu'on continue de même, en ajoutant toutes celles de rang impair, & retranchant toutes celles de rang pair, on aura $N' - dP' + d^2Q' - d^3R' + d^4S' - \&c. = 0$, équation identique qui doit avoir lieu pour que V ſoit la différentielle exacte d'une fonction A, d'un ordre inférieur d'une unité, & qui eſt l'équation de condition cherchée.

217. REMARQUE. Nous démontrerons dans le calcul des variations que ſi $S.Vdx$ eſt un *maximum* ou un *minimum*, V étant une fonction des variables x, y, p, q, r, s, &c. dx étant conſtant, & en ſuppoſant $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx} = \frac{ddy}{dx^2}$, $r = \frac{dq}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$, $s = \frac{dr}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4}$, &c. & par conſéquent $dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \&c.$ (*), nous démontrerons, dis-je, que la relation entre x & y ſera exprimée par l'équation $N - \frac{dP}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2} +$

(*) La lettre S déſigne, dans notre équation, le coefficient de ds.

$\frac{d^3R}{dx^3}$, &c. $= 0$ (A) (*a*). Mais en supposant $p' = dy$, $q' = dp' = ddy$, $r' = dq'$, &c. V sera une fonction des variables x, y, p', q', r', &c. dx étant constant; donc on aura $dV = M'dx + N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr'$, &c. égalant terme à terme les deux valeurs de dV, on aura $M = M'$, $N = N'$, $Pdp = P.\frac{ddy}{dx} = P'dp' = P'ddy$, & $P' = \frac{P}{dx} = \frac{1}{dx}.P$; $\frac{1}{dx}.dP = dP'$; $Qdq = Q.\frac{d^3y}{dx^2} = Q'dq' = Q'd^3y$; $\frac{1}{dx^2}.Q = Q'$, $\frac{1}{dx^2}ddQ = ddQ'$. On trouvera de même $\frac{1}{dx^3}.d^3R = d^3R'$, $\frac{1}{dx^4}d^4S = d^4S'$, &c. donc en substituant ces valeurs dans l'équation (A) qui rend S. V dx un *maximum* ou un *minimum*; on aura $N' - dP' + d^2Q' + d^3R' + d^4S' -$ &c. $= 0$. On voit par-là que les deux formules d'équations sont les mêmes; mais il faut remarquer que quand il s'agit du *maximum* ou du *minimum* l'équation doit contenir une relation entre les variables, & ne doit pas avoir une forme identique (*b*), autrement elle ne feroit point connoître le *maximum* ou le *minimum*.

218. PROBLEME II. *Trouver les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque à deux variables x, y, où aucune des différences n'est supposée constante, soit une différentielle exacte d'une fonction d'un ordre moins élevé d'une unité.* Soit V la fonction proposée, A la fonction d'un ordre

(*a*) Les dx dans cette équation, sont diviseurs simplement, & n'indiquent pas qu'on doit différencier les numérateurs en faisant seulement varier x.

(*b*) Nous entendons ici, par équation identique, une équation, telle que dans la fonction égalée à zéro, tous les termes se détruisent.

moins élevé d'une unité, dont V doit être la différentielle exacte. Je fais $dx = p$, $ddx = dp = q$, $dq = d^3x = r$, $dr = d^4x = s$, &c. $dy = p'$, $dp' = q'$, $dq' = r'$, &c. A & V feront donc des fonctions de x, y, p, q, &c. p', q', &c. les dernieres de ces lettres qui se trouvent dans V ne pouvant se trouver dans A différentielle d'un ordre inférieur d'une unité par rapport à V. Cela posé l'on a

$$V = dA = \frac{dA}{dx}.dx + \frac{dA}{dp}dp + \frac{dA}{dq}dq + \frac{dA}{dr}dr$$
$$+ \frac{dA}{ds}ds + \&c. + \frac{dA}{dy}dy + \frac{dA}{dp'}dp' + \frac{dA}{dq'}dq'$$
$$+ \frac{dA}{dr'}dr' + \frac{dA}{ds'}ds' + \&c.$$

Mais parce que $dx = p$, $dp = q$, $dq = r$, $dy = p'$, $dp' = q'$, &c. on doit avoir

$$V = \begin{cases} \frac{dA}{dx}p + \frac{dA}{dp}q + \frac{dA}{dq}r + \frac{dA}{dr}s, \&c. \\ + \frac{dA}{dy}p' + \frac{dA}{dp'}q' + \frac{dA}{dq'}r' + \frac{dA}{dr'}s', \&c. \end{cases}$$

Mais en différenciant à l'ordinaire, on trouve

$$dV = Ndx + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \&c. \text{(*)}$$
$$+ N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + S'ds' + \&c.$$

De plus, en faisant les réductions nécessaires, on a

$$d.\left\{\begin{matrix} \frac{dA}{dx}p + \frac{dA}{dp}q + \frac{dA}{dq}r + \frac{dA}{dr}s + \&c. \\ + \frac{dA}{dy}p' + \frac{dA}{dp'}q' + \frac{dA}{dq'}r' + \frac{dA}{dr'}s' + \&c. \end{matrix}\right\} =$$

(*) S designe ici le coefficient de ds.

$$\left\{\begin{array}{l} dx\, d\,\frac{dA}{dx} + \left(\frac{dA}{dx} + d\,\frac{dA}{dp}\right) dp \\ + dy.\, d\,\frac{dA}{dy} + \left(\frac{dA}{dy} + d\,\frac{dA}{dp'}\right) dp' \end{array}\right.$$

$$+ \left(\frac{dA}{dp} + d.\,\frac{dA}{dq}\right) dq + \left(\frac{dA}{dq} + d\,\frac{dA}{dr}\right) dr$$

$$+ \left(\frac{dA}{dr} \ldots\ldots\right) ds, \&c.$$

$$+ \left(\frac{dA}{dp'} + d.\,\frac{dA}{dq}\right) dq' + \left(\frac{dA}{dq'} + d\,\frac{dA}{dr'}\right) dr'$$

$$+ \left(\frac{dA}{dr'} \ldots\ldots\right) ds', \&c.$$

Si on égale cette quantité avec la valeur de la différentielle de V qu'on vient de trouver, on aura ces deux suites d'équations.

$N = d.\,\frac{dA}{dx}$	$N' = d.\,\frac{dA}{dy}$
$P = \frac{dA}{dx} + d.\,\frac{dA}{dp}$	$P' = \frac{dA}{dy} + d.\,\frac{dA}{dp'}$
$Q = \frac{dA}{dp} + d\,\frac{dA}{dq}$	$Q' = \frac{dA}{dp'} + d.\,\frac{dA}{dq'}$
$R = \frac{dA}{dq} + d\,\frac{dA}{dr}$	$R' = \frac{dA}{dq'} + d.\,\frac{dA}{dr'}$
$S = \frac{dA}{dr} \ldots\ldots$	$S' = \frac{dA}{dr} \ldots\ldots$
&c.	&c.

Dans lesquelles le premier & le dernier membre des premieres & dernieres équations ne peuvent avoir qu'un seul terme. Maintenant si dans chaque suite on retranche les équations de rang pair, & qu'on ajoute celles de rang impair, après avoir pris la premiere différence de la seconde, la seconde différence de la troisieme,

& ainsi de suite pour chacune des suites, on aura

$$N - dP + ddQ - d^3R + d^4S - \&c. = 0.$$
$$N' - dP' + ddQ' - d^3R' + d^4S' - \&c. = 0.$$

Equations identiques qui doivent avoir lieu pour que V soit la différentielle exacte de A, ou pour que V puisse avoir une intégrale d'un ordre inférieur d'une unité.

219. PROBLEME III. *Trouver les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction différentielle* V *contenant un nombre quelconque de variables* x, y, z, *&c. soit une différentielle exacte d'une fonction* A *d'un ordre moins élevé d'une unité.* Soit $dx = p$, $dp = q$, $dq = r$, &c. $dy = p'$, $dp' = q'$, $dq' = r'$, &c. $dz = p''$, $dp'' = q''$, $dq'' = r''$, &c. & ainsi de suite, s'il y a d'autres variables; j'aurai

$$\begin{aligned} V = dA = & \frac{dA}{dx}p + \frac{dA}{dp}q + \frac{dA}{dq}r + \&c. \\ & + \frac{dA}{dy}p' + \frac{dA}{dp'}q' + \frac{dA}{dq'}r' + \&c. \\ & + \frac{dA}{dz}p'' + \frac{dA}{dp''}q'' + \frac{dA}{dq''}r'' + \&c. \\ & + \&c. \ldots\ldots \&c. \ldots\ldots \end{aligned}$$

J'aurai aussi

$$dV = \left.\begin{aligned} & N\,dx + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + \&c. \\ & + N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + S'ps' + \&c. \\ & + N''dz + P''dp'' + Q''dq'' + R''dr'' + S''ds'' + \&c. \end{aligned}\right\} =$$

$$dx.\frac{dA}{dx} + \left(\frac{dA}{dx} + d\frac{dA}{dp}\right)dp + \left(\frac{dA}{dq} + d\frac{dA}{dq}\right)dq$$
$$+ \left(\frac{dA}{dq} + d\frac{dA}{dr}\right)dr + \left(\frac{dA}{dr}\ldots\ldots\right)ds, \&c.$$
$$+ dy.d\frac{dA}{dy} + \left(\frac{dA}{dy} + d\frac{dA}{dp'}\right)dp' + \left(\frac{dA}{dp'} + d.\frac{dA}{dq'}\right)dq'$$
$$+ \left(\frac{dA}{dq} + d\frac{dA}{dr'}\right)dr' + \left(\frac{dA}{dr'}\ldots\ldots\right)ds' + \&c.$$

$$+ d\frac{dA}{dz}dz + \left(\frac{dA}{dz} + d\frac{dA}{dp''}\right)dp'' + \left(\frac{dA}{dp''} + d\frac{dA}{dq''}\right)dq''$$
$$+ \left(\frac{dA}{dq''} + d\frac{dA}{dr''}\right)dr'' + \left(\frac{dA}{dr''}\ldots\ldots\right)ds'', \&c. + \&c.$$

Egalant maintenant les coefficients de dx, dp, dq, &c. dy, dp', dq', &c. dz, dp'', &c. j'aurai les trois suites suivantes d'équations.

$$N = d.\frac{dA}{dx}$$
$$P = \frac{dA}{dx} + d.\frac{dA}{dp}$$
$$Q = \frac{dA}{dp} + d\frac{dA}{dq}$$
$$R = \frac{dA}{dq} + d\frac{dA}{dr}$$
$$S = \frac{dA}{dr} + \ldots$$

&c. . . . . .

$$N' = d.\frac{dA}{dy}$$
$$P' = \frac{dA}{dy} + d\frac{dA}{dp'}$$
$$Q' = \frac{dA}{dp'} + d\frac{dA}{dq'}$$
$$R' = \frac{dA}{dq'} + d\frac{dA}{dr'}$$
$$S' = \frac{dA}{dr'}\ldots$$

&c. . . . . .

$$N'' = d\frac{dA}{dz}$$
$$P'' = \frac{dA}{dz} + d\frac{dA}{dp''}$$
$$Q'' = \frac{dA}{dp''} + d\frac{dA}{dq''}$$
$$R'' = \frac{dA}{dq''} + d\frac{dA}{dr''}$$
$$S'' = \frac{dA}{dr''}\ldots$$

&c. . . . . .

Chacune de ces suites me donnera une équation de condition de la même forme, & j'aurai les équations identiques.

$$N - dP + ddQ - d^3R + d^4S, \&c. = 0.$$
$$N' - dP' + ddQ' - d^3R' + d^4S', \&c. = 0.$$
$$N'' - dP'' + d^2Q'' - d^3R'' + d^4S'', \&c. = 0.$$

& ainſi de ſuite pour chaque variable.

REMARQUE. Dans le premier problême nous n'avons trouvé qu'une équation de condition, parce que l'on a ſuppoſé dx conſtant : en général ſi on ſuppoſe conſtante la premiere différence d'une des variables, l'équation de condition, qui ſe rapporte à cette variable, diſparoîtra, & le nombre des équations de condition ſera inférieur d'une unité à celui des variables.

210. ON peut auſſi réſoudre le même problême de la maniere ſuivante. Suppoſons que V ſoit une fonction différentielle de l'ordre p, de ſorte que les différentielles les plus élevées, qui ſe trouvent dans V, ſoient $d^p x$, $d^p y$, on demande les équations de condition qui doivent avoir lieu pour que V ait une intégrale A d'un ordre inférieur d'une unité.

A cauſe de $V = dA$, on aura les équations

$$\frac{dV}{dx}dx = \frac{d.(dA)}{dx}dx.\ (*)$$
$$\frac{dV}{ddx}d^2x = \frac{d.(dA)}{ddx}ddx$$
$$\frac{dV}{d^3x}d^3x = \frac{d.(dA)}{d^3x}d^3x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dV}{d^{p-1}x}d^{p-1}x = \frac{d.(dA)}{d^{p-1}x}d^{p-1}x$$
$$\frac{dV}{d^px}d^px = \frac{d.(dA)}{d^px}d^px$$
$$\frac{dV}{d^{p+1}x}d^{p+1}x = \frac{d.(dA)}{d^{p+1}x}d^{p+1}x$$

(*) Cette expreſſion déſigne qu'après avoir pris la différentielle de A, en faiſant tout varier, il faut prendre celle du réſultat, en faiſant ſeulement varier x; il eſt maintenant aiſé de comprendre les valeurs des autres.

Mais

$$dA = \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dx}dx + \frac{dA}{d^2x}d^2x + \frac{dA}{d^3x}d^3x + \ldots\ldots + \\ \frac{dA}{d^{p-1}x}d^{p-1}x + \frac{dA}{d^px}d^px + d'A \text{ (a)} \end{array} \right.$$

on doit ſubſtituer cette valeur de dA dans toutes les équations, afin d'en pouvoir tirer, en les comparant, une équation de condition.

La premiere équation ſe change en celle-ci.

$$\frac{dV}{dx}dx = \frac{ddA}{dx^2}dx^2 + \frac{ddA}{dxd^2x}dxd^2x + \frac{ddA}{dxd^3x} \times$$
$$dxd^3x + \ldots + \frac{ddA}{dxd^{p-1}x}dxd^{p-1}x + \frac{ddA}{dxd^px} \times$$
$$dxd^px + \frac{d.(d'A)}{dx}dx.$$

En réduiſant le ſecond membre, ſelon la méthode du ſecond théorême ci-deſſus, on aura

$$\frac{dV}{dx}dx = \frac{ddA}{dx^2}dx^2 + dx.\frac{ddA}{d^2xdx}d^2x + \frac{ddA}{d^3xdx} \times$$
$$dxd^3x \ldots + \frac{ddA}{d^pxdx}dxd^px + d'\left(\frac{dA}{dx}dx\right)$$

Si l'on diviſe par dx, on aura

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d.\left(\frac{dA}{dx}\right).dx \text{ (b)}}{dx} + \frac{ddA}{d^2xdx}d^2x + \frac{ddA}{d^3xdx} \times$$
$$d^3x \ldots\ldots + d'\left(\frac{dA}{dx}\right) = d.\frac{dA}{dx} \text{ (c)}.$$

(a) L'expreſſion $d'A$ indique la différentielle de A priſe en faiſant varier y, & les différentielles dy, ddy, &c.

(b) Cette expreſſion indique la différentielle de $\frac{dA}{dx}$ priſe en faiſant varier x.

(c) Cette expreſſion indique la différence de $\frac{dA}{dx}$ priſe en faiſant tout varier.

Ainsi l'on a $\frac{dV}{dx} = d\frac{dA}{dx}$. La seconde équation après la substitution, deviendra $\frac{dV}{d^2x}d^2x = \frac{ddA}{d^2xdx}dxd^2x$

$$+\frac{ddA}{d^2xd^2x}ddxddx + \frac{ddA}{ddxd^3x}d^3xd^2x \ldots\ldots$$

$$+\frac{ddA}{d^2xd^px}d^px + \frac{d.(d'A)}{ddx}ddx\ (*).$$

Faisant usage du premier théorême dans le premier terme, & du second théorême dans le troisieme terme du second membre, & disposant convenablement tous les termes, on aura

$$\frac{dV}{ddx}ddx = ddx\frac{dA}{dx} + \frac{ddA}{dxd^2x}d^2xdx + \frac{ddA}{d^2xd^2x}\times$$

$$d^2xd^2x + ddx.\frac{ddA}{d^3xd^2x}d^3x \ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{ddA}{d^pxd^2x}d^px + d'\left(\frac{dA}{d^2x}.d^2x\right).$$

Donc, en divisant par ddx, on aura

$$\frac{dV}{ddx} = \frac{dA}{dx} + d.\frac{dA}{d^2x}; \text{ \& } d.\frac{dV}{d^2x} = d.\frac{dA}{dx}$$

$$+ d^2\frac{dA}{d^2x}.$$

En employant la même méthode, & se servant des deux théorêmes précédens pour le second & le quatrieme terme où la différence de l'ordre des exposans n'est que d'une unité, on trouvera $\frac{dV}{d^3x} = \frac{dA}{d^2x}$

(*) Cette expression indique la différentielle de $d'A$ prise en faisant varier dx.

$+ d. \frac{dA}{d^3x}$. Donc $dd \frac{dV}{d^3x} = dd \frac{dA}{d^2x} + d^3 \frac{dA}{d^3x}$.

La quatrieme équation nous fera trouver $d^3 \frac{dV}{d^4x} = d^3 \frac{dA}{d^3x} + d^4 \frac{dA}{d^4x}$, & ainsi de suite ; de sorte que l'avant-derniere équation donnera $d^{p-1} \frac{dV}{d^px} = d^{p-1} \frac{dA}{d^{p-1}x} + d^p \frac{dA}{d^px}$; mais la derniere équation donnera seulement $d^p \frac{dV}{d^{p+1}x} = d^p \frac{dA}{d^px}$; parce que le terme $dp^{+1} \frac{dA}{dp^{+1}x} = 0$; car A ne contenant pas d^px, la différentielle de A, prise en faisant varier d^px, est nulle. On aura donc cette suite d'équations.

$$\frac{dV}{dx} = d\frac{dA}{dx}$$

$$d.\frac{dV}{d^2x} = d\frac{dA}{dx} + dd\frac{dA}{d^2x}$$

$$dd.\frac{dV}{d^3x} = dd.\frac{dA}{ddx} + d^3\frac{dA}{d^3x}$$

. . . .

$$d^{p-1}\frac{dV}{dpx} = d^{p-1}\frac{dA}{d^{p-1}x} + d^p\frac{dA}{d^px}$$

$$d^p\frac{dV}{d^{p+1}x} = d^p\frac{dA}{d^px} \quad (*).$$

. . . .

(*) Avec un peu d'attention il est aisé de voir que la quantité $\frac{dV}{dx} = N$, que $d.\frac{dV}{d^2x} = dP$, &c. de sorte que

Si on retranche la premiere de la seconde, qu'on retranche ensuite le résultat de la troisième, qu'on retranche encore le résultat de la quatrieme, & ainsi de suite, on aura la valeur des différentes fonctions de A, exprimées en V, & l'on déterminera une équation de condition : les équations suivantes représentent les résultats.

$$\frac{dV}{dx} = d\,\frac{dA}{dx}$$

$$d.\,\frac{dV}{d^2x} - \frac{dV}{dx} = dd\,\frac{dA}{ddx}$$

$$dd\,\frac{dV}{d^3x} - d\,\frac{dV}{ddx} + \frac{dV}{dx} = d^3\,\frac{dA}{d^3x}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^{p-1}\,\frac{dV}{d^p x} - d^{p-2}\,\frac{dV}{d^{p-1}x} + \&c. = d^p\,\frac{dA}{d^p x}$$

$$d^p\,\frac{dV}{d^{p+1}x} - d^{p-1}\,\frac{dV}{d^p x} + d^{p-2}\,\frac{dV}{d^{p-1}x} - \&c. = 0.$$

Ces formules doivent être poussées jusqu'au terme $\frac{dV}{dx}$ inclusivement ; la derniere équation donne la condition nécessaire pour que V ait une intégrale A d'un ordre inférieur d'une unité.

Il est facile de voir que la variable y doit fournir une semblable équation, & que si la fonction V contenoit d'autres variables u, z, &c. chacune fourniroit une semblable équation.

221. PROBLEME IV. *Trouver les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction différentielle* V *ait une intégrale finie.* Soit V une différentielle de l'ordre p, & supposons qu'elle doit avoir une intégrale A de l'ordre $p-1$, & que A doit avoir une

l'équation de condition que nous allons trouver, ne sera pas essentiellement différente de celle que donne la premiere méthode.

intégrale A′ de l'ordre $p-2$: puisque A doit avoir une intégrale A′ de l'ordre $p-2$, selon ce qu'on vient de dire, on aura l'équation de condition

$$d^{p-1}\frac{dA}{d^p x}-d^{p-2}\frac{dA}{d^{p-1}x}+d^{p-3}\frac{dA}{d^{p-2}x}-\&c.=0.$$

Maintenant si l'on substitue dans cette équation, après l'avoir différenciée, les valeurs en V de $d^p\frac{dA}{d^p x}$, $d^{p-1}\cdot\frac{dA}{d^{p-1}x}$, &c. qu'on peut aisément tirer des formules qu'on a données dans le problême précédent, on aura

$$d^{p-1}\frac{dV}{d^p x}-2d^{p-2}\frac{dV}{d^{p-1}x}+3d^{p-3}\frac{dV}{d^{p-2}x}-$$
$$4d^{p-4}\frac{dV}{d^{p-3}x}+\&c.=0;$$

ainsi la fonction V admettra une double intégration, si l'on a les deux équations suivantes.

$$d^p\frac{dV}{d^{p+1}x}-d^{p-1}\frac{dV}{d^p x}+d^{p-2}\frac{dV}{d^{p-1}x}-\&c.=0,$$

$$d^{p-1}\frac{dV}{d^p x}-2d^{p-2}\frac{dV}{d^{p-1}x}+3d^{p-3}\frac{dV}{d^{p-2}x}-$$
$$4d^{p-4}\frac{dV}{d^{p-3}x}+5d^{p-5}\frac{dV}{d^{p-4}x}-\&c.=0,$$

donc si A différentielle de l'ordre $p-1$ a deux intégrales A′, A″, la premiere de l'ordre $p-2$, la seconde de l'ordre $p-3$, on aura les deux équations,

$$d^{p-1}\frac{dA}{d^p x}-d^{p-2}\frac{dA}{d^{p-1}x}+d^{p-3}\frac{dA}{d^{p-2}x}-\&c.=0,$$

$$d^{p-2}\frac{dA}{d^{p-1}x}-2d^{p-3}\frac{dA}{d^{p-2}x}+3d^{p-4}\frac{dA}{d^{p-3}x}$$
$$-\&c.=0.$$

Si dans ces équations différenciées on substitue les valeurs des différentielles de A données en V, &

qu'on écrive encore l'équation qui doit avoir lieu lorsque V a une intégrale = A, on aura les équations,

$$d^p \frac{dV}{d^{p+1}x} - d^{p-1} \frac{dV}{d^p x} + d^{p-2} \frac{dV}{d^{p-1}x} - d^{p-3} \frac{dV}{d^{p-2}x} + \&c. = 0,$$

$$d^{p-1} \frac{dV}{d^p x} - 2d^{p-2} \frac{dV}{d^{p-1}x} + 3d.^{p-3} \frac{dV}{d^{p-2}x} - 4d^{p-4} \frac{dV}{d^{p-3}x} + \&c. = 0,$$

$$d^{p-2} \frac{dV}{d^{p-1}x} - 3d^{p-3} \frac{dV}{d^{p-2}dx} + 6d^{p-4} \frac{dV}{d^{p-3}x} - 10d^{p-5} \frac{dV}{d^{p-4}x} + \&c. = 0.$$

En continuant de même, on trouvera les équations de condition qui doivent avoir lieu pour que V puisse être intégrée quatre fois, cinq fois, &c.

Pour pouvoir facilement trouver ces équations, on doit faire attention à leurs coefficients : or si l'on a les séries suivantes :

Séries.	*Termes généraux.*
1, 1, 1, 1, &c.	1
1, 2, 3, 4, &c.	n
1, 3, 6, 10, 15, &c.	$\frac{n.(n+1)}{2}$
1, 4, 10, 20, 35, &c.	$\frac{n.(n+1).(n+2)}{2.3}$
1, 5, 15, 35, 70, &c.	$\frac{n.(n+1).(n+2).(n+3)}{2.3.4}$
&c.	(*) &c. .....

(*) La premiere de ces séries est celle des unités, la

La

La premiere équation aura $d^p \frac{dV}{d^{p+1}x}$ pour premier terme, & tous ses coefficients seront $= 1$, toutes les équations ont le signe + & — alternativement; la seconde équation a $d^{p-1} \frac{dV}{d^p x}$ pour premier terme, & ses coefficients sont les nombres de la seconde suite; la troisieme équation a $d^{p-2} \frac{dV}{d^{p-1}x}$ pour premier terme, & ses coefficients sont les nombres de la troisieme suite; la quatrieme équation auroit $d^{p-3} \frac{dV}{d^{p-2}x}$ pour premier terme, & pour coefficients les nombres de la quatrieme suite, & ainsi de suite; mais toutes les équations ont $\frac{dV}{dx}$ pour dernier terme. Si la premiere équation a lieu la fonction V aura une intégrale A, elle en aura deux, c'est-à-dire, qu'elle pourra être intégrée deux fois, si les deux premieres équations ont lieu, trois fois si les trois premieres équations ont lieu; & si la fonction V est du cinquieme ordre, on pourra l'intégrer cinq fois, ou trouver son intégrale finie, lorsqu'on aura cinq équations de la forme de celles dont on vient de parler.

Ce qu'on vient de dire d'une fonction différentielle V, doit s'entendre également d'une équation $V = 0$; mais il arrive rarement que les équations & fonctions différentielles aient les conditions nécessaires pour que les équations, dont on vient de parler, puissent avoir

seconde celle des nombres naturels, la troisieme celle des nombres triangulaires, la quatrieme celle des nombres pyramidaux, & ainsi de suite. Il est aisé de voir que le terme général de la seconde est le terme sommatoire de la premiere, & qu'en général le terme général de l'une de ces séries est le terme sommatoire de la précédente.

lieu : il eſt vrai qu'en les multipliant par un facteur M, les Géomètres trouvent ſouvent une expreſſion M V, dans laquelle les équations de condition peuvent avoir lieu : mais par quelle méthode générale pourra-t-on trouver ce multiplicateur M ?

Au reſte il eſt aiſé de comprendre que la variable y doit donner une ſuite d'équations ſemblables à celles que donne la variable x, qu'il en eſt de même de la variable z, & de toute autre variable qui ſe trouve dans V, & qu'il faut que toutes ces équations aient lieu enſemble, pour pouvoir déterminer le nombre d'intégrations dont V eſt ſuſceptible dans l'état où elle eſt.

222. ON ne ſera peut-être pas fâché que nous réſolvions le meme problême de la maniere ſuivante. Si l'on compare les valeurs de N, P, Q, R, S, &c. que nous avons trouvées dans le Problême II, avec les valeurs de $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{d^2x}$, &c. que donne la ſuite d'équations qu'on a trouvées dans le problême précédent ; on verra que $\frac{dV}{dx} = N$, $\frac{dV}{d^2x} = P$, &c. Si dans la ſuite, dont on vient de parler, on retranche les équations de rang pair, & qu'on ajoute celles de rang impair, on aura

$$\frac{dV}{dx} - d.\frac{dV}{d^2x} + dd\frac{dA}{d^3x} - d^3\frac{dV}{d^4x} + d^4\frac{dV}{d^5x}$$

&c. $= 0$ (*), équation qui a lieu lorſque V doit avoir une intégrale A d'un ordre inférieur d'une unité ; donc lorſque A doit avoir une intégrale A' d'un ordre inférieur d'une unité (à A), c'eſt-à-dire, lorſque V doit avoir deux intégrales, l'on aura (B)

$$\frac{dA}{dx} - d\frac{dA}{d^2x} + dd\frac{dA}{d^3x} - d^3\frac{dA}{d^4x} + d^4\frac{dA}{d^5x}, \text{ \&c.}$$

(*) Cette équation eſt la même que celle-ci :

$$N - dP + ddQ - d^3R + d^4S, \text{ \&c.} = 0.$$

$= 0$; mais on a vu ci-dessus (Problême III.) que

$$P = \frac{dA}{dx} + d\frac{dA}{dp}$$

$$Q = \frac{dA}{dp} + d\frac{dA}{dq}$$

$$R = \frac{dA}{dq} + d.\frac{dA}{dr}$$

&c. . . . . . .

Cela posé, si l'on fait attention aux valeurs de p, q, r, &c. qu'on prenne la premiere différence de la seconde de ces équations, la seconde différence de la troisieme, & ainsi de suite; qu'on retranche ensuite les équations de rang pair, qu'on ajoute celles de rang impair, & qu'on transpose dans la premiere, on aura

$$\frac{dA}{dx} = P - dQ + ddR - d^3S, \&c.$$

Si l'on regarde ensuite la seconde équation comme la premiere, & qu'on prenne la premiere différence de la troisieme, la seconde de la quatrieme, & qu'on fasse sur ces équations les opérations dont on vient de parler, c'est-à-dire, si l'on ajoute alors celles de rang impair, & qu'on retranche celles de rang pair, en prenant l'équation $Q = \frac{dA}{dp} + d.\frac{dA}{dq}$ pour la premiere, & qu'on continue de même, on aura

$$\frac{dA}{dp} = Q - dR + ddS, \&c.$$

$$\frac{dA}{dq} = R - dS + ddT, \&c.$$

$$\frac{dA}{dr} = S - dT, \&c.$$

Maintenant si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (B), on aura l'équation de condition $P - 2dQ + 3d^2R - 4d^3S$, &c. $= 0$, ou (en mettant les

valeurs de P, Q, &c.) $\frac{dV}{d^2x} - 2d\frac{dV}{d^3x} + 3dd\frac{dV}{d^4x}$ — &c. = o ; ainsi lorsque V doit avoir deux intégrales successives, on aura ces équations,

$$\frac{dV}{dx} - d\frac{dV}{d^2x} + dd\frac{dV}{d^3x} - d^3\frac{dV}{d^4x} + \&c. = o,$$

$$\frac{dV}{ddx} - 2d\frac{dV}{d^3x} + 3dd\frac{dV}{d^4x} - \&c. = o,$$

donc si A doit avoir une intégrale A′ d'un ordre inférieur d'une unité, & que A′ doive avoir une intégrale A″ d'un ordre inférieur d'une unité (à A′), c'est-à-dire, si V doit avoir trois intégrales, on aura ces équations,

$$\frac{dA}{dx} - d.\frac{dA}{d^2x} + \&c. = o,$$

$$\frac{dA}{ddx} - 2d\frac{dA}{d^3x} + 3dd.\frac{dA}{d^4x} - \&c. = o:$$

si dans cette derniere équation on fait les mêmes substitutions pour $\frac{dA}{dp'}$ ou $\left(\frac{dA}{ddx}\right)$, $\frac{dA}{dq}$ ou $\left(\frac{dA}{d^3x}\right)$, &c. on aura l'équation $Q - 3dR + 6d^2S$ — &c. = o, qui devient

$$\frac{dV}{d^3x} - 3d.\frac{dV}{d^4x} + 6d^2\frac{dV}{d^5x} - 10d^3\frac{dV}{d^6x} + \&c. = o.$$

Donc lorsque V doit avoir trois intégrales, on a les trois équations,

$$\frac{dV}{dx} - d.\frac{dV}{d^2x} + \&c. = o,$$

$$\frac{dV}{d^2x} - 2d\frac{dV}{d^3x} + \&c. = o,$$

$$\frac{dV}{d^3x} - 3d.\frac{dV}{d^4x} + 6d^2\frac{dV}{d^5x} - \&c. = o;$$

donc si A doit avoir trois intégrales A′, A″, A‴, c'est-à-dire, si V doit avoir quatre intégrales successives, on aura ces trois équations:

$$\frac{dA}{dx} - d\frac{dA}{ddx} + dd\frac{dA}{d^3x} - \&c. = 0,$$

$$\frac{dA}{d^2x} - 2d\frac{dA}{d^3x} + 3dd\frac{dA}{d^4x} - \&c. = 0,$$

$$\frac{dA}{d^3x} - 3d\frac{dA}{d^4x} + 6dd\frac{dA}{d^5x} - \&c. = 0.$$

Si dans cette derniere équation on substitue, comme ci-dessus, les valeurs de $\frac{dA}{d^3x}$ $\left(\text{qui est la même que } \frac{dA}{dq}\right)$, $\frac{dA}{d^4x}$, c'est-à-dire, de $\frac{dA}{dr}$, &c.; on trouvera, en s'y prenant comme ci-devant, l'équation

$$\frac{dV}{d^4x} - 4d\frac{dV}{d^5x} + 10dd\frac{dV}{d^6x} - 20d^3\frac{dV}{d^7x} + \&c. = 0.$$

Donc si V doit avoir quatre intégrales successives, on aura les quatre équations,

$$\frac{dV}{dx} - d.\frac{dV}{d^2x} + \&c. = 0.$$

$$\frac{dV}{d^2x} - 2d.\frac{dV}{d^3x} + \&c. = 0.$$

$$\frac{dV}{d^3x} - 3d.\frac{dV}{d^4x} + \&c. = 0.$$

$$\frac{dV}{d^4x} - 4d.\frac{dV}{d^5x} + \&c. = 0.$$

Il est aisé de continuer, en faisant attention que dans la premiere équation de condition, les coefficients sont chacun = 1, que dans la seconde ce sont les nombres naturels, dans la troisieme les nombres triangulaires, dans la quatrieme les nombres pyramidaux, & ainsi de suite; de sorte que les coefficients sont les mêmes

que ceux des séries dont on a parlé ci-dessus. Si l'on vouloit chasser les V de ces équations, on auroit alors les équations suivantes :

1°. $N - dP + ddQ - d^3R + d^4S -$ &c. $= 0$.

2°. $P - 2dQ + 3ddR - 4d^3S + 5d^4T -$ &c. $= 0$.

3°. $Q - 3dR + 6ddS - 10d^3T +$ &c. $= 0$.

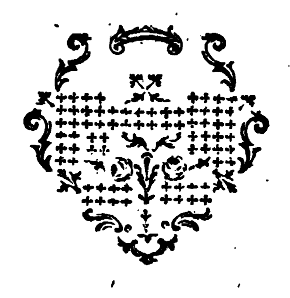
4°. $R - 4dS + 10d^2T -$ &c. $= 0$.

5°. $S - 5dT + \ldots\ldots$ &c. $= 0$.

6°. $T - \ldots\ldots\ldots$ &c. $= 0$.

&c. .... &c. ......

Telles sont les équations que fournit la variable x ; chacune des autres variables doit donner une suite d'équations semblables, le nombre des équations dans chaque suite étant égal à l'ordre de la différentielle V. Si la premiere équation de chaque suite peut avoir lieu, V aura une intégrale A d'un ordre inférieur d'une unité ; si les deux premieres équations de chaque suite ont lieu en même-tems, V aura deux intégrales, c'est-à-dire, pourra être intégré deux fois, & ainsi de suite.



SECONDE PARTIE

DE LA TROISIEME SECTION.

223. CETTE seconde partie contient quelques méthodes d'intégrer qui sont encore bien peu connues, quoique très-vastes & très-intéressantes, avec le calcul des variations. Mais avant de passer plus loin, nous ferons remarquer qu'une équation du premier ordre, telle que $P dx^2 + Q dy^2 + R dz^2 + 2p dx dy + 2q dx dz + 2r dy dz = 0$, ne peut être réelle, à moins qu'on puisse la réduire en facteurs de cette forme $P' dx + Q' dy + R' dz = 0$; car quelle que soit l'intégrale, il est visible que z sera une fonction de y & de x, telle que l'on aura une équation de cette forme $dz = P'' dx + Q'' dy$; donc en substituant cette valeur de dz dans la proposée, tous les termes doivent se détruire mutuellement; ce qui ne pourroit avoir lieu, si en prenant la valeur de dz par la résolution de la proposée, les différentielles dx & dy étoient affectées de radicaux, de maniere qu'on ne pût les en délivrer; ainsi la proposée donnant $dz = [-q dx - r dy \pm \sqrt{((qq - PR) dx^2 + 2(qr - Rp) dx dy + (rr - QR) dy^2)}] : R$ (*), ne peut être réelle si on ne peut extraire la racine.

De l'intégration des différentielles du premier ordre à trois variables.

224. PROBLEME. *Intégrer l'équation du premier*

(*) Ces deux points indiquent que la quantité qui les précède doit être divisée par R.

ordre $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$, *dans laquelle* A, B, C, *sont supposées des fonctions des variables* x, y, z. On cherchera par la méthode, dont a parlé ci-devant, si elle est réelle, si elle est absurde, on l'abandonnera; si elle est réelle, on supposera une des variables, (par exemple z) constante, ce qui donnera $dz = 0$, & $C\,dz = 0$; donc on aura $A\,dx + B\,dy = 0$, équation qu'on intégrera en supposant z constante, ayant soin d'ajouter une constante M : or cette constante M peut être entiérement constante, ou renfermer z. Considérant maintenant z comme variable, on différenciera l'intégrale trouvée, pour comparer sa différentielle avec l'équation proposée. Les fonctions A & B se présenteront d'elles-mêmes; mais la fonction M doit être différenciée en supposant z variable, pour avoir $dM = C\,dz$, ce qui fera connoître C. De cette maniere on obtiendra l'intégrale cherchée qui sera complette, parce que il restera toujours dans M une partie arbitraire.

COROLLAIRE I. On peut donc par cette méthode réduire l'intégration des équations à trois variables à celle des équations à deux variables.

COROLLAIRE II. Cette intégration peut se faire de trois manieres, en supposant successivement x, y, z constans; mais il doit toujours en résulter la même intégrale complette.

EXEMPLE I. Soit proposée l'équation $2\,dx.(z+y) + dy\,(2z+3y+x) + dz\,(x+y) = 0$. Considérant y cômme constant, pour avoir $dy = 0$, il vient $2\,dx\,(z+y) + dz\,(x+y)$

$= 0$, ou $\frac{2dx}{x+y} + \frac{dz}{y+z} = 0$; dont l'intégrale, en supposant y constant, est $2 L. (x+y) + L. (y+z) = C$ ou M constante (A). Soit $dM = dC = Ddy$: si l'on différencie l'équation A, en faisant varier x, y, z, l'on trouvera $\frac{2dx + 2dy}{x+y} + \frac{dy+dz}{y+z} = Ddy$, ou $2dx(y+z) + 2dy(y+z) + dy(x+y) + dz(x+y) = Ddy(x+y)(y+z)$. Mais le premier membre de cette équation, étant évidemment égal au premier membre de la proposée, le second doit être $= 0$; donc $dC = Ddy$ est $= 0$: & par conséquent C est une véritable constante; & l'intégrale complette est $2 L. (x+y) + L. (y+z) = C$ constante, ou $(x+y)^2 . (y+z) = B$ constante.

EXEMPLE II. Soit l'équation $bzzydx + bzzxdy + (2bxyz + a) dz = 0$. Supposant z constant, on a $bzzydx + bzzxdy = 0$, dont l'intégrale, en regardant z comme constant, donne $bzzyx = M$. Différenciant cette équation, en faisant varier x, y, z, on aura $bzzydx + bzzxdy + 2bxyzdz = dM$. Si de cette équation on retranche la proposée; il restera $- adz = dM$; donc en intégrant, $- az + C = M$; donc l'intégrale complette sera $bzzxy = - az + C$, ou $bzzxy + az = C$ constante. Mais il n'est pas toujours aussi aisé que dans les exemples précédens d'obtenir l'intégrale complette par cette méthode.

De la nature des équations différentielles du premier ordre, par lesquelles on détermine en général les fonctions de deux variables.

225. PROBLEME. *V étant supposée une fonction de deux variables x & y, si dans la formule intégrale* S. V dx, *on a considéré y comme constant; on demande de trouver la différentielle de* S. V dx, *en supposant aussi y variable.* Soit S V $dx = m$, il est visible que m doit être une fonction de x & de y, en regardant même y comme constant. Il est évident aussi, qu'en supposant y constant dans la différenciation, on aura $dm = \mathrm{V}\,dx$; mais en supposant y variable, on doit avoir $dm = \mathrm{V}\,dx + \mathrm{P}\,dy$; or selon ce qu'on a dit ci-dessus, cette différentielle étant vraie, on a $\left(\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right) = \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right)$; donc $dx\left(\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right) = dx\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right)$. Mais $dx\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right)$ est la différentielle de P, en supposant y constant; donc on trouvera P en intégrant $dx\left(\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)$ dans la supposition de y constant; donc $\mathrm{P} = \mathrm{S}\,dx\left(\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)$ (*), & $dm = \mathrm{V}\,dx + dy\,\mathrm{S}\,dx\left(\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)$.

226. PROBLEME. *Trouver la nature de la fonction z de deux variables y & x, pour que p étant*

(*) Voyez la remarque ci-dessus (92).

une fonction de x, on ait $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ (*). Soit $dz = pdx + qdy$. Puisqu'on connoît pdx, si on fait y constant, on aura $z = Spdx + C$; mais parce que C peut renfermer une fonction quelconque de y, nous ferons $C = f(y)$, cette expression désignant une fonction quelconque de y; donc $z = Spdx + f(y)$.

COROLLAIRE. Donc en supposant que la fonction z ne renferme pas d'autre variable que x & y, la *différentielle* $dz = pdx + qdy$, ne peut être réelle, à moins que q ne soit une fonction de y sans x. Si l'on suppose $p = 3axx$, on aura $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 3axx$; & si l'on fait $f(y) = A + By + by^2 +$ &c., on aura $z = axxx + A + By + by^2 +$ &c.: mais ce sera une intégrale particuliere, quelque nombre de constantes arbitraires A, B, b, &c. qu'elle renferme: car l'intégrale complette $z = axxx + f(y)$, est infiniment plus étendue.

De la résolution des équations à deux variables, lorsqu'une formule différentielle est donnée en quantités finies.

227. PROBLEME. *Déterminer la nature de la fonction z de deux variables x & y, lorsque la formule* $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = a$, *quantité constante.* Soit

(*) L'expression $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ indique la différentielle de z, prise en faisant varier x, & divisée par dx.

$dz = pdx + qdy = adx + qdy$. Si l'on fait y constant, on a $dz = adx$, $z = ax + C$. Mais il est visible que $C = f(y)$. Si l'on suppose x constant, on aura $dz = dC = qdy$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q = \left(\frac{dC}{dy}\right)$; q est donc une fonction de y sans x.

Si l'on vouloit que $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ fût $= 0$, dans ce cas z seroit une fonction de y sans x; car cette formule ne devant subir aucun changement par la variation de x, ne sauroit renfermer x. C'est d'ailleurs ce que fait voir l'équation $dz = pdx + qdy$, qui dans la supposition de y constant, donne $dz = pdx$, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$, équation qui, lorsque $p = 0$, donne $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$: or dans ce cas z ne contient point x.

REMARQUE I. Nous pouvons donc supposer $C = f(y)$, quantité qui reste entiérement indéterminée. On peut la concevoir telle que les abscisses d'une courbe, étant représentées par y, les ordonnées soient représentées par $f(y)$; & il n'est pas nécessaire que cette courbe soit réguliere, elle peut résulter de l'assemblage de plusieurs arcs de différentes courbes. On peut appeller ces sortes de fonctions irrégulieres, des *fonctions discontinues*.

REMARQUE II. Comme dans les intégrations vulgaires on détermine la constante arbitraire par la nature du problême; de même dans les pro-

intégrant dans la même supposition, il viendra $z = \text{S}\,\text{V}\,dx + f(y)$.

Selon ce qu'on a dit ci-dessus (225), en regardant x & y comme variables, on doit avoir $dz = \text{V}\,dx + dy\,\text{S}\,dx\left(\frac{d\text{V}}{dy}\right) + dy\,f'(y)$, en faisant la différentielle de $f(y)$ égale à $dyf'(y)$; d'où l'on tirera $q = \text{S}\,dx\left(\frac{d\text{V}}{dy}\right) + f'(y)$. Mais dans la formule $dx\left(\frac{d\text{V}}{dy}\right)$ on doit regarder x seule comme variable.

Si on demande, par exemple, que $p = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$, on aura $\text{S}\,\text{V}\,dx = \text{S}.\frac{x\,dx}{\sqrt{(xx+yy)}} = \sqrt{(xx+yy)}$; donc $z = \sqrt{(xx+yy)} + f(y)$, & $q = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}} + f'(y)$.

Quoique par cette méthode on détermine la valeur de p, celle de q ne paroît pas également déterminée; il semble au contraire qu'elle doit introduire une indéterminée, indépendante de la premiere. Pour éviter une telle signification vague, il est à propos d'employer dans la détermination de $\text{S}\,dx\left(\frac{d\text{V}}{dy}\right)$, la même condition dont on se sert pour déterminer $\text{S}.\,\text{V}\,dx$. Si, par exemple, $\text{S}.\,\text{V}\,dx$ doit être $= 0$, lorsque $x = a$, il faudra aussi que l'on ait $\text{S}\,dx\left(\frac{d\text{V}}{dy}\right) = 0$, lorsque $x = a$. Dans l'exemple proposé, si on

ſuppoſe que S. V dx doit s'évanouir lorſque $x = 0$, l'on aura S. V $dx = \sqrt{(xx + yy)} - y$; & $S dx \left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{y}{\sqrt{(xx + yy)}} - 1$; mais on a le même réſultat en ſuppoſant $f(y) = -y$ & $f'(y) = -1$.

Le principe de cette détermination eſt fondé ſur ce théorême : *ſi* z *eſt une fonction de deux variables* x *&* y, *qui devienne* $= 0$, *lorſque* $x = a$, *& que l'on ait* $dz = p dx + q dy$, *la quantité* q *s'évanouira dans la même ſuppoſition de* $x = a$: d'où il eſt aiſé de tirer cette concluſion; que ſi z devient $= 0$, lorſque $y = b$, on aura auſſi $p = 0$ dans la même ſuppoſition de $y = b$.

De la réſolution des équations, dans leſquelles de deux formules différentielles, l'une eſt donnée par l'autre.

229. PROBLEME. *Si* z *doit être une fonction des variables* x *&* y, *telle que* $a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) = c$ *quantité conſtante, déterminer* z. Soit $dz = p dx + q dy$, on aura $ap + bq = c$, puiſque $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ & $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$. Donc $q = \frac{c - ap}{b}$; & $dz = p dx + \left(\frac{c - ap}{b}\right) dy = \frac{c}{b} dy + \frac{p}{b}(b dx - a dy)$, formule qui doit être intégrable. Mais la partie $\frac{c}{b} dy$ étant intégrable par elle-même,

l'autre partie doit être intégrable séparément. C'est pourquoi ayant fait $bx - ay = t$, afin que cette partie devienne $\frac{p}{b}dt$, il est visible que p doit être une fonction de t, & que l'intégrale doit aussi être une fonction de t. Ainsi nous pouvons supposer $S.p.(bdx - ady) = F(t) = f(bx - ay)$, cette expression marquant une fonction de $bx - ay$; donc on aura $z = \frac{c}{b}y + \frac{1}{b}f(bx - ay)$.

COROLLAIRE. Si $b = 1$, $c = 0$, $a = -1$, on aura $z = f(x + y)$, si $b = c = a = 1$, on a $z = y + f(x - y)$.

REMARQUE. Par les premiers élémens du calcul intégral, on a $Spdx = px - Sxdp$, $Sqdy = qy - Sydq$; mais à cause de $dz = pdx + qdy$, on a $z = S(pdx + qdy)$; donc $z = px + qy - S(xdp + ydq)$.

230. PROBLEME. *Si z doit être une fonction de deux variables x & y, telle qu'en supposant $dz = pdx + qdy$, on ait $pq = 1$ & par conséquent $q = \frac{1}{p}$, déterminer la fonction z.* Par la remarque précédente $z = px + qy - S(xdp + ydq) = px + \frac{y}{p} - S\left(xdp - \frac{ydp}{pp}\right)$, dans le cas du problême; donc la formule $\left(x - \frac{y}{pp}\right)dp$ doit être intégrable : donc en faisant $x - \frac{y}{pp} = t$, la formule tdp sera intégrable;

grable; mais généralement parlant, cette formule n'est intégrable que lorsque t est une fonction de p (*); donc $x - \frac{y}{pp}$ doit être une fonction de p seulement; & l'intégrale de $\left(x - \frac{y}{pp}\right) dp$ sera une fonction que nous ferons $= f(p)$; donc $z = px + qy - f(p)$, $x - \frac{y}{pp} = f'(p)$, en faisant $= dp\, f'(p)$ la différentielle de $f(p)$; donc $x = \frac{y}{pp} + f'(p)$ & $z = \frac{2y}{p} + p f'(p) - f(p)$, équation qui donne la solution générale du problême.

REMARQUE. Toutes les fois que l'on prend pour $f(p)$ une fonction algébrique de p, on peut par le moyen des deux dernieres équations, parvenir à une équation entre z, x & y. Mais on ne peut pas trouver cette équation dans tous les cas: on peut cependant construire le problême par le moyen d'une courbe réguliere ou irréguliere, dont l'abscisse seroit $= p$, & l'ordonnée perpendiculaire $= f'(p) = t$; car alors $f(p) = S.\, t\, dp$, aire de la courbe que nous supposerons $= u$ (**), de sorte que les équations $x - \frac{y}{pp} = t$, $z = px + \frac{y}{p} - u$, donneront

(*) Si t étoit une constante $= a$, on pourroit supposer $t = ap^{\circ}$ à cause de $p^{\circ} = 1$, & regarder ap° comme une fonction de p.

(**) Il est visible que $u = f(p)$.

la solution générale du problême; c'est-à-dire, qu'en prenant pour x une valeur quelconque, on aura $y = pp(x - t)$, & $z = 2px - pt - u$.

231. PROBLEME. *Si z est une fonction de x & de y, telle qu'en faisant $dz = pdx + qdy$, q doive être une fonction de p, trouver en général la nature de z.* Puisque q est une fonction de p, nous pouvons supposer $dq = tdp$, t étant une fonction de p; & l'on aura $z = px + qy - S(xdp + ydq) = px + qy - S(x + ty)dp$; donc $S(x + ty)dp$ doit être une fonction de p, c'est-à-dire, doit être $= f(p)$, dont nous ferons la différentielle $= dp f'(p)$. Ainsi $z = px + qy - f(p)$; & $x + ty = f'(p)$, équations qui donnent la solution générale du problême, $f'(p)$ représentant une fonction de p, continue ou discontinue.

COROLLAIRE. Si p représente l'abcisse, $f'(p)$ l'ordonnée perpendiculaire d'une courbe, $f(p)$ représentera l'aire u de la courbe, par le moyen de laquelle on pourra construire le problême.

De la résolution des équations dans lesquelles on donne le rapport entre deux formules différentielles, & une seule des trois variables.

232. PROBLEME. *Si z doit être une fonction de x & de y, telle qu'ayant supposé $dz = pdx + qdy$, l'on doive avoir $q = \frac{px}{a}$, déterminer z.*

L'on aura $dz = pdx + \frac{px}{a}dy = px \times \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{a}\right) = px(du)$, en faisant L. x

$+ \frac{y}{a} = u$. Or cette formule ne peut être intégrable, à moins que px, & par conséquent z ne soit une fonction de u, ou de $L.x + \frac{y}{a}$; donc $z = f\left(L.x + \frac{y}{a}\right)$: mais en désignant la différentielle de $f(u)$ par $f'(u)du$, on a $pxdu = f'(u)du$, ou $px = f'\left(L.x + \frac{y}{a}\right)$. Ainsi la solution complette du problême est renfermée dans les deux équations $z = f\left(L.x + \frac{y}{a}\right)$, & $px = f'\left(L.x + \frac{y}{a}\right)$.

233. PROBLEME. *z étant une fonction de x & de y, telle qu'en supposant $dz = pdx + qdy$, on ait $q = pm + t$, m & t étant des fonctions quelconques de x, déterminer z.* L'on aura $dz = pdx + pmdy + tdy$; donc en faisant $p = r - \frac{t}{m}$, on aura $dz = rdx - \frac{tdx}{m} + rmdy = -\frac{tdx}{m} + rm\left(\frac{dx}{m} + dy\right)$. Donc rm & $S.rm\left(\frac{dx}{m} + dy\right)$ doivent être des fonctions de $S.\frac{dx}{m} + y$; donc $S.rm\left(\frac{dx}{m} + dy\right) = f\left(y + S.\frac{dx}{m}\right)$, $rm = f'\left(y + S.\frac{dx}{m}\right)$ (*), équation

(*) On comprend assez par la solution du problême précédent quelle est la signification de f'.

que nous désignerons par (A). Donc $z = - S.\frac{t\,dx}{m} + f\left(y + S.\frac{dx}{m}\right)$, & $p = r - \frac{t}{m} = -\frac{t}{m} + \frac{1}{m}.f'\left(y + S.\frac{dx}{m}\right)$, en substituant la valeur de r prise de l'équation A. On aura aussi $q = pm + t = f'\left(y + S.\frac{dx}{m}\right)$; mais parce que m & t sont des fonctions de x, les formules $S.\frac{dx}{m}$, $S.\frac{t\,dx}{m}$ ne troublent pas la solution.

234. PROBLEME. *Soit $dz = p\,dx + q\,dy$, si la relation entre p, q & x est donnée par une équation quelconque, trouver la fonction z, exprimée par les variables x & y.* Supposant que par l'équation proposée entre p, q & x (*), on ait trouvé la valeur de x exprimée par une fonction de p & de q, on pourra dans l'équation $z = px + qy - S.(x\,dp + y\,dq)$, intégrer $x\,dp$, en supposant q constant, pour avoir $S.x\,dp = V + f(q)$, V étant censée une fonction connue de p & de q, telle que l'on ait $dV = x\,dp + T\,dq$, T étant aussi une fonction de p & de q. Mais parce que $(x\,dp + y\,dq)$ doit admettre l'intégration, on a $S(x\,dp + y\,dq) = V + f(q)$. Donc, en différenciant, $x\,dp + y\,dq = x\,dp + T\,dq + dq\,f'(q)$; & par conséquent $y = T + f'(q)$, & $z = px + qy - V - f(q)$, ou $z = px + Tq + qf'(q) - f(q) - V$. Ainsi par l'équation donnée on exprimera x en

(*) Ici les équations finies sont supposées toujours résolubles.

p & q, en prenant ensuite q pour constant, on aura $V = S.x\,dp$, & $dV = x\,dp + T\,dq$. Ayant trouvé V & T, ou p & q, y & z seront exprimés par les formules qu'on vient de trouver.

On peut aussi, par l'équation donnée, chercher p en x & q; mais $z = px + qy - S.(x\,dp + y\,dq) = qy + S.(p\,dx + x\,dp - x\,dp - y\,dq) = qy + S.(p\,dx - y\,dq)$. Mais p est une fonction de x & de q; donc il y a une fonction V de ces variables, telle que $dV = p\,dx + R\,dq$. Soit faite $S.(p\,dx - y\,dq) = V + f(q)$, équation que nous désignerons par (A); donc $z = qy + V + f(q)$, & $y = -R - f'(q)$, ce qu'on tire de l'équation A après avoir différencié, en se souvenant que $dV = p\,dx + R\,dq$; l'une & l'autre solution peut être employée aussi commodément, si par la relation donnée entre x, p & q on peut aussi facilement déterminer x que p; mais on employera la premiere lorsqu'il sera plus aisé de déterminer x que p, & la derniere lorsqu'on pourra déterminer p plus aisément que x.

235. PROBLEME. *Supposant* $dz = p\,dx + q\,dy$, *de maniere que l'on ait* $p + q = \frac{z}{a}$, *déterminer la relation de* z *par rapport aux variables* x & y. On aura $q = \frac{z}{a} - p$, $dz = p\,dx + \frac{z\,dy}{a} - p\,dy$, $p(dx - dy) = \frac{a\,dz - z\,dy}{a} = z\left(\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a}\right)$. Mais les formules $dx - dy$, $\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a}$

étant intégrables par elles-mêmes, & de plus $\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a}$ étant $= \frac{p}{z}(dx - dy)$; il est nécessaire que $\frac{p}{z}$ soit une fonction de $x - y$. Supposant donc $S.\frac{p}{z}(dx - dy) = f(x-y)$, il viendra $L.z - \frac{y}{a} = f(x-y)$. Mais e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, $e^{f(x-y)}$ sera une fonction de $x - y$, que nous désignerons par $F(x-y)$, & l'on aura $L.z = f(x-y) + \frac{y}{a} = f(x-y) L.e + \frac{y}{a} L.e$, & $z = e^{\frac{y}{a}} \times e^{f(x-y)} = e^{\frac{y}{a}} F(x-y)$; d'où l'on tire $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = e^{\frac{y}{a}} F'(x-y)$, F' ayant une signification analogue à celle de f' dans les problêmes précédens: on aura aussi $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q = - e^{\frac{y}{a}} F'(x-y) + \frac{1}{a} e^{\frac{y}{a}} F(x-y)$; & $p + q = \frac{1}{a}. e^{\frac{y}{a}} F(x-y) = \frac{z}{a}$ comme on le demande.

236. PROBLEME. *Si $dz = pdx + qdy$, de maniere que z doive être une fonction de p & de q, déterminer la relation entre z, x & y.* On aura $dy = \frac{dz}{q} - \frac{pdx}{q}$. Soit supposée $p = qr$, afin

que z soit une fonction de q & de r, on aura $dy = \frac{dz}{q} - r\,dx$; donc $y = \frac{z}{q} - rx - S.\left(-\frac{z\,dq}{qq} - x\,dr\right) = \frac{z}{q} - rx + S.\left(\frac{z\,dq}{qq} + x\,dr\right)$.

Cherchons maintenant l'intégrale de $\frac{z\,dq}{qq}$, en supposant r constant (z est une fonction de q & de r), pour avoir $S.\frac{z\,dq}{qq} = V + f(r)$ & $dV = \frac{z\,dq}{qq} + R\,dr$. Mais la différentielle de $f(r)$, étant désignée par $dr\,f'(r)$, celle de $V + f(r)$ sera $= \frac{z\,dq}{qq} + (R + f'(r))\,dr$. Ainsi la formule $\left(\frac{z\,dq}{qq} + x\,dr\right)$ ne peut être intégrable qu'autant que $x = R + f'(r)$; donc $y = \frac{z}{q} - Rr - rf'(r) + V + f(r) = \frac{z}{q} - rx + V + f(r)$ à cause de $x = R + f'(r)$. Ainsi 1°. ayant supposé $p = qr$, on a z exprimé en q & r, 2°. regardant ensuite r comme constant, il vient $V = S.\frac{z\,dq}{qq}$, qui est aussi donnée en q & r, d'où, en prenant q pour constant, on tire $R = \left(\frac{dV}{dr}\right)$.

Supposons, par exemple, que l'on ait $z = apq$; à cause de $dz = p\,dx + q\,dy$, on aura $dz = \frac{z\,dx}{aq} + q\,dy$; & $dy = \frac{dz}{q} -$

$\frac{z\,dx}{aqq}$. Donc $y = \frac{z}{q} + S\left(\frac{z\,dq}{qq} - \frac{z\,dx}{aqq}\right) = \frac{z}{q} + S.\frac{z}{qq}\left(dq - \frac{dx}{a}\right)$. Ce qui fait comprendre que $\frac{z}{qq}$ doit être une fonction de $q - \frac{x}{a}$. Donc en faisant $\frac{z}{qq} = f'\left(q - \frac{x}{a}\right)$, on aura $y = \frac{z}{q} + f\left(q - \frac{x}{a}\right)$, & $z = qq.f'\left(q - \frac{x}{a}\right)$.

De la résolution des équations dans lesquelles on donne le rapport entre les quantités $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ *& deux des trois variables* x, y, z.

237. PROBLEME. *Si en supposant* $dz = p\,dx + q\,dy$, *on doit avoir* $px + qy = 0$, *trouver la relation entre* z, y *&* x. On aura $q = -\frac{px}{y}$, & $dz = p\,dx - \frac{px\,dy}{y} = px\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) = py\left(\frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{yy}\right) = py\,d.\frac{x}{y}$; donc py doit être une fonction de $\frac{x}{y}$; donc $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$, fonction de dimension nulle de x & y, & $py = f'\left(\frac{x}{y}\right)$.

Mais si on demandoit que $pu + qt$ fût $= a$, a étant une constante, u une fonction

de x, & t une fonction de y, on auroit $q = \frac{a}{t} - \frac{pu}{t}$, $dz = \frac{a\,dy}{t} + p\,dx - \frac{pu\,dy}{t} = \frac{a\,dy}{t} + pu\left(\frac{dx}{u} - \frac{dy}{t}\right)$. Donc on auroit $p.u = f'\left(S.\,\frac{dx}{u} - S.\,\frac{dy}{t}\right)$, & $z = a\,S.\,\frac{dy}{t} + f\left(S.\,\frac{dx}{u} - S.\,\frac{dy}{t}\right)$, où les formules $\frac{dx}{u}$, $\frac{dy}{t}$ sont des différentielles à une seule variable.

238. PROBLEME. *Supposant $dz = p\,dx + q\,dy$, & $q = pV + u$, V & u étant des fonctions quelconques de deux variables x & y, déterminer z.*

On aura $dz = p(dx + V\,dy) + u\,dy$. Supposons que le multiplicateur M rende intégrale la formule $dx + V\,dy$, & que l'on ait $M(dx + V\,dy) = dr$; M & r seront des fonctions de x & de y, & l'on aura $dz = \frac{p\,dr}{M} + u\,dy$. Mais parce que r est une fonction de x & de y, on peut déterminer x en y & r, & cette valeur de x étant substituée dans u & M, ces quantités deviendront des fonctions de y & de r. Regardant maintenant r comme une constante, nous aurons $S.u\,dy = T + f(r)$, & ayant supposé $dT = u\,dy + t\,dr$, & $dz = u\,dy + t\,dr + dr\,f'(r) = dT + f'(r)\,dr$, on aura $\frac{p}{M} = t + f'(r)$, & $z = T + f(r)$. Si l'on doit avoir $q = \frac{px}{y} + \frac{y}{x}$, on aura $V = \frac{x}{y}$, $u = \frac{y}{x}$; & à cause de $dx + V\,dy = dx + \frac{x\,dy}{y}$, le multiplicateur M sera

$= y$, & $dr = y\,dx + x\,dy$; donc $r = xy$, $x = \frac{r}{y}$, & $u = \frac{yy}{r}$. Maintenant on aura $T = S.u\,dy = \frac{y^3}{3r}$ en regardant r comme constant ; & $t = \frac{-y^3}{3r^2}$ (ce qu'on tire aisément de l'équation $dT = u\,dy + t\,dr$, en faisant y constant) ; donc $\frac{p}{y} = \frac{p}{M} = \frac{-y^3}{3rr} + f'(r)$; & $z = \frac{y^3}{3r} + f(xy) = \frac{y^2}{3x} + f(xy)$.

239. PROBLEME. *Supposant toujours $dy = p\,dx + q\,dy$, déterminer z, en supposant qu'il y a une telle relation entre p, q, x & y, qu'une fonction quelconque* P *de p & de x soit égale à une certaine fonction* Q *de q & de y.* Soit $P = t$, $Q = t$, par la premiere équation on pourra avoir p exprimé par une fonction de t & de x ; par la seconde on aura q en y & t. Cela posé, dans la formule $dz = p\,dx + q\,dy$, on doit intégrer $p\,dx$ en supposant t constant, pour avoir $S.\,p\,dx = R$. On doit de même intégrer $q\,dy$, en supposant t constant, pour avoir $S.\,q\,dy = r$. C'est pourquoi R sera une fonction de x & de t, & r une fonction de y & de t. Mais en faisant aussi varier t, on a $dR = p\,dx + V\,dt$, & $dr = q\,dy + u\,dt$; donc $dz = dR + dr - dt\,(V + u)$. Donc $V + u = f'(t)$, équation que nous désignerons par (A); ainsi $z = R + r - f(t)$. Puisque p, R, V, sont des fonctions de x & de t, q & r des fonctions de y & de t, l'équation A donnera la valeur de t en x & y, laquelle étant substituée dans la derniere équation qu'on vient de trouver, on aura z déterminée en x & y.

De la résolution des équations dans lesquelles on donne un rapport entre les deux formules $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, *& les trois variables* x, y *&* z.

240. PROBLEME. *Si ayant fait* $dz = p\,dx + q\,dy$ (A), *on doit avoir* $apx + bqy = mz$, *déterminer la fonction* z. Par la nature du problême on a $q = \frac{mz}{by} - \frac{apx}{by}$. Substituant cette valeur de q dans l'équation A & transposant, il vient $dz - \frac{mz\,dy}{by} = p\,dx - \frac{apx\,dy}{by}$. Cette équation étant divisée par $y^{\frac{m}{b}}$, donnera $d.\frac{z}{y^{\frac{m}{b}}} = \frac{p}{y^{\frac{m}{b}}}\left(dx - \frac{ax\,dy}{by}\right) = \frac{py^{a:b}}{y^{m:b}}.\,d.\frac{x}{y^{a:b}}$ (*). Maintenant si on suppose $py^{(a-m):b} = f'\left(\frac{x}{y^{a:b}}\right)$, nous aurons $z = y^{m:b} f\left(\frac{x}{y^{a:b}}\right)$. Mais en élevant à la puissance b, la fonction de $\frac{x}{y^{a:b}}$ se réduit à une fonction de $\frac{x^b}{y^a}$; donc on peut déterminer z en x & y, de maniere que $z = y^{m:b} \times F\left(\frac{x^b}{y^a}\right)$.

(*) L'expression $a:b$ a la même signification que $\frac{a}{b}$.

241. PROBLÈME. *Si, ayant supposé* $dz = pdx + qdy$, *on doit avoir* $q = pT + V$, T *étant une fonction de* x *&* *de* y, *&* V *une fonction de* y *&* z, *déterminer la fonction* z. Substituant dans l'équation $dz = pdx + qdy$ la valeur de q, & transposant, on aura $dz - Vdy = p(dx + Tdy)$. Mais parce que V est une fonction de y & de z, il y aura un multiplicateur M qui rendra le premier membre intégrable; & parce que T est une fonction de x & de y, il y aura aussi un multiplicateur m qui rendra $dx + Tdy$ intégrable. Soit donc $M(dz - Vdy) = dr$, $m(dx + Tdy) = dR$, notre équation deviendra $\frac{dr}{M} = \frac{pdR}{m}$, ou $dr = \frac{MpdR}{m}$. Pour que le second nombre soit intégrable, il faut que $\frac{Mp}{m}$ soit une fonction de R que nous ferons $= f'(R)$, pour avoir $r = f(R)$, équation qui contient le rapport cherché entre z, x & y.

COROLLAIRE. Ce problême renferme, comme un cas particulier, celui dans lequel on demanderoit que zz fût $= pxx + qyy$, ou $q = \frac{zz}{yy} - \frac{pxx}{yy}$, & une infinité d'autres. Cependant il paroît d'abord qu'on ne peut absolument pas résoudre cette forme: $z = py + qx$, ou $q = \frac{z - py}{x}$, ce qui donne $dz - \frac{zdy}{x} = p\left(dx - \frac{ydy}{x}\right)$. La cause de la difficulté vient de ce

que la formule $dz - \frac{z\,dy}{x}$ ne peut être rendue intégrable par aucun multiplicateur, ou de ce que l'équation $dz - \frac{z\,dy}{x} = 0$, est impossible, parce que x est variable comme z & y. Cependant en faisant $z = n(x + y)$, & $p = q = n$, on aura $z = px + qy$, ce qui fournit une solution particuliere; mais nous donnerons bientôt la solution générale.

242. PROBLEME. *Supposant* $dz = p\,dx + q\,dy$ (A), *si l'on a l'équation* $p = q\,T + V$, T *étant une fonction de x & de y*, V *une fonction de x & de z, déterminer z.* Substituant la valeur de p dans l'équation A & transposant, il vient $dz - V\,dx = q\,(dy + T\,dx)$. Donc M & m étant des multiplicateurs qui puissent rendre intégrables les formules qu'ils multiplient, on aura $M\,(dz - V\,dx) = dr$, & $m\,(dy + T\,dx) = dR$; donc $\frac{dr}{M} = \frac{q\,dR}{m}$, ou $dr = \frac{M\,q\,dR}{m}$, d'où l'on tire aisément cette solution $\frac{Mq}{m} = f'(R)$, & $r = f(R)$.

243. PROBLEME. *Si ayant* $dz = p\,dx + q\,dy$, *on doit avoir* $z = Np + nq$, N & n *étant des fonctions de deux variables x & y, déterminer la valeur générale de z par une solution particuliere qui donne* $z = V$, V *étant une fonction de x & de y.* Soit $dV = P\,dx + Q\,dy$, cette valeur de V étant substituée au lieu de z, satisfait à l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$, lorsque $P = p$ & $Q = q$; ainsi (dans ce cas) $V = NP + nQ$.

Supposons que la valeur générale de z soit $z = Vu$, & que $du = r\,dx + t\,dy$, On aura $p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = Pu + Vr$, & $q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = Qu + Vt$ (*); donc $z = Np + nq = (NP + nQ)u + V \times (Nr + nt) = Vu$. Mais $V = NP + nQ$; donc $Nr + nt = 0$, & $t = \frac{-Nr}{n}$. Donc $du = r\left(dx - \frac{N\,dy}{n}\right) = \frac{r}{n}(n\,dx - N\,dy)$. Supposons maintenant que par le moyen d'un multiplicateur convenable M, on ait $M(n\,dx - N\,dy) = dT$, on aura $du = \frac{r}{n.M} . dT$; donc $\frac{r}{n.M} = f'(T)$, $u = f(T)$, & $z = Vf(T)$.

Etant donc proposée l'équation $z = Np + nq$, de maniere que $dz = p\,dx + q\,dy$, on peut considérer tout de suite l'équation $M(n\,dx - N\,dy) = dT$, qui doit faire trouver le multiplicateur M & l'intégrale T, & cette opération ne dépend pas de la valeur particuliere V de z. Ayant trouvé T, si on connoît la valeur particuculiere de V, de quelle maniere que ce soit, la solution générale sera $z = V . f(T)$. Mais on doit bien remarquer que cette solution suppose que la condition prescrite est de cette forme $z = Np + nq$.

(*) En différenciant $z = Vu$, on fait seulement varier x, lorsqu'il s'agit de la valeur de p; mais on ne fait varier que y lorsqu'il est question de la valeur de q.

Suppoſons que dz étant $= pdx + qdy$, l'on ait $z = py + qx$, c'eſt-à-dire, que l'on ait $N = x^0 y = y$ & $n = x$. L'équation $z = y + x$ donne une ſolution particuliere, & l'on a l'équation $M(xdx - ydy) = dT$, dans laquelle le multiplicateur M eſt conſtant. Ainſi en le ſuppoſant $= 2$, on aura $T = f(xx - yy)$; & l'on aura $z = (x + y). f(xx - yy)$, équation qui contient la ſolution générale que nous avons annoncée dans l'avant-dernier problême.

De la réſolution des équations du premier degré à trois variables, étant donnée une certaine relation entre leurs différentielles (*).

244. PROBLEME. *Suppoſant que u eſt une fonction des trois variables x, y, z, telle que du étant* $= pdx + qdy + rdz$ (A), *l'on ait* $ap + bq + cr = 0$ (B), *déterminer u.* Subſtituant dans l'équation A la valeur de r priſe de l'équation B, on trouvera aiſément $cdu = p(cdx - adz) + q(cdy - bdz) = pdt + qdT$, en faiſant $cx - az = t$, & $cy - bz = T$. Donc u eſt une fonction des variables t & T, c'eſt à-dire, $u = f(t \,\&\, T) = f(\overline{cx - az} \,\&\, \overline{cy - bz})$. Ce qui donne la ſolution du problême, lorſqu'on demande que $a\left(\frac{du}{dx}\right) + b\left(\frac{du}{dy}\right) + c\left(\frac{du}{dz}\right) = 0$.

(*) Sous le nom d'équations différentielles nous comprenons toutes les équations dans leſquelles il entre des differentielles, ſoit que tous les termes ſe trouvent d'un ſeul côté du ſigne = ou non.

245. PROBLEME. *u étant une fonction de x, y & z, telle que $du = pdx + qdy + rdz$ (A), déterminer u lorsque $apx + bqy + crz = nu$ (B).* Si l'on substitue dans l'équation A la valeur de r prise de l'équation (B), on trouvera facilement l'équation $du - \frac{nudz}{cz} = p\left(dx - \frac{axdz}{cz}\right) + q\left(dy - \frac{bydz}{cz}\right)$; donc $\frac{cdu}{u} - \frac{ndz}{z} = \frac{px}{u} \times \left(\frac{cdx}{x} - \frac{adz}{z}\right) + \frac{qy}{u}\left(\frac{cdy}{y} - \frac{bdz}{z}\right)$, d'où l'on peut conclure que l'intégrale du premier membre $c\text{L}.u - n\text{L}.z$ est égale à une fonction quelconque des quantités $c\text{L}.x - a\text{L}.z$, $c\text{L}.y - b\text{L}.z$, ou en passant des logarithmes aux nombres, que $\frac{u^c}{z^n} = f\left(\frac{x^c}{z^a} \;\&\; \frac{y^c}{z^b}\right)$; si $a = b = c = 1$, on aura $u = z^n . f\left(\frac{x}{z} \;\&\; \frac{y}{z}\right)$.

246. PROBLEME. *Si $du = pdx + qdy + rdz$ (A) & que $px + qy + rz$ soit $= nu + t$ (B), t étant une fonction donnée de x, y, z, déterminer u.* En substituant dans l'équation A la valeur de r prise de l'équation B, on trouvera aisément $du - \frac{nudz}{z} = \frac{tdz}{z} + p\left(dx - \frac{xdz}{z}\right) + q\left(dy - \frac{ydz}{z}\right)$. Donc en multipliant par $\frac{1}{z^n}$, on aura $d.\frac{u}{z^n} = \frac{tdz}{z^{n+1}} + \frac{p}{z^{n-1}} . d.\frac{x}{z} + \frac{q}{z^{n-1}} . d.\frac{y}{z}$. Supposons maintenant $x = \text{T}z$ & $y = \text{R}z$, afin

afin que t devienne une fonction de trois variables T, R, z; & intégrant la formule $\frac{t\,dz}{z^{n+1}}$ en regardant T & R comme constans, supposons cette intégrale $=$ V, il est visible qu'on aura $\frac{u}{z^n} = V + f\left(\frac{x}{z} \,\&\, \frac{y}{z}\right)$, & $u = Vz^n + z^n . f\left(\frac{x}{z} \,\&\, \frac{y}{z}\right)$.

Le principe de la solution du problème est fondé sur ce théorème : *si* $dV = r\,dz' + p\,dx' + q\,dy'$, *r désignant une fonction donnée, p & q des fonctions indéfinies, l'on doit avoir* $V = S.r\,dz' + f(x' \,\&\, y')$. Mais il ne suffit pas de remarquer que dans l'intégration de la formule $r\,dz'$, on doit regarder z' seule comme variable; il faut encore avoir attention de traiter x' & y' comme constans. De maniere que si r est une fonction de x, y & z, d'où l'on ait formé x', y', z', il faudra 1°. introduire x', y', z', & chasser x, y, z, afin que r devienne une fonction de x', y', z'; 2°. on doit prendre l'intégrale $S.r\,dz'$ en regardant z' seule comme variable, & x' & y' comme constans. Dans le cas du problême, on doit intégrer $\frac{t\,dz}{z^{n+1}}$ en regardant z seule comme variable, & traiter les quantités $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ comme constantes; de sorte qu'en faisant $P = \frac{x}{z}$ & $Q = \frac{y}{z}$, afin que r devienne une fonction de z, P & Q, on doit traiter P & Q comme constans.

247. PROBLEME. *Déterminer la fonction, u lorsque*

que $du = pdx + qdy + rdz$ (A), & $pm + qM + rn = 0$ (B), *m étant une fonction de x*, M *une fonction de y*, & *r une fonction de z*. Ayant substitué dans l'équation A, la valeur de r prise de l'équation B, on aura $du = p\left(dx - \frac{mdz}{n}\right) + q\left(dy - \frac{Mdz}{n}\right)$, ou $du = pm\left(\frac{dx}{m} - \frac{dz}{n}\right) + qM\left(\frac{dy}{M} - \frac{dz}{n}\right)$. Supposons $t = S.\frac{dx}{m} - S.\frac{dz}{n}$, & $T = S.\frac{dy}{M} - S.\frac{dz}{n}$, pour avoir $du = pmdt + qMdT$; il est aisé de voir que u sera une fonction des deux variables t & T; donc $u = f(t$ & T).

248. PROBLEME. *Ayant supposé* $du = pdx + qdy + rdz$, & $pqr = 1$, *déterminer u*. On aura $r = \frac{1}{pq}$, & $du = pdx + qdy + \frac{dz}{pq}$; donc $u = px + qy + \frac{z}{pq} - S.\left(xdp + ydq - \frac{zdp}{ppq} - \frac{zdq}{pqq}\right)$. Puisque cette formule intégrale ne renferme que deux différentielles dq, dp, il est visible qu'elle doit être une fonction de p & de q. Supposons cette intégrale $= t$, nous aurons $u = px + qy + \frac{z}{pq} - t$, & $dt = \left(x - \frac{z}{ppq}\right)dp + \left(y - \frac{z}{pqq}\right)dq$; donc $\left(\frac{dt}{dp}\right) = x - \frac{z}{ppq}$, $\left(\frac{dt}{dq}\right) = y - \frac{z}{pqq}$, équations qui feront connoître p & q, & ces valeurs étant substituées dans

celle de u, on aura u exprimée en x, y & z. Si t est une constante $= a$, on aura $dt = 0$, $x - \frac{z}{ppq} = 0$, ou $ppq = \frac{z}{x}$. On aura aussi $pqq = \frac{z}{y}$, $p^3q^3 = \frac{zz}{xy}$, $pq = \sqrt[3]{\frac{zz}{xy}}$, $p = \sqrt[3]{\frac{yz}{xx}}$, $q = \sqrt[3]{\frac{xz}{yy}}$, & $u = 3\sqrt[3]{xyz} - a$.

249. PROBLEME. *du étant supposée $= pdx + qdy + rdz$, $pqr = \frac{u^3}{xyz}$, on demande la valeur de u.* Supposons $p = \frac{Pu}{x}$, $q = \frac{Qu}{y}$, $r = \frac{Ru}{z}$, nous aurons $\frac{PQRu^3}{xyz} = pqr = \frac{u^3}{xyz}$. Donc $PQR = 1$; $du = \frac{Pudx}{x} + \frac{Qudy}{y} + \frac{Rdz}{z}$. $\frac{du}{u} = \frac{Pdx}{x} + \frac{Qdy}{y} + \frac{Rdz}{z}$. Supposant maintenant L.$u = V$, L.$x = x'$, L.$y = y'$, L.$z = z'$, on aura $dV = Pdx' + Qdy' + Rdz'$, équation dans laquelle $PQR = 1$, & qui contient la question que nous avons traitée dans le problême précédent.

Recherche des fonctions de deux variables par la relation des formules différentielles du second degré.

250. Avant de passer plus loin, nous observerons que comme $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ marque la différentielle de z, prise en faisant varier x & divisée par dx, de

même $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ indique la différentielle de $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ prise en faisant varier x & divisée par dx. En général $\left(\frac{d^m z}{dx^m}\right)$ marque la différentielle de l'ordre m de la fonction z différenciée un nombre de fois en faisant varier chaque fois x & divisant par dx. L'expression $\left(\frac{ddz}{dydx}\right) = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$ indique qu'on a pris d'abord la différentielle de z, en faisant varier x & divisant par dx, & qu'on a pris ensuite la différentielle du résultat en faisant varier y, & divisant par dy, ou réciproquement. Il est facile de comprendre ce que signifient les expressions $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{d^3 z}{dxdy^2}\right)$, &c.

Comme une fonction z de deux variables x & y a deux formules différentielles $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ du premier degré, la même fonction a trois différentielles du second degré, $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$ ou $\left(\frac{ddz}{dydx}\right)$; car ces deux dernieres formules sont égales.

La même fonction z a quatre formules différentielles du troisieme degré, savoir, $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$, $\left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right)$, $\left(\frac{d^3 z}{dxdy^2}\right)$, $\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)$; elle en a cinq du quatrieme degré, six du cinquieme degré, &c.

251. PROBLEME. *Supposant que z doive être une fonction de x & de y, telle que* $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = t$, *$t$ étant une fonction donnée de x & de y, déterminer z.*

Considérant y comme constant, on a $d\left(\frac{dz}{dx}\right) = dx\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = t\,dx$, par la nature du problême; donc $\left(\frac{dz}{dx}\right) = S\,t\,dx + C$. Mais il est visible que C peut exprimer une fonction quelconque $f(y)$ de y; donc $\left(\frac{dz}{dx}\right) = S.\,t\,dz + f(y)$. En considérant encore y comme constant, nous aurons $dz = dx\,S.\,t\,dx + dx\,f(y)$, où $S.\,t\,dx$ doit être prise en regardant y comme constant. Si l'on intègre dans la même supposition, & qu'on désigne par $F(y)$ une nouvelle fonction de y qu'on doit ajouter, on aura $z = S\,dx\,S.\,t\,dx + x\,f(y) + F(y)$, ce qui donne l'intégrale complette de l'équation $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = t$, parce que cette intégrale contient deux fonctions arbitraires de y.

Si l'on demandoit que $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ fût $= 0$, on auroit $d\left(\frac{dz}{dx}\right) = dx\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = 0$; & $\left(\frac{dz}{dx}\right) = f(y)$, $dz = dx\,f(y)$, & $z = x\,f(y) + F(y)$, ou en changeant f en F, ce qui est très-permis, $z = x\,F(y) + f(y) = f(y) + x\,F(y)$.

On auroit pu conclure la même chose par la formule précédente, en supposant $t = 0$.

Si on différencie la formule $z = S.dx\, S.tdx + xf(y) + F(y)$, en regardant y comme constant, on aura d'abord $\left(\frac{dz}{dx}\right) = S.tdx + f(y)$, & ensuite $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = t$.

Il est aisé de voir que si l'on doit avoir $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = T$, T étant une fonction de x & de y, l'intégrale complette sera $z = S\,dy\,ST\,dy + y\,f(x) + F(x)$, ou dans la double intégrale $S.dy\,S.T\,dy$, x est considéré comme constant.

A l'égard des fonctions ajoutées, on les détermine dans les cas particuliers par la nature du problême. Si $t = \frac{xy}{a}$, on aura $S.tdx = \frac{xxy}{2a}$; & $S.dx\,S.tdx = \frac{x^3y}{3.2.a} = \frac{x^3y}{6a}$. Ainsi par une premiere intégration on a $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{xxy}{2a} + f(y)$. Donc en supposant $x = a$, on pourra égaler $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ à une certaine fonction, par exemple, à l'ordonnée d'une courbe dont l'abscisse seroit $= y$, ce qui fera connoître $f(y)$; & ayant fait la seconde intégration, on aura $z = \frac{x^3y}{3.2.a} + xf(y) + F(y)$, valeur qu'on peut, dans la même supposition de $x = a$,

égaler à une fonction de y, ce qui fera connoître $F(y)$ dans ce cas particulier.

252. PROBLEME. *Si z doit être une fonction de x & de y, telle que* $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = T\left(\frac{dz}{dx}\right) + t$, *$T$ & t étant des fonctions quelconques de x & de y, déterminer z.* Soit $\left(\frac{dz}{dx}\right) = u$, on aura $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right) = Tu + t$. Regardant maintenant x seule comme variable, il vient $du = Tudx + tdx$, équation, qui en multipliant par e^{-STdx} (e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$), transposant & intégrant, donne $e^{-STdx}u = Se^{-STdx}tdx + f(y)$. Donc $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{S.Tdx} \times S.e^{-S.Tdx}tdx + e^{STdx}f(y)$. Maintenant en regardant x seul comme variable, on a $dz = dx\left(\frac{dz}{dx}\right)$, & $z = S.e^{STdx}dx\,S.e^{-STdx}.tdx + f(y).S.e^{STdx}dx + F(y)$, équation qui donne l'intégrale complette de la proposée.

On doit chercher 1°. l'intégrale $S.Tdx$ que nous ferons $= L.m$, pour avoir $e^{STdx} = m$ (*).

(*) Soit $STdx = p = L.m$, donc $pL.e = L.m$, parce que $L.e = 1$; donc $e^p = e^{STdx} = m$.

On doit ensuite chercher $S. e^{STdx} dx = S. mdx$, que nous ferons $= M$, reste l'intégrale $S. mdx$. $S. \frac{tdx}{m} = S. dM\, S. \frac{tdx}{m}$ qui devient $= M\, S \frac{tdx}{m} - S. \frac{Mtdx}{m}$, de maniere qu'il faut encore intégrer ces deux formules.

COROLLAIRE. Si on supposoit que $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$ est $= T \left(\frac{dz}{dx}\right) + t$, T & t étant des fonctions données de x & de y, on auroit $z = S. e^{STdy}. dy\, e^{-STdy}\, tdy + f(x)\, S. e^{STdy} dy + F(x)$.

Pour faire l'application du problême à un exemple, supposons qu'on demande la fonction z de x & de y, lorsque $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \frac{n}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{a}{xy}$. Supposant $u = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, & considérant y comme constant, on a $du = \frac{nudx}{x} + \frac{adx}{xy}$, ou en transposant & divisant par x^n, $\frac{du}{x^n} - \frac{nudx}{x^{n+1}} = \frac{a}{y}. \frac{dx}{x^{n+1}}$; donc $\frac{u}{x^n} = \frac{a}{y}. S. \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{-a}{nyx^n} + f(y)$, ou $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-a}{ny} + x^n f(y)$. Considérant encore y comme constant, il vient

$dz = \frac{-a\,dx}{ny} + f(y)\,x^n\,dx$, d'où l'on tire

$z = \frac{-ax}{ny} + \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} f(y) + F(y)$.

Si on suppose $a = 0$, on aura $z = \cdot \frac{1}{n+1} \cdot f(y) \times x^{n+1} + F(y)$.

253. PROBLEME. *z étant une fonction de x & de y, telle que* $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = T \left(\frac{dz}{dx}\right) + t$, *T & t étant des fonctions données de x, y & z, déterminer la fonction z.* Ayant supposé y constant, on a $ddz = T\,dx\,dz + t\,dx^2$, équation du second degré qui est censée ne renfermer que deux variables x & z, parce que nous regardons y comme constant. On essayera donc d'intégrer cette équation par les méthodes précédentes; & si l'intégration a lieu, au lieu des deux constantes arbitraires qu'on devroit ajouter, on écrira $f(y)$ & $F(y)$, & l'on aura l'intégrale complette de la proposée.

254. PROBLEME. *Supposant que z soit une fonction de x & de y, telle que T étant une fonction donnée de x & y, l'on ait* $\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) = T$, *déterminer z.* Soit $\left(\frac{dz}{dx}\right) = u$, on aura $\frac{ddz}{dy\,dx} = \left(\frac{du}{dy}\right) = T$; & en supposant x constant, il viendra $du = T\,dy$, & $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) = S.\,T\,dy$

$+ f'(x)$. Considérons maintenant y comme constant, nous aurons $dz = dx$ S. Tdy + $dxf'(x)$, & $z =$ S. dx S. T$dy + f(x) +$ F(y). Les fonctions $f(x)$, F(y), marquent que l'intégrale est complette.

COROLLAIRE I. Si on eût renversé l'ordre en supposant d'abord y & ensuite x constant & $\left(\frac{dz}{dy}\right) = u$, on auroit trouvé $\left(\frac{dz}{dy}\right) =$ S. T$dx + f'(y)$, & $z =$ S. dy S. T$dx + f(y) +$ F(x), équation qui satisfait aussi au problême.

COROLLAIRE II. De-là il suit que S. dy S. Tdx, = S. dx S. Tdy, ou du moins que la différence de ces quantités est exprimée par un assemblage d'une fonction de x & d'une fonction de y. Si l'on suppose que S. dx S. Tdy soit = S. dy. S. Tdx = V, on trouvera pour l'une & l'autre formule $T = \left(\frac{ddV}{dxdy}\right)$.

COROLLAIRE III. Si $T = 0$, on aura $z = f(x) +$ F(y) : on aura aussi $z = f(y)$ + F(x).

Pour faire l'application de ce problême, soit $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) = T = \sqrt{(aa - yy)}$; donc S. T$dx$ = = $x\sqrt{(aa - yy)}$ où nous commençons par la supposition de x variable; donc S. dy S. T$dx = x$ S. $dy \sqrt{(aa - yy)} = \frac{1}{2}$. $xy\sqrt{(aa - yy)} + \frac{1}{2} aax$ S. $\frac{dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$;

donc l'intégrale complette sera $z = \frac{xy}{2} \cdot \sqrt{(aa - yy)}$ $+ \frac{1}{2} aax$ A. sin. $\frac{y}{a} + f(x) + F(y)$ (*).

255. PROBLEME. *Supposant que* z *est une fonction de* x *& de* y *telle que l'on ait* $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) = T\left(\frac{dz}{dx}\right) + t$, T *& t étant des fonctions de* x *& de* y, *déterminer* z. Soit $\left(\frac{dz}{dx}\right) = u$, si dans cette équation, on suppose x constant, on aura $du = Tudy + tdy$; donc en transposant & multipliant par e^{-STdy}, on aura $e^{-STdy} du - Tue^{-STdy} dy = e^{-STdy} tdy$. Donc $e^{-STdy} u =$ S. $e^{-STdy} tdy + f'(x)$; donc $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{STdy}$ S. $e^{-STdy} tdy + e^{STdy} f'(x)$. Regardant maintenant y comme constant, multipliant par dx & intégrant, il vient $z =$

(*) A désigne un angle, ou si l'on veut un arc de cercle dont le rayon $= 1$, le sinus $= \frac{y}{a}$, & par conséquent le co-sinus $= \sqrt{\left(1 - \frac{yy}{aa}\right)} = \frac{\sqrt{(aa - yy)}}{a}$. Or l'on a toujours le co-sinus est au rayon comme la différentielle du sinus est à celle de l'arc, qui sera ici $= \frac{dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$.

$S.e^{STdy}dx.\ S.e^{-STdy}tdy + S.e^{STdy}dx.f'(x)$
$+ F(y)$.

COROLLAIRE. On cherchera d'abord $S.Tdy$, que nous ferons $=L.m$; on cherchera ensuite, $S.\frac{tdy}{m}$ que nous supposerons $=M$; enfin on cherchera $S.m.Mdx$ que nous ferons $=N$: mais dans les deux premieres intégrations on supposera x constant. Dans la troisieme au contraire on supposera y constant & x variable; ce qui étant fait, on aura $z = N + S.mdxf'(x) + F(y)$, intégrale complette cherchée.

Si l'on regarde $f'(x)$ comme l'ordonnée d'une courbe dont l'abscisse $=x$, l'on pourra facilement construire l'intégrale $S.mdxf'(x)$ pour chaque valeur de y; car on regarde, dans cette intégrale, y comme constant.

REMARQUE. En changeant x en y & y en x, l'on résoudra de même le problême, si on demande que $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) = T\left(\frac{dz}{dy}\right) + t$, T & t étant toujours des fonctions de x & de y, & l'on aura $z = S.e^{STdx}dy.\ S.e^{-STdx}tdx +$
$S.e^{STdx}dyf'(y) + F(x)$.

256. POUR faire l'application de ce problême, supposons que z, étant une fonction de x & de y, l'on ait $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) = \frac{n}{y}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{h}{x}$; en faisant $\left(\frac{dz}{dx}\right) = u$, il vient $\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{nu}{y} + \frac{h}{x}$.

Et en considérant x comme constant, on a $du = \frac{nudy}{y} + \frac{hdy}{x}$. Transposant le premier terme du second membre de l'équation, divisant par y^n & intégrant, il vient $\frac{u}{y^n} = \frac{h}{x}$. S. $\frac{dy}{y^n} = \frac{-h}{(n-1)xy^{n-1}} + f'(x)$; donc $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-hy}{(n-1).x} + y^n f'(x)$. Donc, supposant y constant, multipliant par dx & intégrant, $z = \frac{-hy}{n-1}$. L. $x + y^n f(x) + F(y)$.

257. PROBLEME. *Supposant que z est une fonction de y & de x, telle que $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) = bz$, déterminer z du moins d'une maniere particuliere.* Soit $z = e^{ax}m$, m étant une fonction de y sans x ni z. Si l'on considere y comme constant, on aura $dz = e^{ax} m. d$ L. e^{ax} (*voyez dans la premiere section comment on doit différencier les quantités exponentielles*) $= adx\, e^{ax} m$; donc $\left(\frac{dz}{dx}\right) = ae^{ax}m$, & $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) = ae^{ax}\frac{dm}{dy} = bz$ (par supposition) $= be^{ax}m$, en substituant la valeur de z; donc $a. \frac{dm}{dy} = bm$, & $a. \frac{dm}{m} = bdy$. Donc $a.$ L. $m = by$, L. $m = \frac{by}{a}$ L. e, $m = e^{\frac{by}{a}}$, & enfin $z = e^{ax} e^{\frac{by}{a}} = e^{ax + \frac{by}{a}}$.

Mais en multipliant par une conſtante A, on aura auſſi une équation $z = A e^{ax + \frac{by}{a}}$, qui donnera une ſolution particuliere : cette ſolution eſt très-étendue, puiſque A & a ſont des conſtantes arbitraires. De plus, pluſieurs valeurs de z, qui ſatisfont en particulier, ſatisferont auſſi étant jointes enſemble ; de ſorte qu'on aura $z = A e^{ax + \frac{by}{a}} + B e^{b'x + \frac{by}{b'}} + C e^{cx + \frac{by}{c}} +$ &c. dans laquelle A, B, &c. a, b, b', c, &c. ſont des conſtantes arbitraires. Si l'on fait $m = a$, $mn = b$, l'on aura une valeur particuliere $z = A e^{mx + ny}$; mais cette ſolution eſt bien inférieure à celles qui renferment deux fonctions arbitraires comme celle du problême précédent.

258. PROBLEME. *z étant ſuppoſée une fonction de x & de y, telle que* $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, *déterminer z.* Soit $t = a'x + by$, $r = cx + gy$, z ſera une fonction de t & de r; & en regardant y comme conſtant, nous aurons $dt = a'dx$, & $dx = \frac{dt}{a'}$; nous aurons encore $dr = cdx$, ou $dx = \frac{dr}{c}$. Mais en regardant y comme variable, on aura $dy = \frac{dt}{b}$ & $dy = \frac{dr}{g}$. Cela poſé, il eſt viſible que ſi l'on veut chaſſer dx, on doit différencier deux fois z, en faiſant ſucceſſivement varier t & r pour la

ſeule variable x, & deux fois auſſi ſi l'on fait varier y; de ſorte que l'on aura $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a' \left(\frac{dz}{dt}\right) + c \left(\frac{dz}{dr}\right)$ (*), & $\left(\frac{dz}{dy}\right) = b \left(\frac{dz}{dt}\right) + g \left(\frac{dz}{dr}\right)$. L'on aura auſſi $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \grave{a}\grave{a} \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + 2\grave{a}c \times \left(\frac{ddz}{dtdr}\right) + cc \left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$ (**) : on aura encore $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$

(*) Si l'on avoit $x = t$ & $r = x + y$, l'on auroit $dx = dt$; mais cependant l'on n'auroit pas $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right)$. La raiſon en eſt que dans la formule $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ y eſt regardé comme conſtant; au lieu que $r = x + y$, eſt ſuppoſé conſtant dans l'autre formule, ce qu'il eſt bon de remarquer, afin de ne pas conclure de $x = t$ que $\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)$.

(**) Pour concevoir cela très-clairement, on doit faire attention que ſi z eſt une fonction de x & de y, on ne peut avoir ſa différentielle qu'en faiſant varier ſucceſſivement x & y; de maniere que $dz = dx \left(\frac{dz}{dx}\right) + dy \times \left(\frac{dz}{dy}\right)$; mais ſi x & y ſont donnés en t & r, on aura $dx = dt \left(\frac{dx}{dt}\right) + dr \left(\frac{dx}{dr}\right)$, & $dy = dt \left(\frac{dy}{dt}\right) + dr \left(\frac{dy}{dr}\right)$. Donc en ſubſtituant ces valeurs, on trouvera

$= ab\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + (ag + bc)\left(\frac{ddz}{dt\,dr}\right) + cg \times$ $\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$, & enfin l'on a $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = bb\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) +$

$dz = dt\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + dr\left(\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) +$ $dt\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + dr\left(\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)$. Maintenant si l'on suppose que l'un de deux t ou r seulement soit variable, on aura $\frac{dz}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) \times$ $\left(\frac{dz}{dy}\right)$; $\frac{dz}{dr} = \frac{dx}{dr}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{dy}{dr}\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

Puisque z étant une fonction de x & de y, t & r étant aussi des fonctions de x & de y, on peut supposer $z = z$, de maniere que dans le premier membre de cette équation z soit une fonction de x & de y, & que dans le second membre z soit une fonction de t & de r. Donc en différenciant en faisant varier successivement x & y dans le premier membre, t & r dans le second, on aura $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dt}{dx}\right) \times$ $\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right)$; $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)$ $+ \left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right)$. On aura aussi $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddt}{dx^2}\right) \times$ $\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{ddr}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right) + \left(\frac{dt}{dx}\right)^2\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ $+ 2\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{ddz}{dt\,dr}\right) + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$; $\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{ddt}{dx\,dy}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{ddr}{dx\,dy}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right)$ $+$

$2bg\left(\frac{ddz}{dt\,dr}\right)+gg\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$; donc notre équation deviendra $(bb-a'a'.aa)\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)+2\times$

$$+\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)+\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{ddz}{dt\,dr}\right)+\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{ddz}{dt\,dr}\right)+\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{ddz}{dr^2}\right);$$

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=\left(\frac{ddt}{dy^2}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)+\left(\frac{ddr}{dy^2}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right)+\left(\frac{dt}{dy}\right)^2\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)+2\left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{ddz}{dt\,dr}\right)+\left(\frac{dr}{dy}\right)^2\left(\frac{ddz}{dr^2}\right).$$

Si l'on veut savoir quelle des quantités x ou y l'on a regardé comme variable dans les termes du second membre de ces équations affectés de ddz, on n'a qu'à faire attention au coefficient de ces termes : ainsi dans le dernier terme de la derniere équation le coefficient $\left(\frac{dr}{dy}\right)^2$ fait connoître qu'on a différencié z deux fois, en faisant varier r, & regardant x comme constant dans la fonction r. Le coefficient de l'avant-dernier terme de la même équation indique qu'on a différencié z, en faisant varier successivement t & r, ou r & t, & regardant y comme variable & x comme constant. Le dernier terme de l'avant-derniere équation indique qu'on a differencié z deux fois, en faisant varier r, & regardant dans r, y comme constant & x comme variable, & ensuite x comme constant & y comme variable, ou réciproquement.

Si l'on suppose $t=ax+by$, & $r=cx+gy$, on aura $\left(\frac{dt}{dx}\right)=a$; $\left(\frac{dt}{dy}\right)=b$; $\left(\frac{dr}{dx}\right)=c$; $\left(\frac{dr}{dy}\right)=g$; donc il viendra $\left(\frac{dz}{dx}\right)=a\left(\frac{dz}{dt}\right)+c\left(\frac{dz}{dr}\right)$; $\left(\frac{dz}{dy}\right)$

$(bg - a'c.aa)\left(\frac{ddz}{dtdr}\right) + (gg - cc.aa) \times \left(\frac{ddz}{dr^2}\right) = 0$. Supposons $a' = c = 1$, $b = a$ & $g = -a$; alors la premiere & la derniere formule s'évanouiront, ce qui arrivera en faisant $t = x + ay$ & $r = x - ay$, & l'on aura $-2(2aa)\left(\frac{ddz}{dtdr}\right) = 0$, ou $\left(\frac{ddz}{dtdr}\right) = 0$, d'où, par ce qu'on a dit ci-dessus (254), on tire $z = f(t) + F(r)$, ou en substituant les valeurs de t & de r, $z = f(x + ay) + F(x - ay)$, formule qui satisfait; car $\left(\frac{dz}{dx}\right) = f'(x + ay) + F'(x - ay)$; $\left(\frac{dz}{dy}\right) = af'(x + ay) -$

$= b\left(\frac{dz}{dt}\right) + g\left(\frac{dz}{dr}\right)$; & pour les formules du second degré, $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + 2ac\left(\frac{ddz}{dtdr}\right) + cc\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$; $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) = ab\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + (ag + bc)\left(\frac{ddz}{dtdr}\right) + cg\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$; $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = bb\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + 2bg\left(\frac{ddr}{dtdr}\right) + gg\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$. En général on aura $\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right) = A\left(\frac{d^{m+n}z}{dt^{m+n}}\right) + B\left(\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n-1}dr}\right) + C\left(\frac{d^{m+n}z}{dt^{m+n-2}dr^2}\right)$ + &c. & les coefficients A, B, C, &c. seront les mêmes que ceux qui viennent de l'évolution de la forme $(a + cp)^m (b + gp)^n$, en disposant les termes selon les puissances de p, & faisant attention que le premier terme contient $p^0 = 1$; si dy ne se trouve pas dans la formule, on aura $n = 0$.

$a F'(x - ay)$; $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = f''(x + ay) + F''(x - ay)$; $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = aaf''(x + ay) + aaF''(x - ay)$ (*).

On peut prendre pour les fonctions de $x + ay$ & $x - ay$, dont la somme doit donner la valeur de z des fonctions même discontinues. Si dans deux courbes quelconques, tracées même par un mouvement irrégulier de la main, on prend sur une abscisse $x + ay$ & $x - ay$ sur l'autre abscisse, la somme des ordonnées correspondantes donnera toujours une fonction de z qui résoudra le problême (**).

La solution du problême des cordes vibrantes ayant conduit à l'équation que nous ve-

(*) On doit faire attention que si V est une fonction de x, exprimée par $f(x)$, l'on aura $\left(\frac{dV}{dx}\right) = f'(x)$, $\left(\frac{ddV}{dx^2}\right) = f''(x)$, $\left(\frac{dddV}{dx^3}\right) = f'''(x)$, $\left(\frac{d^4V}{dx^4}\right) = f^{IV}(x)$, &c. Il est maintenant aisé de comprendre la signification de f', f'', F', F''.

(**) On peut aussi s'y prendre de cette maniere. Soit $\left(\frac{dz}{dy}\right) = n\left(\frac{dz}{dx}\right)$; donc $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) = n\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$; $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = n\left(\frac{ddz}{dydx}\right)$; mais parce que $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) = n\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, l'on a $n\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$, ou $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) =$

nons de résoudre, le célèbre M. d'Alembert, qui le premier a entrepris avec succès la solution de ce problême, parvint par une méthode singuliere, à l'intégration de cette équation.

REMARQUE. Si l'on avoit l'équation $\left(\frac{dd.z}{dy^2}\right) + aa\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = 0$; dans ce cas aa auroit le signe — & les coefficients $bb - a'a'.aa$, $gg - cc.aa$ deviendroient $bb + aa$, $gg + aa$, en supposant, comme on l'a fait, que $a' = c = 1$, & en supposant $b = a\sqrt{-1}$, & $g = -a\sqrt{-1}$, la premiere & la troisieme formule disparoîtront; & alors $z = f(x + ay\sqrt{-1}) + F(x - ay\sqrt{-1})$. Mais toutes les fois que les fonctions f & F sont continues de quelque nature qu'elles soient, leurs valeurs peuvent se réduire à cette forme $Q \pm P\sqrt{-1}$.

Le célèbre M. Culer, dans son troisieme volume du Calcul intégral, fait $z = \frac{1}{2} f(x + ay \times$

$nn\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, en supposant $n = \pm a$. Mais alors $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \pm a\left(\frac{dz}{dx}\right)$; & $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) \times (dx \pm ady)$, équation qui ne peut être intégrable qu'autant que z est une fonction de $x \pm ay$; donc $z = f(x + ay)$ & $z = F(x - ay)$: mais chacune de ces valeurs satisfaisant, leur assemblage doit aussi satisfaire; donc on aura aussi $z = f(x + ay) + F(x - ay)$. Supposons que m étant un nombre quelconque, f & F désignent la puissance m, on aura $z = (x + ay)^m + (x - ay)^m$, quantité réelle, lors même que a est imaginaire.

$(p+2)(p+1)c]\,(x+y)^{p+2}f''(x)+$ &c. $=0$, équation qui ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs de x, y & $f(x)$, qu'autant que les coefficients constans sont chacun $=0$. Donc on aura $n+2mp+pp-p=0$; $(n+2mp+2m+pp+p)\,B+(m+p)\,A=0$; $(n+2mp+4m+pp+3p+2)\,c+(m+p+1)\,B=0$; $(n+2mp+6m+pp+5p+6)\,D+(m+p+2)\,c=0$; &c. si l'on prend la valeur de n dans la premiere de ces équations, pour la substituer dans les autres, qu'on substitue dans la troisieme la valeur de B, prise dans la seconde; qu'on substitue dans la quatrieme la valeur de c prise dans la troisieme; &c. l'on aura $B=-\frac{(m+p).A}{2(m+p)}$; $C=-\frac{(m+p+1).B}{2(2m+2p+1)}$; $D=-\frac{(m+p+2)\,C.}{3(2m+2p+2)}$; $E=-\frac{(m+p+3).D}{4(2m+2p+3)}$; $F=-\frac{(m+p+4).E}{5(2m+2p+4)}$; $G=-\frac{(m+p+5).F}{6(2m+2p+5)}$; &c. Il n'est pas difficile de continuer, la loi de la progression étant manifeste; mais l'équation $n+2mp+pp-p=0$, donne $p=\frac{1}{2}-m\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}-m-n+mm\right)}$, & l'on peut prendre pour p quelle de deux valeurs on voudra : mais la série sera interrompue, & finira au terme qui précède celui dans lequel $m+p+u$ est $=0$, u désignant un nombre entier positif. Or cela doit avoir lieu toutes les fois que $\frac{1}{2}+u\pm\sqrt{\frac{1}{4}-m-n+mm)}=0$. Mais cela ne peut arriver, à moins que la quantité sous le signe ne soit un quarré parfait.

Si l'on avoit supposé $z=A\,(x+y)^{p}\,F(y)+B\,(x+)^{p+1}\,F'(y)$ &c. on auroit trouvé une semblable série pour les valeurs de B, C., D, &c. & joignant ensemble ces deux valeurs, l'on aura aussi

$z = A(x+y)^p [f(x) + F(y)] + B(x+y)^{p+1}. [f'(x) + F'(y)] + C(x+y)^{p+2} [f''(x) + F''(y)] + D(x+y)^{p+3} [f'''(x) + F'''(y)] + E(x+y)^{p+4} [f^{IV}(x) + F^{IV}(y)] +$ &c. formule, qui à cauſe de deux fonctions arbitraires, eſt l'intégrale complette de l'équation propoſée.

Il eſt aiſé de comprendre qu'on peut ſouvent obtenir l'intégrale de maniere qu'elle ne renferme qu'un nombre fini de termes. Si $p = -m - 1$, par exemple, ou ſi $n = (m+1)(m-2)$, l'intégrale aura deux membres; elle en aura trois ſi p eſt $= -m - 2$, ou ſi $n = (m+2)(m-3)$; elle en aura quatre ſi $p = -m - 3$, ou ſi $n = (m+3)(m-4)$, &c. En général ſi l'on ſuppoſe $p + m = -u$, on aura $n = (m+u) \times (m-u-1)$, & alors $B = -\frac{1}{2} A$; $C = -\frac{(u-1).B}{2.(2u-1)}$; $D = -\frac{(u-2).C}{3(2u-2)}$; &c. ou en réduiſant, $B = \frac{1}{2}.A$; $C = -\frac{(u-1).A}{2.2(2u-1)}$; $D = -\frac{(u-2)A}{2.2.2.3(2u-1)}$; $E = \frac{+(u-2)(u-3)A}{2.2.2.3.4(2u-1)(2u-3)}$; &c. donc A étant ſuppoſé $= 1$, & les valeurs ſucceſſives de u étant les nombres naturels 1, 2, 3, &c. l'on aura

	A	B	C	D	E	F
$u=1$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$u=2$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0
$u=3$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{20}$	$-\frac{1}{120}$	0	0
$u=4$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{28}$	$-\frac{2}{7.24}$	$\frac{2.1}{96.7.5}$	0
$u=5$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{36}$	$-\frac{3}{9.24}$	$\frac{3.2}{96.9.7}$	$\frac{2.1}{960.9.7}$
$u=6$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{44}$	$-\frac{4}{11.24}$	$\frac{4.3}{96.11.9}$	$\frac{3.2}{960.11.9}$

Ainsi l'intégrale complette de cette équation $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) + \frac{m}{x+y} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x+y} \cdot \left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{(m+u)(m-u-1) \cdot z}{(x+y)^2} = 0$ (A), sera $z = (x+y)^{-m-u}[f(x) + F(y)] - \frac{u}{2u}(x+y)^{-m-u+1}[f'(x) + F'(y)] + \frac{u \cdot (u-1)}{2u \cdot 2(2u-1)} \times (x+y)^{-m-u+2}[f''(x) + F''(y)] - \frac{u(u-1)(u-2)}{2u \cdot 2(2u-1) \cdot 3(2u-2)} \cdot (x+y)^{-m-u+3} \times [f'''(x) + F'''(y)]$ &c. formule qui n'aura qu'un nombre fini de termes toutes les fois que u sera un nombre entier positif; mais quoique cette intégrale renferme plusieurs fonctions arbitraires $f'(x)$, $F'(y)$, &c. Cependant ces fonctions dépendant de $f(x)$ & de $F(y)$, & on peut dire qu'elle n'en contient que deux.

Soit l'équation $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) + \frac{m}{x+y} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, l'on aura $n = (m+u)(m-u-1) = 0$, & en prenant pour u des nombres entiers & positifs, l'intégration peut avoir lieu toutes les fois que l'on aura $m = -u$ & $m = u+1$; ainsi l'intégration réussira toutes les fois que m sera un nombre entier positif ou négatif. Supposons premierement $m = -u$, nous aurons

$$z = 1 \cdot [f(x) + F(y)] - \frac{u}{2u}(x+y)[f'(x) + F'(y)] + \frac{1}{2} \cdot \frac{u(u-1)}{2u(2u-1)}(x+y)^2 [f''(x) + F''(y)] \text{ \&c.}$$

; mais si $m = u+1$, on trouvera

$$(x+y)^{2u+1} z = [f(x) + F(y) - \frac{u}{2u} \cdot$$

$(x+y)\ [f'(x) + F'(y)]$ &c. De maniere que les deux équations seront les mêmes, avec cette différence, que le premier membre z de la seconde est multiplié par $(x+y)^{2n+1}$.

Si l'on avoit l'équation $\left(\frac{ddz}{dt\,dr}\right) + \frac{m}{t+r}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{m}{t+r}\left(\frac{dz}{dr}\right) + \frac{n.z}{(t+r)^2} = 0$ (B), on l'intégreroit dans les mêmes cas que l'équation (A) ci-dessus: car il est visible que si n est $= (m+u).(m-u-1)$, changeant x en t & y en r, ces équations seront les mêmes.

L'équation $\frac{1}{bb}\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) - \frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{2m}{aax}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{nz}{aaxx} = 0$ (C), est intégrable dans les mêmes cas que la précédente; car en faisant $t = ax + by$ & $r = ax - by$, ce qui donne $x = \left(\frac{t+r}{2a}\right)$, substituant les valeurs de $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ (*), & celle de x divisant par 4, & changeant les signes, on aura l'équation B. L'équation $\frac{1}{bb}\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) - \frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{2m}{bby}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{nz}{bbyy} = 0$ (D) se réduit encore facilement à l'équation B, en faisant $t = ax + by$, & $r = -ax + by = by - ax$, ce qui donne $y = \frac{t+r}{2b}$; ainsi les équations D & C sont intégrables

(*) On les trouvera aisément par la deuxieme note du n°. 258.

toutes les fois que $n = (m + u)(m - u - 1)$.

COROLLAIRE. Si on suppose $n = 0$, on aura les deux équations $\frac{aa}{bb}\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) - \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$ (*), $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) - \frac{bb}{aa}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{2m}{y}\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$, qui feront intégrables dans une infinité de cas, c'est-à-dire, toutes les fois que m sera un nombre entier, & par conséquent toutes les fois que $2m$ sera un nombre pair. Mais pour parvenir à l'intégrale complette de l'équation $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \frac{bb}{aa} x^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ (**), toutes les fois que m est un nombre entier positif ou négatif, je fais $t = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2m-1}} - \frac{by}{2.(2m-1)a}$, & $r = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2m-1}} + \frac{by}{2(2m-1)a}$ (ce qui donne $t + r = x^{\frac{-1}{2m-2}}$), & cette équation devient $\left(\frac{ddz}{dt\,dr}\right) + \frac{m}{t+r}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{m}{t+r}\left(\frac{dz}{dr}\right) = 0$, forme que nous savons être intégrable toutes les fois que m est un nombre entier positif ou négatif.

Soit fait $P = f(t) + F(r)$; $P' = x^{\frac{-1}{2m-1}} [f'(t)$

(*) Dans le problême de la propagation du son on parvient à une telle équation qui mérite par conséquent d'être remarquée.

(**) Ce cas est digne d'attention, puisqu'il se présente dans le problême du mouvement des cordes. C'est ce cas dont parle M. Culer lorsqu'il dit : » *Promotu chordarum inæquali crassitie præditarum est inventus.* « Calc. intég. 3[me] v. p. 179.

$+ F'(y)]$; $P'' = x^{\frac{-2}{2m-1}} [f''(t) + F''(r)]$; $P''' = x^{\frac{-3}{2m-1}} [f'''(t) + F'''(r)]$; $P^{IV} = x^{\frac{-4}{2m-1}} [f^{IV}(t) + F^{IV}(r)]$; &c. Si $m = 0$, l'intégrale de l'équation $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \frac{bb}{aa}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ sera $z = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{by}{2a}\right) + F\left(\frac{1}{2}x - \frac{by}{2a}\right)$. Si m étoit $= -1$, dans ce cas l'on auroit $t = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} + \frac{by}{6a}$ & $r = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} - \frac{by}{6a}$, & l'intégrale de l'équation $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \frac{bb}{aa}x^{\frac{4}{3}}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ deviendroit $z = f(t) + F(r) - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}.[f'(t) + F'(y)]$, dans laquelle il est facile de substituer les valeurs de t & de r. Si $m = 1$; l'on aura $z = x[f(t) + F(r)]$. Si $m = 2$, on a $z = x[f(t) + F(r)] - \frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}[f'(t) + F'(r)]$. Si $m = 3$, ou si $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \frac{bb}{aa}x^{\frac{12}{5}}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$; parce que dans ce cas $t = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{5}} - \frac{by}{10.a}$ & $r = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{5}} + \frac{by}{10.a}$, on trouvera $z = x[f(t) + F(r)] - \frac{2}{4}x^{\frac{4}{5}}[f'(t) + F'(r)] + \frac{1}{4.3}x^{\frac{3}{5}}[f''(t) + F''(r)]$. Si $m = 4$, on a $z = x[f(t) + F(r)]$

$- \frac{3}{6} x^{\frac{6}{7}} [f'(t) + F'(r) + \frac{3}{6.5} x^{\frac{5}{7}} [f''(t) + F''(r)] - \frac{1}{6.5.4} x^{\frac{4}{7}} [f'''(t) + F'''(r)]$. Si $m = 5$, on a $z = x [f(t) + F(r)] - \frac{4}{8} x^{\frac{8}{9}} [f'(t) + F'(r)] + \frac{6}{8.7} x^{\frac{7}{9}} [f''(t) + F''(r)] - \frac{4}{8.7.6} x^{\frac{6}{9}} \times [f'''(t) + F'''(r)] + \frac{1}{8.7.6.5} x^{\frac{5}{9}} [f^{IV}(t) + F^{IV}(r)]$. Il est aisé de continuer, la loi de ces intégrales étant assez évidente. Si dans cette derniere intégrale on substitue les valeurs de P, P′, &c. dont on a parlé ci-dessus, elle deviendra bien plus simple. Ainsi toutes les fois que m sera nombre entier fini, positif ou négatif, on pourra obtenir l'intégrale complette de l'équation $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \frac{bb}{aa} x^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$.

Si on suppose $a = b$ & $m = \infty$, cette équation devient $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = xx \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, dont on peut trouver une infinité d'intégrales particulieres contenues dans cette formule générale $z = Ax^p e^{Py}$ (*) ; car puisque cette équation donne $\left(\frac{dz}{dy}\right) = PAx^p e^{Py}$ & $\left(\frac{dz}{dx}\right) = pAx^{p-1} e^{Py}$, l'on doit avoir $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = PPAx^p e^{Py} = p(p-1) Ax^p e^{Py} = xx \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$; donc $P = \pm \sqrt{[p(p-1)]}$. Si l'on prend le signe +, l'on aura

(*) (e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$).

$z = Ax^p e^{y\sqrt{[p(p-1)]}}$. Mais en prenant le signe $-$, & écrivant B au lieu de A, il vient $z = Bx^p e^{-y\sqrt{[p(p-1)]}}$. Mais chacune de ces deux valeurs satisfaisant, leur somme satisfera aussi ; donc on aura $z = Ax^p e^{y\sqrt{[p(p-1)]}} + Bx^p e^{-y\sqrt{[p(p-1)]}}$. On peut donc dans une infinité de cas trouver l'intégrale particuliere de l'équation $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = xx\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$.

Recherche des fonctions à deux variables, par la relation des différentielles de tous les ordres.

260. PROBLEME. *z étant une fonction de deux variables, on demande sa nature, en supposant que quelque formule du troisieme ordre soit* $= 0$. Les formules différentielles du troisieme ordre par rapport à la fonction z, seront $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)$ & $\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$.

261. SOIT 1°. $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = 0$, donc en prenant y pour constant, multipliant par dx, on aura $\left(\frac{d^3z}{dx^2}\right) = 0$, & $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = f(y)$; donc en prenant encore y pour constant, multipliant par dx & intégrant, l'on aura $\frac{dz}{dx} = xf(y) + F(y)$. Prenant encore y pour constant, multipliant par dx & désignant une fonction arbitraire par M, l'on a $z = \frac{1}{2}xxf(y) + xF(y) +$

M (y); de forte que l'intégrale complette d'une formule différentielle du troisieme ordre exige trois fonctions arbitraires.

262. SOIT en fecond lieu $\frac{d^3 z}{dx^2 dy} = 0$, en intégrant deux fois, en regardant y comme constant, on aura $\left(\frac{dz}{dy}\right) = xf'(y) + F'(y)$; & regardant maintenant y feul comme variable, il vient $z = xf(y) + F(y) + M(x)$. f, F, & M défignent des fonctions arbitraires des quantités qui fuivent ces lettres. A l'égard des fonctions f', F', la premiere défigne que $S\,dy f'(y) = f(y)$, & la feconde fait voir que $S\,dy F'(y) = F(y)$.

263. EN troifieme lieu, fi $\left(\frac{d^3 z}{dx dy^2}\right) = 0$, ce cas ne différe du précédent qu'en ce que les variables x & y doivent être mifes l'une à la place de l'autre, de forte que dans ce cas $z = yf(x) + F(x) + M(y)$.

264. SI enfin $\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) = 0$, ce cas rentre dans le premier, en changeant y en x, & réciproquement; donc $z = \frac{1}{2} yyf(x) + yF(x) + M(x)$.

265. PROBLEME. *Suppofant toujours que z eft une fonction de deux variables x & y, déterminer z lorfque quelque formule différentielle d'un degré quelconque eft* $= 0$. Ce qu'on vient de dire dans le problême précédent fait affez voir, qu'en

ſuppoſant que M & N ont une ſignification analogue à celle de f & F, on aura pour les formules du quatrieme degré les intégrales qui ſuivent.

1°. Si $\left(\frac{d^4 z}{dx^4}\right) = 0$, on aura $z = \frac{x^3}{2.3} f(y) + \frac{x^2}{2} F(y) + x.M(y) + N(y)$.

2°. Si $\left(\frac{d^4 dz}{dx^3 dy}\right) = 0$, on aura $z = \frac{x^2}{2}. f(y) + x F(y) + M(y) + N(x)$.

3°. Si $\left(\frac{d^4 dz}{dx^2 d^2}\right) = 0$, on aura $z = x f(y) + F(y) + y M(x) + N(x)$.

4°. Si $\left(\frac{d^4 z}{dx\, dy^3}\right) = 0$, on aura $z = f(y) + \frac{y^2}{2} F(x) + y M(x) + N(x)$.

5°. Si $\left(\frac{d^4 z}{dy^4}\right) = 0$, on aura $z = \frac{y^3}{2.3} f(x) + \frac{y^2}{2}. F(x) + y M(x) + N(x)$.

Et il eſt aiſé de comprendre comment on peut continuer pour les degrés plus élevés.

266. REMARQUE. Si une formule différentielle eſt ſuppoſée égale à une fonction V de deux variables x & y, le calcul réuſſit auſſi. Mais il faut remarquer que S V dx dénote une intégrale obtenue, en regardant x ſeul comme variable; mais dans S V dy on regarde y ſeul comme variable: dans S dx. S V dx, après qu'on a intégré

$SVdx$, en regardant x ſeul comme variable, on doit intégrer $Sdx.SVdx$, en regardant encore x ſeul comme variable : dans $Sdy.SVdx$, après avoir trouvé $SVdx$, en regardant x ſeul comme variable, on doit prendre $Sdy.SVdx$, en regardant y ſeul comme variable ; mais au lieu de $Sdy\,SVdx$, on peut écrire $SSVdxdy$ ou S^2Vdxdy, c'eſt-à-dire, qu'on peut d'abord intégrer $SVdy$ pour intégrer enſuite $SdxSVdy$, cela revient au même. De-là on comprend ce que ſignifient $SSSVdx.dx.dy$, ou S^3Vdx^2dy & $S^{m+n}Vdx^mdy^n$. Etant propoſé un ſolide géométrique, dont on demande la ſolidité par une double intégration de la formule $SSVdxdy$, on cherchera premierement $SVdy$, en regardant x comme conſtant ; & après l'intégration il faut faire attention aux termes de l'intégrale, dont l'un demande que cette intégrale s'évanouiſſe lorſque $y = 0$, & l'autre preſcrit qu'elle doit avoir lieu pendant que y ſera égale à une certaine fonction de x. Cette intégrale étant ainſi déterminée, on entreprendra l'intégration de la formule $dxSVdy$, dans laquelle y ne ſe trouvera plus à cauſe qu'on aura ſubſtitué à ſa place une fonction de x ; de ſorte que y ne ſera pas cenſé conſtant dans cette derniere intégration, ce qui fait voir que ce cas eſt entiérement différent de ces intégrations réitérées dont il s'agit ici, dans leſquelles nous ne conſidérons pas la relation entre x & y, qui peut avoir lieu dans la formule particuliere dont on vient de parler.

267. PROBLEME. *Si une formule différentielle du troiſieme degré, ou d'un degré plus élevé, eſt égale à une fonction* V *de* x *& de* y, *déterminer* z.

Soit

Soit 1°. $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = V$. En supposant x seul variable, on aura $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = SVdx + f(y)$; ensuite $\left(\frac{dz}{dx}\right) = Sdx. SVdx + xf(y) + F(y) = SSVdx^2 + xf(y) + F(y)$, & enfin $z = S^3 V dx^3 + \frac{1}{2} x^2 f(y) + x F(y) + M(y)$.

Si $\left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right) = V$, on trouvera $z = S^3 V dx^2 dy + xf(y) + F(y) + M(x)$.

Si $\left(\frac{dddz}{dx dy^2}\right) = V$, on aura $z = S^3 V dx dy^2 + f(y) + y F(x) + M(x)$.

Si $\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) = V$, on aura $z = S^3 V dy^3 + \frac{y^2}{2} f(x) + y F(x) + M(x)$; de même pour les degrés plus élevés.

Si $\left(\frac{d^4 z}{dx^4}\right) = V$, on aura $z = S^4 V dx^4 + \frac{x^3}{2.3} f(y) + \frac{x^2}{2} F(y) + x M(y) + N(y)$.

Si $\left(\frac{d^4 z}{dx^3 dy}\right) = V$, on aura $z = S^4 V dx^3 dy + \frac{x^2}{2} f(y) + x F(y) + M(y) + N(x)$.

Si $\left(\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2}\right) = V$, on aura $z = S^4 V dx^2 dy^2$

$+ xf(y) + F(y) + yM(x) + N(x)$.

Si $\left(\frac{d^4 z}{dx\,dy^3}\right) = V$, on aura $z = S^4 V\,dx\,dy^3$ $+ f(y) + \frac{y^2}{2} F(x) + yM(x) + N(x)$, & il eſt facile de continuer pour les degrés plus élevés.

168. COMME dans les intégrations vulgaires, le ſigne d'intégration eſt cenſé renfermer une conſtante arbitraire qui entre dans l'intégrale, de même les fonctions arbitraires dont il eſt ici queſtion, ſont cenſées renfermées dans le ſigne d'intégration, ſans qu'il ſoit néceſſaire de les exprimer. Ainſi ſi $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = V$, la triple intégrale repréſentée par $z = S^3 V dx^3$, ſera cenſée contenir $\frac{xx}{2} f(y) + xF(y) + M(y)$, ſans qu'il ſoit néceſſaire de les exprimer, ce qu'il faut dire de même pour les autres formules. En général, ſi $\left(\frac{d^{m+n} z}{dx^m\,dy^n}\right) = V$, l'intégrale ſera $z = S^{m+n} V\,dx^m\,dy^n$, qui eſt cenſée renfermer un nombre $m + n$ de fonctions arbitraires qui doivent être introduites par un nombre $m + n$ d'intégrations.

De l'intégration des équations des degrés ſupérieurs par la réduction aux inférieurs.

169. PROBLEME. *Etant donnée l'équation du*

troisieme degré $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = a^3 z$, *chercher* z. Supposons que l'équation $\frac{dz}{dx} = nz$ satisfasse à la proposée, on aura en différenciant, $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = n\left(\frac{dz}{dx}\right) = nnz$, & $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = nn\left(\frac{dz}{dx}\right) = n^3 z$. Il est évident qu'on satisfera au problême si $n^3 = a^3$, ce qui peut arriver de trois manieres. 1°. si $n = a$; 2°. si $n = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a$; 3°. si $n = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}a$, qui sont les trois racines de l'équation $n^3 - a^3 = 0$. On prendra pour chaque valeur de n l'intégrale complette de l'équation $\left(\frac{dz}{dx}\right) = nz$, & les trois intégrales complettes, jointes ensemble, donneront l'intégrale complette demandée. Mais à cause que x seul est regardé comme variable, on aura $dz = nzdx$, ou $\frac{dz}{z} = ndx$. Donc $Lz = nx.Le + L.f(y)$, & $z = e^{nx}f(y)$. Donnant maintenant à n les trois valeurs dont on vient de parler, on aura pour l'intégrale complette cherchée $z = e^{ax}f(y) + e^{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.ax}F(y) + e^{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}ax}M(y)$.

270. PROBLEME. *Etant proposée l'équation*

$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + b\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) - 2a\left(\frac{dz}{dx}\right) - ab\left(\frac{dz}{dy}\right)$ $+ aaz = 0$, *trouver* z. Il eſt viſible que l'équation $\left(\frac{dz}{dx}\right) = az$ ſatisfait à la propoſée: or cette équation donne $z = e^{ax}$. Suppoſons que l'intégrale cherchée eſt $z = e^{ax}u$, prenant les valeurs de z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dy\,dx}\right)$, que donne cette ſuppoſition; les ſubſtituant dans la propoſée & diviſant enſuite par e^{ax}, il vient $\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + b\left(\frac{ddu}{dx\,dy}\right) = 0$; & en faiſant $\frac{du}{dx} = t$, on aura $\left(\frac{dt}{dx}\right) + b\left(\frac{dt}{dy}\right) = 0$: mais l'on voit aiſément que t doit être une fonction de $y - bx$ (*). Suppoſons que $t = \left(\frac{du}{dx}\right)$ eſt $= -bf'(y - bx)$, pour avoir $u = f(y - bx) + F(y)$; donc $z = e^{ax}[f(y - bx) + F(y)]$, intégrale complette de l'équation propoſée.

271. PROBLEME. *Etant donnée l'équation* $\left(\frac{d^4z}{dy^4}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, *la réduire à une plus ſimple.* L'équation $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = b\left(\frac{dz}{dx}\right)$ ſatisfait à la propoſée. Car en différenciant dans la ſuppoſition de x conſtant, on trouve d'abord $\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = b\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)$, & enſuite $\left(\frac{d^4z}{dy^4}\right) =$

(*) Si $t = (y - bx)^2$ l'on aura $\left(\frac{dt}{dx}\right) + b\left(\frac{dt}{dy}\right) = -2b(y - bx) + 2b(y - bx) = 0$.

$b\left(\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right)$. Mais si l'on regarde y comme constant, il vient $\left(\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right) = b\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$; donc en substituant dans l'équation précédente la valeur de $\left(\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right)$, il viendra $\left(\frac{d^4 z}{dy^4}\right) = bb\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, qui satisfait à la proposée lorsque $bb = aa$, c'est-à-dire lorsque $b = +a$ & $b = -a$; ainsi si on suppose qu'on ait résolu les équations $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) - a\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, & que la premiere donne $z = P$, & la seconde $z = Q$, on aura pour l'équation proposée, $z = P + Q$; & parce que P & Q renfermeront chacune deux fonctions arbitraires, l'intégrale trouvée de cette maniere sera complette.

On peut trouver une infinité de solutions particulieres en faisant $z = XY$, X & Y étant des fonctions, la premiere de x & la seconde de y; d'où l'on tire $\frac{X d^4 Y}{dy^4} = \frac{aaY\,ddX}{dx^2}$, ou $\frac{d^4 Y}{Y dy^4} = \frac{aa\,ddX}{X dy^2}$. Cette équation étant ainsi représentée, l'un & l'autre membre doit être fait égal à une même constante b.

Soit, par exemple, $Y = y^5$, $X = x^3$ & supposons $\frac{d^4 Y}{Y dy^4} = b$, on aura $b = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \times$

$\frac{y}{y^5} = \frac{aaddX}{Xdx^2} = \frac{3.2.aax}{x^3}$; donc $5.4.x^2 = aay^4$.

REMARQUE. L'équation $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = b\left(\frac{dz}{dx}\right)$ ne paroît pas pouvoir être généralement résolue par aucune méthode connue. L'équation proposée peut être utile dans la méchanique; car dans la recherche des vibrations fort petites des lames élastiques, on parvient à une équation du quatrieme degré de cette forme; & comme on n'a pu jusqu'ici (du moins cela n'est pas venu à ma connoissance) résoudre généralement cette équation, on n'a pas pu non plus résoudre le problême général des lames élastiques.

Des équations homogènes dont tous les termes contiennent des formules différentielles du même degré.

272. PROBLEME. *Etant proposée l'équation homogène* $A\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + B\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) + C\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = 0$, *dans laquelle* A, B, C *sont des constantes, déterminer* z. J'observe que l'équation $\left(\frac{dz}{dx}\right) + a\left(\frac{dz}{dy}\right) = c \ldots$ (D), satisfait à la proposée; car si l'on différentie celle-ci en faisant varier d'abord x & ensuite y, on aura les deux suivantes, $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + a\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) = 0$, $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$

$+ a\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = 0$. Si l'on multiplie la premiere par A & la seconde par $\frac{C}{a}$, leur somme rendra la proposée, pourvu que $Aa + \frac{C}{a} = B$, ou que $Aaa - Ba + C = 0$ (H) (*); d'où résulte une valeur double pour a, dont chacune substituée dans l'équation (D) donnera une partie de la fonction z cherchée. Puisque par l'équation D l'on a $\left(\frac{dz}{dx}\right) = c - a\left(\frac{dz}{dy}\right)$, l'on aura $dz = cdx + (dy - adx).\left(\frac{dz}{dy}\right)$ (**); ainsi $\frac{dz}{dy}$ doit être une fonction de $y - ax$ que nous ferons $= f'(y - ax)$. Donc $z = cx + f(y - ax)$; c étant une constante arbitraire. C'est pourquoi l'on formera l'équation $Auu + Bu + C = 0$ (T), dont les facteurs simples soient $u + a$, $u + b$, de maniere que l'on ait $Auu + Bu + C = A(u + a).(u + b)$. Alors le facteur $u + b$ donnera $z = c'x + F(y - bx)$, & faisant $c + c' = g$, on aura l'intégrale complette $z = gx + f(y - ax) +$

(*) L'équation H, en regardant a comme l'inconnue & changeant a en u, donne $u = \frac{B}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{BB}{4AA} - \frac{C}{A}\right)}$. Des deux valeurs de u j'en désignerai une par a & l'autre par b.

(**) Car en faisant varier x seul, l'on auroit $dz = cdx - adx\left(\frac{dz}{dy}\right)$; mais si l'on veut prendre la différentielle de z, en faisant tout varier, il faudra ajouter $\left(\frac{dz}{dy}\right) dy$.

$F(y - bx)$. Mais à cause de $gx = g \times \frac{(y-ax)-(y-bx)}{b-a}$, gx doit être censé contenu dans les deux formules indéfinies ; donc on peut, en simplifiant, représenter notre intégrale par l'équation $z = f(y - ax) + F(y - bx)$.

Si $b = a$, on aura (par l'équation H) $B = 4AC$, $A = \frac{B}{2a}$, $C = \frac{BB}{4A} = \frac{aB}{2}$ & $a = \frac{B}{2A}$; substituant la valeur de C dans l'équation proposée, & faisant ensuite $t = x$, $r = y - ax$, on trouvera par la méthode ci-dessus (258), après avoir substitué la valeur de A, que l'équation proposée devient $\frac{B}{2a} \cdot \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 0$, ou $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 0$; donc par la méthode ci-dessus (251) $z = f(r) + tF(r) = f(y - ax) + xF(y - ax)$ (*).

COROLLAIRE. Si $C = 0$, on aura (par l'équation T) $a = 0$, $\frac{B}{A} = b$ & $z = f(y) + F\left(y - \frac{B}{A}x\right)$: de même l'intégrale de l'équation

(*) M. Euler (*Calcul intégral*, *troisieme vol. p.* 380.) se sert d'une autre méthode qui, en employant f & F au lieu de Γ & Δ, dont il se sert, revient à ceci. Faisant $b = a + da$, alors on doit avoir par cette méthode $F(y - bx) = F(y - ax) - xdaF'(y - ax)$, & parce que la premiere partie est contenue dans le premier membre $f(-ax)$, & qu'à la place de la seconde on peut, selon lui, écrire $xF.(y - ax)$, il trouve une seconde formule semblable à la nôtre : mais, puisque lorsque $b = a$, da est $= 0$, la quantité multipliée par da ne doit-elle pas devenir 0 & disparoître ?

$B\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) + C\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = 0$, sera $z = f(x) + F\left(x - \frac{B}{C}y\right)$.

Si les racines sont imaginaires, on pourra les représenter par les équations $a = p + q\sqrt{-1}$ & $b = p - q\sqrt{-1}$, & l'on aura $z = f[y + (p + q\sqrt{-1})x] + F[y - (p - q\sqrt{-1})x]$, qu'on peut facilement représenter d'une maniere réelle.

L'on peut encore représenter la valeur de z d'une maniere réelle toutes les fois que f & F désigneront une puissance m, m étant un nombre positif ou négatif: car en faisant la partie rationnelle de chaque fonction $= s$, & $qx\sqrt{-1} = t$, on aura $z = s^m - ms^{m-1}t + \frac{m.\overline{m-1}}{2}s^{m-2}t^2$ &c. $+ s^m + m.s^{m-1}t +$ &c. $= 2s^m + m.\overline{m-1}.s^{m-2}t^2 +$ &c. à cause que tous les termes de rang pair, dans lesquels seuls il reste des quantités imaginaires, se détruisent; mais il n'est pas possible de représenter d'une maniere réelle les fonctions discontinues; de sorte qu'il paroît que dans ce cas on doit borner la solution aux fonctions continues.

273. PROBLEME. *Etant donnée l'équation homogène* $A\left(\frac{d^m z}{dx^m}\right) + B\left(\frac{d^m z}{dx^{m-1}dy}\right) + C\left(\frac{d^m z}{dx^{m-2}dy^2}\right) +$ &c. $= 0$, *en trouver l'intégrale complette.* On formera cette équation $An^m + Bn^{m-1} +$ &c. $= 0$, dont les racines soient

$n = a$, $n = b$, $n = c$, &c. Si elles sont toutes inégales, on aura $z = f(y + ax) + F(y + bx) + M(y + cx) +$ &c. (*); si elles sont toutes égales, on multipliera la premiere fonction par 1, la seconde par y, la troisieme par y^2, la quatrieme par y^3; car les fonctions n'étant ni de x seul, ni de y seul, on peut employer indifféremment les progressions $\div 1 : y : y^2 : y^3$ &c., $\div 1 : x : x^2$ &c. Mais si les fonctions étoient seulement d'une variable, de x, par exemple, il faudroit employer la progression de l'autre variable. Si la proposée étoit du troisieme degré, & que ses racines fussent égales, en introduisant les nouvelles variables $t = x$, $u = y + ax$, la proposée deviendroit $\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right) = 0$, dont l'intégrale donne $z = f(u) + x F(u) + \frac{xx}{2} M(u) = f(y + ax) + x F(y + ax) + xx M(y + ax)$ en négligeant le diviseur 2. Au reste si on ne veut pas négliger les diviseurs numériques, on fera attention que x suppose une intégrale

(*) Soit $m = 3$, & supposons que l'équation $z = f(y + nx)$ est une intégrale particuliere qui satisfait; on aura $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = n^3 f'''(y + nx)$; $\left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right) = n^2 f'''(y + nx)$; $\left(\frac{d^3 z}{dy\, dx^3}\right) = n f'''(y + nx)$; de sorte que dans ce cas, en divisant par $f'''(y + nx)$, l'on a $An^3 + Bn^2 + Cn + D = 0$, & la forme $z = f(y + ax(+ F(y + bx) + M(y + cx)$ satisfait à la proposée, en supposant $n = a$; $n = b$; $n = c$.

faite, x^2 en suppose deux, x^3 en suppose trois & ainsi de suite. De sorte que x^m doit avoir pour diviseur $(1.2.3.4\ldots m)$ s'il y avoit un certain nombre de racines égales, on multiplieroit ces racines par les termes correspondans d'une des progressions ci-dessus, en commençant par la premiere des racines égales en allant de la gauche à la droite, sans multiplier celles qui sont inégales.

Si les coefficients A, B, C, &c. s'évanouissoient, le nombre des racines seroit plus petit que m, & celles qui manqueroient, devroient être regardées comme infinies, auxquelles il répondroit des fonctions de x seul; ainsi si $A = B = C = o$, les racines a, b, c, donneront la partie de l'intégrale $f(x) + yF(x) + y^2 M(x)$.

Des équations homogènes qui ne renferment aucun coefficient variable, & dans lesquelles V étant une fonction de t & de u, on a la quantité $t = ax + bz$ & $u = cy + gz$; ce qui fait voir que V est une fonction des trois variables x, y, z.

274. PROBLEME. *Etant donnée l'équation* $A\left(\frac{dV}{dx}\right) + B\left(\frac{dV}{dy}\right) + C\left(\frac{dV}{dz}\right) = o$, *trouver la fonction V des trois variables x, y & z.* Supposons que V est $= F(t \,\&\, u)$, t étant $= ax + bz$ & $u = cy + gz$: il est évident, en faisant attention à ce qu'on a dit ci-dessus (258), qu'on doit avoir $\left(\frac{dV}{dt}\right) \times (Aa + Cb) + \left(\frac{dV}{du}\right).(Bc + Cg) = o$. Egalant séparément à o les multiplicateurs des formules

= a, $n = b$,
inégales, on au
+ M(y +
égales, on mul
1, la seconde
quatrieme par
de x seul, ni
différemment
&c., ÷ 1 :
seulement d'
il faudroit
variable. Si
& que ses
les nouvelle

la propose

tégrale do

= f(y
+ ax)
o, ne v
on fer

(*) Soit

est une

distribuer en trois parties, comme on le voit ici.

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{ddV}{dt^2}\right).\,(Aaa + Cbb + 2Eab) \\ \left(\frac{ddV}{dt\,du}\right).\,(2Cbg + 2Dac + 2Eag \\ \qquad + 2Gbc) \\ \left(\frac{ddV}{du^2}\right).\,(Bcc + Cgg + 2Gcg) \end{array}\right\} = 0.$$

Egalant chaque partie à o, la premiere donnera $\frac{b}{a} = \frac{-E + \sqrt{(EE - AC)}}{C}$, la derniere donnera $\frac{g}{c} = \frac{-G + \sqrt{(GG - BC)}}{C}$ (*). Ces valeurs substituées dans la troisieme égalée à o & divisée par $2ac$, donneront $EG - CD = \sqrt{[(EE - AC).(GG - BC)]}$; ôtant le radical, réduisant, divisant par C & transposant, l'on aura $AGG + BEE + CDD = ABC + 2DEG$. Toutes les fois que cette équation de condition aura lieu, la proposée admettra la solution que nous employons ici ; & en représentant par xx la formule $\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)$; par xy la

(*) Si on prenoit le signe — pour les deux radicaux, ou le signe — pour l'un & le signe + pour l'autre dans les deux premieres équations, on parviendroit à la même troisieme équation dans le premier cas; mais dans le second cas le signe du second membre seroit différent. Cependant cela n'empêcheroit pas que la quatrieme équation ne fût la même.

formule $\left(\frac{ddu}{dxdy}\right)$; &c. l'équation $Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Gyz = 0$, pourra se résoudre en deux facteurs de cette forme $(a'x + b'y + c'z)(fx + g'y + hz)$; ce qui arrivera si $A = a'f$, $B = b'g'$, $C = c'h$, $2D = a'g' + b'f$, $2E = a'h + c'f$, $2G = b'h + c'g'$; ce qui rend l'équation de condition ci-dessus. De-là l'on tire pour la solution $\frac{b}{a} = \frac{-a'}{c'}$ ou $\frac{b}{a} = \frac{-f}{h}$ & $\frac{g}{c} = \frac{-b'}{c'}$ ou $\frac{g}{c} = \frac{-g'}{h}$; où il faut remarquer qu'en supposant $t = c'x - a'z$ l'on doit faire $u = c'y - b'z$; mais à $t = hx - fz$ répond $u = hy - g'z$; ainsi l'on aura $V = F(\overline{c'x - a'z} \;\&\; \overline{c'y - b'z}) + M(\overline{hx - fz} \;\&\; \overline{hy - g'z})$ (Q) (*). Chaque facteur, comme il est aisé de le voir, fournit une fonction, & la somme des fonctions donne l'intégrale cherchée. Si les deux facteurs sont égaux, on pourra exprimer l'intégrale complette de cette maniere $V = xF\left(\overline{\frac{x}{a'} - \frac{z}{c'}} \;\&\; \overline{\frac{y}{b'} - \frac{z}{c'}}\right) + M\left(\overline{\frac{x}{a'} - \frac{z}{c'}} \;\&\; \overline{\frac{y}{b'} - \frac{z}{c'}}\right)$, en multipliant une des fonctions par x & l'autre par 1.

Au reste toutes les fois que l'équation homogène, dont on vient de parler, est susceptible de

(*) f désigne ici le coefficient de z.

la solution précédente, elle renferme deux équations homogènes du premier degré $a'\left(\frac{dV}{dx}\right) + b'\left(\frac{dV}{dy}\right) + c'\left(\frac{dV}{dz}\right) = 0$ (H) & $f\left(\frac{dV}{dx}\right) + g'\left(\frac{dV}{dy}\right) + h\left(\frac{dV}{dz}\right) = 0$; car l'une & l'autre satisfait alors à la proposée; & leurs intégrales, jointes ensemble, rendent l'intégrale complette (Q) de la proposée. On peut aussi résoudre la proposée par cette méthode. Je prends l'équation (H), & je suppose qu'elle satisfait à la proposée, je la différencie successivement en faisant varier x, y & z: la premiere différenciation donne

$$a'\left(\frac{ddV}{dx^2}\right) + b'\left(\frac{ddV}{dx\,dy}\right) + c'\left(\frac{ddV}{dx\,dy}\right) = 0;$$

la seconde donne

$$a'\left(\frac{ddV}{dx\,dy}\right) + b'\left(\frac{ddV}{dy^2}\right) + c'\left(\frac{ddV}{dy\,dz}\right) = 0;$$

la troisieme donne

$$a'\left(\frac{ddV}{dx\,dz}\right) + b'\left(\frac{ddV}{dy\,dz}\right) + c'\left(\frac{ddV}{dz^2}\right) = 0.$$

Multipliant la premiere par f, la seconde par g', la troisieme par h, & prenant leur somme, on trouvera l'équation générale dont nous avons donné l'intégrale; on peut donc la regarder comme le produit de deux équations du premier degré dont la somme des intégrales donne l'intégrale complette de la proposée.

L'équation $\left(\frac{ddV}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{ddV}{dz^2}\right)$, n'est pas intégrable par cette méthode, mais on peut en trouver

des intégrales particulieres, telles que $V = f(ax + by + cz)$; mais ayant fait la substitution, on doit avoir $ab = cc$ & en faisant $c = 1$, on aura $ab = 1$; ce qui pouvant avoir lieu d'une infinité de manieres, on aura tant d'intégrales particulieres qu'on voudra; ces intégrales jointes ensemble, satisferont aussi; donc a, b, c, &c. étant des nombres quelconques, on aura $V =$

$$F\left(\frac{a}{b}x + \frac{b}{a}y + z\right) + M\left(\frac{c}{g}x + \frac{g}{c}y + z\right) + \&c.$$

mais cependant l'on n'aura pas l'intégrale complette.

276. PROBLEME. *Etant donnée une équation homogène du troisieme degré, trouver son intégrale complette.* Supposons que l'équation du premier degré $a\left(\frac{dV}{dx}\right) + b\left(\frac{dV}{dy}\right) + c\left(\frac{dV}{dz}\right) = 0$, satisfait à l'équation du troisieme degré $A\left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)$

$$+ B\left(\frac{d^3V}{dy^3}\right) + C\left(\frac{d^3V}{dz^3}\right) + D\left(\frac{d^3V}{dx^2dy}\right) + E\left(\frac{d^3V}{dxdy^2}\right) + E'\left(\frac{d^3V}{dx^2dz}\right) + G\left(\frac{d^3V}{dxdz^2}\right) + H'\left(\frac{d^3V}{dy^2dz}\right) + I\left(\frac{d^3V}{dydz^2}\right) + P\left(\frac{d^3V}{dxdydz}\right) = 0.$$

Pour que l'équation du premier degré satisfasse à celle-ci, il faut que l'expression algébrique qu'on peut en former $Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dx^2y$ + &c. (Q), ait un facteur $ax + by + cz$; & si l'autre facteur n'est pas résoluble en deux autres facteurs simples, il sera une équation homogène du second degré qui ne sera pas susceptible de solution par la méthode actuelle. L'équation du troisieme degré ne peut avoir d'intégrale

tégrale complette, à moins que l'expression (Q) ne soit composée de trois facteurs simples, $(ax + by + cz)$, $(fx + gy + hz)$, $(kx + my + nz)$; & dans ce cas l'on a

$A = afk$; $B = bgm$; $C = chn$; $D = afm + agk + bfk$; $E = agm + bfm + bgk$; $E' = afn + ahk + cfk$; $G = ahn + cfn + chk$; $H = bgn + bhm + cgm$; $I = bhn + cgn + chm$; $P = agn + ahm + bfn + bhk + cfm + cgk$.

Et alors l'intégrale complette sera $V = F\left(\overline{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}} \,\&\, \overline{\frac{y}{b} - \frac{z}{c}}\right) + M\left(\overline{\frac{x}{f} - \frac{z}{h}} \,\&\, \overline{\frac{y}{g} - \frac{z}{h}}\right) + N\left(\overline{\frac{x}{k} - \frac{z}{n}} \,\&\, \overline{\frac{y}{m} - \frac{z}{n}}\right)$, chaque facteur simple produisant une fonction arbitraire.

Si deux facteurs sont égaux de maniere que l'on ait $f = a$, $g = b$, $h = c$, à la place des deux premieres fonctions, on écrira

$xF\left(\overline{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}} \,\&\, \overline{\frac{y}{b} - \frac{z}{c}}\right) + M\left(\overline{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}} \,\&\, \overline{\frac{y}{b} - \frac{z}{c}}\right)$. Si les trois facteurs sont égaux & qu'on ait encore $k = a$, $m = b$, $n = c$, l'intégrale complette sera $V = xxF\left(\overline{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}} \,\&\right.$

$$\overline{\frac{y}{b}-\frac{z}{c}}\Big) + xM\Big(\overline{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}} \;\&\; \overline{\frac{y}{b}-\frac{z}{c}}\Big) +$$

$$N\Big(\overline{\frac{x}{a}-\frac{z}{b}} \;\&\; \overline{\frac{y}{b}-\frac{z}{c}}\Big).$$

Si une équation homogène du quatrieme, du cinquieme degré, &c. est telle que l'expression algébrique qu'on en peut former, soit composée de facteurs simples du premier degré, chacun de ces facteurs fournira une intégrale, & la somme de toutes les intégrales donnera l'intégrale complette de la proposée. S'il y a deux facteurs égaux, il faudra multiplier par x l'une des intégrales égales correspondantes; s'il y en a trois, on multipliera la premiere par x^2, la seconde par x, la troisieme par $1 = x^0$; &c. A l'égard des fonctions, ce qu'on vient de voir fait comprendre suffisamment comment on doit les exprimer.

Ces spéculations ne sont pas vaines; car il y a plusieurs choses dans la théorie des fluides qui ont rapport aux fonctions de quatre variables, dont il faut rechercher la nature par les équations différentielles du second degré.

Dans cette théorie l'équation $\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dz^2}\right)$ est de grande importance, x, y, z désignant trois coordonnées & t le tems écoulé. Si on demande la fonction de ces variables qui satisfasse à cette équation, l'intégrale complette doit renfermer deux fonctions arbitraires, qui contiennent chacune trois variables. On peut trouver une infinité de solutions particulieres, comme si on supposoit $u = F(ax + by + cz + et)$; & alors on

doit avoir $ee = aa + bb + cc$, ce qui peut avoir lieu d'une infinité de manieres; mais on n'a pas encore trouvé la solution générale. Il est évident aussi, qu'en joignant ensemble plusieurs de ces fonctions, leur somme satisfera à l'équation proposée.

277. PROBLEME. *u étant une fonction de trois variables x, y, z déterminer cette fonction par la valeur donnée d'une différentielle du premier degré égale à une fonction* P *de ces variables.* Soit $\left(\frac{du}{dx}\right) = P$. En regardant y & z comme constans, on aura $du = Pdx$ & $u = SPdx$ + constante. Or cette constante doit être une fonction de y & de z, avec des constantes si l'on veut; donc $u = SPdx + f(y \,\&\, z)$. De même si l'on a $\left(\frac{du}{dy}\right) = P$, on aura $u = S.Pdy + f(x \,\&\, z)$; & si l'on a $\left(\frac{du}{dz}\right) = P$, l'on aura $u = SPdz + f(x \,\&\, y)$.

COROLLAIRE. Si $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, ou si $P = 0$, on aura $u = f(y \,\&\, z)$; si $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$, l'on aura $u = f(x \,\&\, z)$; & si enfin $\left(\frac{du}{dz}\right) = 0$, on trouvera $u = f(x \,\&\, y)$.

278. PROBLEME. *u étant toujours une fonction de trois variables x, y, z dont une formule différentielle du second degré est supposée égale à une certaine fonction* P, *déterminer u.* Soit 1°. $\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$

$= P$, la premiere intégration donne $\left(\frac{du}{dx}\right) =$ S. $P\,dx + f(y \,\&\, z)$, & en intégrant de nouveau, il vient $u =$ S. dx S $P\,dx + x f(y \,\&\, z) + F(y \,\&\, z)$: or dans la double intégration de S. dx S $P\,dx$ on doit regarder x seul comme variable. L'intégration des formules $\left(\frac{ddu}{dy^2}\right) = P$, $\left(\frac{ddu}{dz^2}\right) = P$, est entierement semblable à la précédente. Pour ce qui regarde les autres formules différentielles du second degré, il suffira de résoudre celle-ci $\left(\frac{ddu}{dx\,dy}\right) = P$, qui étant d'abord intégrée, en considérant x seul comme variable, donne $\left(\frac{du}{dy}\right) =$ S. $P\,dx + f(y \,\&\, z)$; celle-ci étant intégrée dans la supposition de y seul variable, donne $u =$ S. dy S $P\,dx +$ S. $dy f(y \,\&\, z) + F(x \,\&\, z)$; où l'on peut observer 1°. que la premiere partie peut être représentée par SS $P\,dx\,dy$; 2°. que dans S. $dy f(y \,\&\, z)$, si l'on intègre en regardant z comme constant, il résultera une fonction de y & z qu'on peut représenter par $f(y \,\&\, z)$; donc l'intégrale devient $u =$ SS $P\,dx\,dy + f(y \,\&\, z) + F(x \,\&\, z)$.

Si la fonction P devient $= 0$, on aura les formules qu'on voit ici : si

$$\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = 0, \text{ il vient } u = x f(y \,\&\, z) + F(y \,\&\, z).$$

$\left(\frac{ddu}{dy^2}\right) = 0, \ldots\ldots u = yf(x \,\&\, z) +$
$F(x \,\&\, z).$

$\left(\frac{ddu}{dz^2}\right) = 0, \ldots\ldots u = zf(x \,\&\, y) +$
$F(x \,\&\, y).$

$\left(\frac{ddu}{dx\,dy}\right) = 0, \ldots\ldots u = f(x \,\&\, z) +$
$F(y \,\&\, z).$

$\left(\frac{ddu}{dx\,dz}\right) = 0, \ldots\ldots u = f(x \,\&\, y) +$
$F(y \,\&\, z).$

$\left(\frac{ddu}{dy\,dz}\right) = 0, \ldots\ldots u = f(x \,\&\, y) +$
$F(x \,\&\, z).$

279. PROBLEME. *u étant une fonction de x, y, z, déterminer cette fonction lorsqu'une formule différentielle du troisieme degré est égale à une certaine fonction* P *de ces variables & de constantes.* Soit 1°. $\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) = P$, la premiere intégration donnera $\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = SPdx + 2f(y \,\&\, z)$. Nous ajoutons le nombre 2, afin qu'il n'y ait point de diviseur dans l'intégrale; & il est visible que cela est permis, parce que si $f(y \,\&\, z)$ désigne une fonction de y & de z, $2f(y \,\&\, z)$ désignera aussi une fonction de y & z. La seconde intégration donne $\left(\frac{du}{dx}\right) = SdxSPdx + 2xf(y \,\&\, z) + F(y \,\&\, z)$. Enfin la troisieme

intégration donnera $u = S dx S dx . S P dx + xx f(y \& z) + x F(y \& z) + M(y \& z)$.

Soit 2°. $\left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy}\right) = P$, les deux premieres intégrations donneront $\left(\frac{du}{dy}\right) = S dx . S P dx + x f(y \& z) + F(y \& z)$ (*). Mais parce que à la place de $S dy f(y \& z)$ l'on peut écrire $f(y \& z)$ & $F(y \& z)$ au lieu de $S dy F(y \& z)$, la troisieme intégration donnera $u = SSSP dx^2 dy + x f(y \& z) + F(y \& z) + M(x \& z)$.

En changeant les variables, toutes les formules du troisieme degré, si on en excepte celle dont nous allons traiter dans un moment, sont contenues dans celles que nous venons de traiter.

Si $\left(\frac{du^3}{dx dy dz}\right) = P$, on aura d'abord en regardant x seul comme variable $\left(\frac{ddu}{dy dz}\right) S . P dx + f(y \& z)$. Regardant maintenant y seul comme variable, il vient $\left(\frac{du}{dz}\right) = S^2 P dx dy + f(y \& z) + F(x \& z)$; & enfin $u = S^3 P dx dy dz + f(y \& z) + F(x \& z) + M(x \& y)$.

COROLLAIRE. Si $\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right) = 0$, on aura $u = xx f(y \& z) + x F(y \& z) + M(y \& z)$.

(*) Nous ne multiplions pas la premiere fonction par 2, parce que cela est inutile.

Si $\left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy}\right) = 0$, on aura $u = x f(y \,\&\, z)$ $+ F(y \,\&\, z) + M(x \,\&\, z)$.

Si $\left(\frac{d^3 u}{dx\,dy\,dz}\right) = 0$, il vient $u = f(y \,\&\, z)$ $+ F(x \,\&\, z) + M(x \,\&\, y)$.

REMARQUE I^e^. Il eſt maintenant aiſé de voir comment on peut continuer pour les degrés plus élevés.

REMARQUE IIe. Si on avoit l'équation $A u + B\left(\frac{du}{dx}\right) + C\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \&c. = 0$, on conſidéreroit y & z qui entrent dans la fonction u, comme des conſtantes arbitraires qu'on doit ajouter en intégrant, & u & x comme variables : on ajouteroit donc autant de fonctions arbitraires de y & z, telles que $f(y \,\&\, z)$, $F(y \,\&\, z)$, &c. que le demanderoit l'ordre de l'équation & le problême ſeroit réſolu.

REMARQUE IIIe. Selon ce qu'on a dit ci-deſſus (258), en ſubſtituant dans l'équation $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, u au lieu de z, on aura $u = f(x + ay) + F(x - ay)$. Mais parce que, ſelon ce qu'on a dit (n°. 254), l'équation $\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) = 0$, donne $z = f(t) + F(u)$, ſi à la place de z on ſubſtitue u, & dV à la place de du, on aura $u = f(t) + F(V)$, en ſuppoſant que u ne contient que deux variables t & V; mais ſi u contient encore z, on aura d'abord $\left(\frac{du}{dt}\right)$

$= f(t \& z)$; donc $du = dt f(t \& z)$, & $u = S dt f(t \& z) + F(V \& z)$, qu'on peut représenter par $z = f(t \& z) + F(V \& z)$; donc en supposant que $t = \overline{x + ay}$ & $V = \overline{x - ay}$, on aura $u = f(x + ay \& z) + F(x - ay \& z)$.

REMARQUE IVe. A cause de $du = p\,dx + q\,dy + r\,dz$, si on suppose $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, on aura $u = f(y \& z)$; car alors $\left(\frac{du}{dx}\right) = p = 0$, marque que la quantité x n'entre pas dans la fonction u; si $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$, on aura $u = f(x \& z)$; & si $\left(\frac{du}{dz}\right) = 0$, on aura $u = f(x \& y)$.

Recherche des facteurs qui peuvent rendre les équations intégrables.

280. IL seroit à souhaiter que l'on pût trouver pour chaque cas le facteur qui peut rendre intégrable une équation différentielle quelconque : quoique nous ayons déja dit beaucoup de choses sur cette matiere si intéressante, nous croyons devoir la traiter d'une autre maniere.

La séparation des indéterminées ne donne pas toujours des intégrales algébriques que les facteurs peuvent donner. Par exemple, l'équation $\frac{dx}{1 + xx} + \frac{dz}{1 + zz} = 0$, qui est séparée, donne A. tang. x

$+ A$ tang. $z = C$ (*) ; mais si l'on multiplie l'équation par $\frac{(1+xx).(1+zz)}{(x+z)^2}$, le produit $\frac{dx.(1+zz)+dz(1+xx)}{(x+z)^2} = 0$, donne en intégrant, $\frac{-1+xz}{x+z} = C$. En multipliant l'équation $\frac{2dx}{1+xx} + \frac{dz}{1+zz} = 0$, par $\frac{(xx+1)^2.(1+zz)}{(2xz+xx-1)^2}$, pour avoir $\frac{2dx(1+xx).(1+zz)+dz(xx+1)^2}{(2xz+xx-1)^2}$ $= 0$, on aura l'intégrale $\frac{xxz-2x-z}{2xz+xx-1} = C$.

On peut remarquer que, connoissant l'intégrale complette d'une équation différentielle $P dx + Q dy = 0$, l'on peut trouver le multiplicateur M qui l'a rendue intégrable. Car soit cette intégrale $V = C$ constante, V sera une certaine fonction de x & y, & ayant différencié l'intégrale, on trouvera $dV = 0$; mais dV doit être $= M(Pdx + Qdy)$, formule qui fera connoître M.

281. SOIT, par exemple, l'équation différentielle $\frac{mdx}{x} + \frac{ndy}{y} = 0$, dont l'intégrale complette est $x^m y^n = C$; donc $0 = mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1} dy$ $= x^m y^n \left(\frac{mdx}{x} + \frac{ndy}{y}\right)$, ce qui fait voir que le multiplicateur M est $= x^m y^n$. Soit l'équation $\frac{dx}{1+xx}$ $+ \frac{dy}{1+yy} = 0$, dont l'intégrale complette est $1 -$

(*) A est un arc de cercle dont la tangente est x, ou z.

$xy = A(x+y)$, A étant une constante arbitraire; donc $A = \frac{1-xy}{x+y}$, & $o = \frac{-dx(1+yy)-dy(1+xx)}{\overline{x+y}^2}$ $= \frac{(1+xx).(1+yy)}{(x+y)^2}.\left(\frac{dx}{1+xx}+\frac{dy}{1+yy}\right)$; donc $M = \frac{(1+xx).(1+yy)}{(x+y)^2}$. Soit l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(a+2by+cyy)}}=0$, dont l'intégrale complette est $AA(x-y)^2 - 2A(a+bx+by+cxy)+bb-ac=0$. On aura $M=(b+cx)\sqrt{(a+2by+cyy)}+(b+cy)\sqrt{(a+2bx+cxx)}$. De même connoissant l'intégrale complette $o=2A+(AA-1)(xx+yy)-2(1+AA)xy+2Axxyy$ (*) de l'équation $\frac{dy}{\sqrt{(1+x^4)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1+y^4)}}=0$, on pourra trouver le facteur qui rend cette derniere équation intégrable.

282. Remarquons encore que si S. M ($Pdx+Qdy$) est $=V$, à cause que dV étant multiplié par une fonction quelconque de V, l'équation $f(V)dV=0$, reste toujours intégrable, au lieu de M on pourra employer $Mf(V)$; de sorte qu'étant donné un multiplicateur qui rend une équation différentielle intégrable, on pourra en trouver une infinité d'autres qui la rendront intégrable, & parmi lesquels il sera bon de choisir celui qui rend la chose plus facile & qui donne une intégrale algébrique, sous la forme la plus simple. Or quoique l'intégrale d'une équation différentielle puisse être une quantité algébrique, il peut souvent se faire qu'on ne le soupçonne même pas à moins d'employer

(*) A est la constante arbitraire introduite par l'intégration.

un multiplicateur convenable, comme il eſt facile de le conclure des exemples qu'on vient de rapporter.

283. SOIT une équation différentielle de cette forme $\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0$, dans laquelle X eſt ſuppoſé une fonction de x ſans y, & Y une fonction de y ſans x, & ſoit ſuppoſé le multiplicateur qui rend cette équation intégrable $= M = \frac{XY}{(a+bx+cy)^2}$, afin d'avoir l'équation intégrable $\frac{Ydx + Xdy}{(a+bx+cy)^2} = 0$. Regardant y comme conſtant, on aura l'intégrale $= \frac{-Y}{b(a+bx+cy)} + f(y)$; mais en intégrant dans la ſuppoſition de x conſtant, il vient $\frac{-X}{c(a+bx+cy)} + F(x)$. Or ces deux intégrales devant évidemment être égales, on aura $-cY + bc(a+bx+cy)f(y) = -bX + bc(a+bx+cy).F(x)$, ou $bX - cY = bc(a+bx+cy).[F(x) - f(y)]$; ce qui fait voir que les fonctions $F(x)$ & $f(y)$ ſont telles, qu'après avoir développé le ſecond membre de l'équation qu'on vient de trouver, les termes qui contiendront en même-tems x & y doivent ſe détruire mutuellement. Cela fait comprendre que $F(x) = mbx +$ conſtante & $f(y) = mcy +$ conſtante.

Suppoſons donc $F(x) - f(y) = mbx - mcy + n$, l'on aura $bX - cY = bc(mbbxx - mccyy + nbx + ncy + mabx - macy + na + g - g)$; donc en égalant à bX tous les termes affectés de x, ajoutant à ces termes $g + \frac{na}{2}$; égalant à $-cY$ tous les termes affectés de y, ajoutant à ces termes $-g + \frac{1}{2}na$ & faiſant les opérations ordinaires, l'on aura $X = c\Big(mbbxx$

$+b(ma+n)x+g+\frac{na}{2}\Big)$. L'on aura aussi $Y=b\Big(mccyy$ $+c(ma-n)y+g-\frac{na}{2}\Big)$; donc l'équation intégrale algébrique sera $mcy-\left(\frac{mccyy-c(ma-n)y-g+\frac{1}{2}na}{a+bx+cy}\right)$ $=C$; & en ôtant la fraction, réduisant, écrivant $C+\frac{1}{2}n$ au lieu de C, transposant & réduisant encore, l'on aura l'intégrale complette & algébrique cherchée, exprimée par l'équation $mbcxy-\frac{1}{2}nbx+\frac{1}{2}ncy$ $-g=C(a+bx+cy)$.

284. SUPPOSONS maintenant que M est $=$ $\frac{XY}{(a+bx+cy+hxy)^2}$, notre équation sera $\frac{Xdy+Ydx}{(a+bx+cy+hxy)^2}=0$, dont l'intégration donne cette équation $\frac{-Y}{(b+hy).(a+bx+cy+hyx)}+$ $f(y)=\frac{-X}{(c+hx).(a+bx+cy+hxy)}+F(x)$. Multipliant & divisant les fonctions arbitraires par $(a+bx+cy+hxy)$, effaçant ensuite le diviseur commun & transposant, il vient $\frac{X}{c+hx}-\frac{Y}{b+hy}$ $=(a+bx+cy+hxy).[F(x)-f(y)]$. Maintenant j'observe qu'il ne doit rester à la fin aucun terme qui renferme en même-tems les deux variables : car autrement X & Y ne seroient pas tels qu'on les suppose dans le problême. Cela posé, je fais $F(x)$ $=\frac{mx+n}{c+hx}$ & $f(y)=\frac{my+N}{b+hy}$; donc on aura

$$\frac{X}{c+hx} - \frac{Y}{b+hy} = \begin{matrix} ny+ \\ +g \end{matrix} \frac{(a+bx)(mx+n)}{c+hx}$$

$$\begin{matrix} -Nx \\ -g \end{matrix} - \frac{(a+cy)(my+N)}{b+hy}.$$ Donc $X = (a + bx)(mx+n) - (c+hx)(Nx+g)$ & $Y = (a+cy)(my+N) - (b+hy)(ny+g)$; ou bien on aura $X = (bm - hN)xx + (am + bn - cN - hg)x + an - cg$, $Y = (cm - hn)yy + (am + cN - bn - hg)y + aN - bg$; & l'intégrale de l'*équation sera* $\frac{mx+n}{c+hx} - \frac{X}{(c+hx)(a+bx+cy+hxy)} = G$, ou en substituant la valeur de X, $\frac{mxy+ny+Nx+g}{a+bx+cy+hxy} = C$ constante.

285. Si l'on veut savoir maintenant dans quel cas on pourra intégrer l'équation $\frac{pdx}{Axx+Bx+C} + \frac{qdy}{Dyy+Ey+G} = 0$, on remarquera qu'en divisant le numérateur & le dénominateur de la premiere partie de l'équation par p, & en divisant de même le numérateur & le dénominateur de la seconde partie par q, on réduit cette équation à la forme ci-dessus; comparant ensuite les valeurs de X & de Y, trouvées ci-devant, avec celles que nous aurons ici, & en égalant les coefficients, des termes correspondans, il viendra $A = p(bm - hN)$; $B = p(am + bn - cN - hg)$; $C = p(an - cg)$; $D = q(cm - hn)$; $E = q(am + cN - bn - hg)$; $G = q(aN - bg)$.

La premiere équation donne $N = \frac{bm}{h} - \frac{A}{hp}$; la quatrieme donne $n = \frac{cm}{h} - \frac{D}{hq}$; la seconde & la

cinquieme donnent $g = \frac{am}{h} - \frac{Bq - Ep}{2hpq}$; & $h = \frac{2Acq - 2Dbp}{Bq - Ep}$; donc par la troisieme & la sixieme on conclut $\frac{2Cq(Acq - Dbp)}{Bq - Ep} = \frac{c}{2}.(Bq + Ep) - Dap$; & $\frac{2Gp(Acq - Dbp)}{Bq - Ep} = \frac{b}{2}.(Bq + Ep) - Aaq$. De-là en éliminant a, on conclut .... $\frac{2(ACqq - DGpp)(Aqc - Dbp)}{Bq - Ep} = \frac{1}{2}(Aqc - Dbp).(Bq + Ep)$. Divisant les deux membres de cette équation par $Aqc - pDb$, ôtant ensuite les fractions, il vient $4.(ACqq - DGpp) = BBqq - EEpp$, ou $\frac{4AC - BB}{pp} = \frac{4DG - EE}{qq}$. Ainsi toutes les fois que le rapport des constantes p, q, A, B, C, D, E, G sera tel qu'il en résultera l'équation que nous venons de trouver, l'équation différentielle, dont on vient de parler, sera intégrable, en la multipliant par le facteur M de la forme dont il est ici question.

286. PASSONS maintenant à l'équation $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, & soit supposé le multiplicateur qui peut la rendre intégrable $= M = p\sqrt{X} + q\sqrt{Y}$; de maniere que l'équation $pdx + qdy + \frac{qdx\sqrt{Y}}{\sqrt{X}} + \frac{pdy\sqrt{X}}{\sqrt{Y}} = 0$, soit intégrable. Supposons que les deux membres, celui qui ne renferme aucun radical, & celui qui est affecté de radicaux soient intégrables chacun séparément ; donc pour le premier membre on aura $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$. Je suppose ensuite que l'intégrale du second membre est $= 2V\sqrt{XY}$. Différenciant cette

quantité, en faisant varier x, & l'égalant ensuite à $\frac{q\,dx\sqrt{Y}}{\sqrt{X}}$, on trouvera $q = 2X\left(\frac{dV}{dx}\right) + V\frac{dX}{dx}$; différenciant la même quantité, en faisant varier y, & égalant la différentielle à $\frac{p\,dy\sqrt{X}}{\sqrt{Y}}$, on trouvera $p = 2Y\left(\frac{dV}{dy}\right) + V.\frac{dY}{dy}$. Si l'on différencie les valeurs de p & de q, & qu'on substitue les résultats dans l'équation $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, on aura $2Y\left(\frac{ddV}{dy^2}\right) + \frac{3dY}{dy}\left(\frac{dV}{dy}\right) + V\frac{ddY}{dy^2} = 2X\left(\frac{ddV}{dx^2}\right) + \frac{3dX}{dx} \times \left(\frac{dV}{dx}\right) + V\frac{ddX}{dx^2}$ (A). Maintenant par la nature de la fonction de x & y à laquelle on égalera V, on tâchera de déterminer les valeurs convenables de X & de Y.

Supposons $V = 1$, dans ce cas très-simple toutes les différentielles de V, indiquées dans l'équation A, s'évanouiront, & l'on aura $\frac{ddY}{dy^2} = \frac{ddX}{dx^2}$, égalité qui ne peut subsister qu'autant que l'un & l'autre membre seroit égal, séparément, à une constante que je ferai $= 2a$; d'où je conclus que $X = axx + bx + c$, & $Y = ayy + gy + e$, & de-là $p = \frac{dY}{dy} = 2ay + g$, & $q = \frac{dX}{dx} = 2ax + b$; donc l'intégrale complette est $2axy + gx + by + 2\sqrt{XY} = C$ constante. Ainsi l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(axx+bx+c)}} + \frac{dy}{\sqrt{(ayy+gy+e)}} = 0$ est rendue intégrable par le moyen du multiplicateur $M = (2ay+g)\sqrt{(axx+bx+c)} + (2ax+b) \times \sqrt{(ayy+gy+e)}$; & alors son intégrale complette

eſt $2axy + gx + by + 2\sqrt{[(axx+bx+c).(ayy+gy+e)]} = C$, ou en ôtant le radical, $CC - 2C(2axy + gx + by) = (4ae - gg)xx + (4ac - bb)yy + 4bex + 4cgy + 4ce$.

En donnant d'autres valeurs à V, en faiſant $V = \frac{1}{(a+bx+cy)^2}$, par exemple, cette ſuppoſition donneroit d'autres valeurs pour X & Y, mais nous ne propoſons pas d'épuiſer cette matiere.

287. REVENONS à l'équation différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$ & faiſons le multiplicateur $M = p + q\sqrt{XY}$, afin d'avoir l'équation intégrable $\frac{pdx}{\sqrt{X}} + qdy\sqrt{X} + \frac{pdy}{\sqrt{Y}} + qdx\sqrt{Y} = 0$ (A). Suppoſons que les deux premiers termes pris enſemble forment une formule intégrable, dont l'intégrale ſoit $= 2R\sqrt{X}$, tandis que les termes reſtans formeront une formule dont l'intégrale ſoit $= 2m\sqrt{Y}$; de maniere que l'intégrale complette ſoit repréſentée par l'équation $2R\sqrt{X} + 2m\sqrt{Y} = G$. Différenciant la premiere intégrale, & égalant au premier terme $\frac{pdx}{\sqrt{X}}$ les termes affectés de dx, & à $qdy\sqrt{Y}$ le terme affecté de dy, on trouvera aiſément $p = \frac{RdX}{dx} + 2X\left(\frac{dR}{dx}\right)$; $q = 2\left(\frac{dR}{dy}\right)$. Comparant la différentielle de la ſeconde intégrale avec les deux derniers termes de l'équation (A), on aura $p = m\frac{dY}{dy} + 2Y\left(\frac{dm}{dy}\right)$

$2Y\left(\frac{dm}{dy}\right)$. Il n'est pas non plus difficile de voir que q est $= 2\left(\frac{dm}{dx}\right)$; donc $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \left(\frac{dm}{dx}\right)$; donc la formule $R\,dx + m\,dy$ sera intégrable; mais il n'est pas nécessaire que son intégrale soit algébrique. Il n'est pas besoin d'avertir que les deux valeurs de p qu'on vient de trouver, doivent être égales.

Prenons $R = \frac{y}{a + bxy + cxxyy}$ & $m = \frac{x}{a + bxy + cxxyy}$, nous aurons $q = \frac{2a - 2cxxyy}{(a + bxy + cxxyy)^2}$ & $p = \frac{ydX}{dx(a + bxy + cxxyy)} - \frac{2Xyy(b + 2cxy)}{(a + bxy + cxxyy)^2}$; on a aussi $p = \frac{xdY}{dy(a + bxy + cxxyy)} - \frac{2Yxx(b + 2cxy)}{(a + bxy + cxxyy)^2}$. Donc on aura $(a + bxy + cxxyy)^2 . p = \frac{ydX}{dx} . (a + bxy + cxxyy) - 2yyX . (b + 2cxy) = \frac{xdY}{dy} . (a + bxy + cxxyy) - 2xxY(b + 2cxy)$, équation que j'appellerai (H).

Supposons $X = Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E$, & $Y = A'y^4 + 2B'y^3 + C'y^2 + 2D'y + E'$: en substituant dans l'équation (H) les valeurs de X, dX, Y, dY, que donnent ces suppositions, on verra qu'elle ne peut avoir lieu qu'autant que $b = 0$; $B = 0$; $B' = 0$; $D = 0$; $D' = 0$ (*);

(*) Car après avoir égalé les termes qui contiennent les mêmes puissances de x & de y, dans les deux membres de l'équation, il restera d'un côté $2Day$ & de l'autre côté le terme $2D'ax$, qu'on ne peut supposer

& alors on a $-2cCx^3y^3+4aAx^3y-4cExy^3+2aCxy=-2cC'x^3y^3+4aA'xy^3-4cE'x^3y+2aC'xy$. Egalant les termes qui contiennent les mêmes variables avec les mêmes exposans, nous aurons $C=C'$; $\frac{a}{c}=\frac{-E'}{A}=\frac{-E}{A'}$, ce qui donne $A'E'=AE$; on aura encore $E'=\frac{-a}{c}\cdot A$ & $E=\frac{-a}{c}\cdot A'$. On aura donc $X=Ax^4+Cxx-\frac{aA'}{c}$; $Y=A'y^4+Cyy-\frac{aA}{c}$; & l'intégrale complette de l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(Ax^4+Cx^2-\frac{a}{c}A')}}+\frac{dy}{\sqrt{(A'y^4+Cyy-\frac{a}{c}A)}}=0$, sera

$$y\sqrt{\left(Ax^4+Cxx-\frac{a}{c}A'\right)}+x\sqrt{\left(A'y^4+Cyy-\frac{a}{c}A\right)}=G.(a+cxxyy);$$

G étant une constante introduite par l'intégration.

288. Par les exemples qu'on vient de rapporter, il est évident qu'on peut trouver une infinité de multiplicateurs qui rendent une équation intégrable, & cela en supposant que le multiplicateur qu'on a employé a

égaux dans tous les cas qu'en faisant $D=D'=0$; puisque a est supposé réel. Il restera encore d'un côté $6Bayx^2$, & de l'autre côté $6B'axy^2$ qui exigent que l'on ait $B=B'=0$. Il restera aussi d'un côté $-2yybE$ & $-2xxbE'$ de l'autre qui demandent que b soit $=0$; car E & E' sont supposés réels.

les conditions requiſes. On peut auſſi trouver une infinité d'équations intégrables, en ſuppoſant, qu'après avoir multiplié une équation différentielle par un multiplicateur qu'on ſuppoſera convenable, ſon intégrale eſt trouvée & exprimée analytiquement; mais il ſeroit à ſouhaiter qu'on inventât les régles d'une eſpece de nouvelle analyſe, pour faire cés ſortes d'opérations dans un certain ordre.

Méthode pour trouver dans une infinité de cas l'intégrale finie d'une équation quelconque, par une ſeule intégration.

289. LA méthode d'intégrer, dont il s'agit ici, eſt fondée ſur le théorême ſuivant : *Une équation différentielle ſe réduit, par l'intégration, à autant d'équations différentielles d'un ordre immédiatement inférieur, que l'ordre de cette équation contient d'unités; c'eſt-à-dire que, m déſignant un nombre entier poſitif, une équation différentielle de l'ordre m ſe réduira, par l'intégration, à un nombre m d'équations de l'ordre m — 1.* Ce théorême ſuit évidemment de ce que nous avons dit ci-deſſus (208). Toutes les fois que ces équations ſont différentes entr'elles, on peut, en les comparant, trouver l'intégrable finie de la propoſée. Si quelques-unes ſont les mêmes, on ne peut pas alors, par une ſeule intégration, parvenir à l'intégrale finie cherchée. Les problêmes ſuivans feront connoître l'artifice & l'utilité de cette méthode.

290. PROBLEME. *Intégrer l'équation du ſecond ordre :* $a^2 y\,ddy + ba^2 dy^2 = y^2 dx^2$. Suppoſons que l'intégrale de cette équation eſt $ay^p dy$

$+ ny^r dx = AN^{\frac{mx}{a}} dx$, N étant supposée le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$ (dans tout ce que nous dirons sur la méthode actuelle N aura la même valeur), p, n, r, m étant des constantes qu'il s'agit de déterminer. La différentielle de l'intégrale supposée est $ay^p ddy + pay^{p-1} dy^2 + nry^{r-1} dydx = \frac{m}{a} . A . N^{\frac{mx}{a}} dx^2 = my^p dydx + \frac{mn}{a} y^r dx$, à cause de $AN^{\frac{mx}{a}} dx = ay^p dy + ny^r dx$; donc en multipliant par ay^{1-p} (*) & transposant, on aura $a^2 yddy + pa^2 dy^2 + + nray^{r-p} dydx - amydydx = mny^{r-p+1} dx^2$. Comparant maintenant ce résultat avec l'équation proposée, on trouve $a^2 yddy = a^2 yddy$, ce qui ne fait rien connoître. On a encore $pa^2 dy^2 = ba^2 dy^2$, d'où l'on tire $p = b$; & parce que la proposée ne contient aucun terme qui renferme $dydx$, & que d'ailleurs $r - p$ est $= 1$, comme on va le faire voir, on a $nra - am = 0$, ou $nr = m$. Mais à cause de $mny^{r-p+1} = y^2$, on doit avoir $r - p + 1 = 2$, $r - p = 1$, ou $r = p + 1 = b + 1$, $mn = 1$ & $n = \frac{1}{m}$; donc $nr = \frac{r}{m}$. De plus à cause de $r = b + 1$ l'équation $nr = m$ donnera $b + 1 = m^2$ & par conséquent $m = \pm \sqrt{(b + 1)}$; mais $n = \frac{1}{m}$;

(*) On fait cette multiplication, afin que le premier terme de la nouvelle équation, qu'on va trouver, soit égal au premier terme de la proposée. On suppose aussi dx constant.

donc $n = \frac{1}{\pm\sqrt{(b+1)}}$. Substituant successivement les deux valeurs de m & de n dans l'intégrale supposée ci-dessus, nous aurons deux équations différentielles du premier degré, savoir, $ay^b dy + \frac{1}{\sqrt{(b+1)}} \cdot y^{b+1} dx = A.N^{\frac{x\sqrt{(b+1)}}{a}} dx$, & $ay^b dy - \frac{1}{\sqrt{(b+1)}} \cdot y^{b+1} dx = BN^{\frac{-x\sqrt{(b+1)}}{a}} dx$. Nous avons mis une nouvelle constante B dans la derniere équation, afin que l'intégrale finie puisse renfermer deux constantes arbitraires. Retranchant la derniere de ces équations de la premiere, multipliant par $\sqrt{(b+1)}$, divisant par $2dx$ & disposant convenablement le résultat, il viendra $y^{b+1} = \frac{\sqrt{(b+1)}}{2} \cdot \left(A.N^{\frac{x\sqrt{(b+1)}}{a}} - B.N^{\frac{-x\sqrt{(b+1)}}{a}}\right)$; ou $y^{b+1} = CN^{\frac{x\sqrt{(b+1)}}{a}} - DN^{\frac{-x\sqrt{(b+1)}}{a}}$ en faisant $\frac{\sqrt{(b+1)}}{2} \cdot A = C$ & $\frac{B.\sqrt{(b+1)}}{2} = D$.

Si b est une quantité négative $= -g-1$, on aura $y^{b+1} = y^{-g} = C\left(cos. \frac{x\sqrt{g}}{a} + \sqrt{(-1)}. fin. \frac{x\sqrt{g}}{a}\right) - D\left(cos. \frac{x\sqrt{g}}{a} -\right.$

$\sqrt{(-1)}.\text{fin.}\frac{x\sqrt{g}}{a}$) (*) $=$ E. $\text{cof.}\frac{x\sqrt{g}}{a}+$ F.$\text{fin.}\frac{x\sqrt{g}}{a}$, en faisant $C-D=E$ & $(C+D)\times\sqrt{-1}=F$. Si b est $=-1$, on aura $\frac{1}{\sqrt{(b+1)}}=\infty$. Dans ce cas on supposera que l'intégrale de la proposée est $\frac{dy}{y}=\frac{(x+f)}{a^2}dx$, f étant une constante arbitraire; & en intégrant de nouveau, on aura $cy=N^{\frac{(xx+2fx)}{2aa}}$, c étant une constante arbitraire.

291. PROBLEME. *Intégrer l'équation* $yx^2ddy+bx^2dy^2+cyxdxdy=ay^2dx^2$. Supposons que l'intégrale cherchée est de cette forme $y^pdy+ny^qx^rdx=Ax^tdx$; prenant la différentielle de cette intégrale, la multipliant par $y^{1-p}x^{1-r}$, remettant la valeur de Ax^tdx & disposant convenablement les termes, il vient $yx^{1-r}ddy+px^{1-r}dy^2+nqy^{q-p}xdydx-tyx^{-r}dydx=(t-r).ny^{q-p+1}dx^2$. Si l'on compare cette équation avec la proposée, on aura $r=-1$, $p=b$, $q-p=1$, ou $q=b+1$, $nq-t=c$ & $n(b+1)=c+t$. On a aussi $n.(t-r)=nt+n=a$, & par conséquent $(t+1).(t+c)=a.(b+1)$, d'où l'on tire $t=-\frac{(c+1)}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{(c-1)^2}{4}+a.(b+1)\right]}$ &

(*) Voyez la premiere partie de cet Ouvrage courbes transcendentes (n°. 2.)

$$n = \frac{c-1 \pm 2\sqrt{\left[\frac{(c-1)^2}{4} + a(b+1)\right]}}{2(b+1)}.$$ Donc en faisant $f = 2\sqrt{\left[\frac{(c-1)^2}{4} + a.(b+1)\right]}$; on aura $t = \frac{-(c+1) \pm f}{2}$ & $n = \frac{c-1 \pm f}{2(b+1)}$. Ayant donc substitué les valeurs de p, n, q, r, t, il viendra deux équations du premier degré, savoir, $y^b dy + \frac{c-1+f}{2(b+1)}.y^{b+1}x^{-1}dx = A.x^{\frac{-(c+1)+f}{2}}dx$, & $y^b dy + \frac{c-1-f}{2(b+1)}y^{b+1}x^{-1}dx = B.x^{\frac{-(c+1)-f}{2}}dx$. Retranchant la seconde de la premiere, multipliant par x & par $\frac{b+1}{f}$, faisant $C = \frac{A(b+1)}{f}$, $D = \frac{B.(b+1)}{f}$ & disposant convenablement les termes, on trouvera $y^{b+1} = x^{\frac{1-c}{2}}\left[Cx^{+\sqrt{\left(\frac{(c-1)^2}{4}+a(b+1)\right)}} - Dx^{-\sqrt{\left(\frac{(c-1)^2}{4}+a(b+1)\right)}}\right]$, équation que je désignerai par (P). Lorsque $f = 0$, les deux équations du premier degré que nous avons trouvées ci-devant, ne différant que par les constantes A & B, ne peuvent rien faire connoître. Dans ce cas on multipliera la premiere de ces équations par $x^{\frac{c+1}{2}}$ & l'intégrant ensuite, en

ajoutant une constante, on trouvera $\frac{y^{b+1}}{b+1} x^{\frac{c-1}{2}} = Ax. + B$. Si f est une quantité imaginaire $= p\sqrt{-1}$ & qu'on fasse $x = N^z$, dans ce cas l'intégrale P devient $y^{b+1} = x^{\frac{1-c}{2}} \left(CN^{z.p\sqrt{-1}} - DN^{-zp\sqrt{-1}}\right)$ équation qui se change en celle-ci $y^{b+1} x^{\frac{c-1}{2}} = C(cos. pz + \sqrt{-1}. sin. pz) - D(cos. pz - \sqrt{-} sin. pz)$ (*). D'où, en faisant $C - D = E$ & $(C+D)\sqrt{-1} = F$, on tire $y^{b+1} x^{\frac{c-1}{2}} = E. cos. pz + F. sin. pz = E. cos. pL. x + F. sin. pL. x$; car de l'équation $x = N^z$ on tire $zL. N = L. x$, ou $z = L. x$, à cause de $L. N = 1$.

292. PROBLEME. *Intégrer l'équation du troisieme degré* $d^3y + adyddy = bdy^3$. Supposons que l'intégrale cherchée est $N^{my}(ddy + qdy^2) = Adx^2$; prenant la différentielle de cette intégrale (& faisant attention qu'à cause de dx constant, la différentielle du second membre est $= 0$), divisant ensuite par N^{my}, il viendra $d^3y + (2q + m) dyddy + mqdy^3 = 0$, transposant le dernier terme de cette équation, & la comparant ensuite avec la proposée, on trouve $a = 2q + m$ & $-mq = b$; donc $ma = 2mq + mm = -2b + mm$, ou $mm - ma = 2b$ & $m = \frac{a + \sqrt{(a^2 + 8b)}}{2} = \frac{a \pm g}{2}$ & $q = \frac{a \mp g}{4}$, en

(*) Voyez la premiere partie de cet Ouvrage, courbes transcendantes (n°. 2).

faiſant $\sqrt{(a^2 + 8b)} = g$. Cela poſé, on aura les deux équations ſuivantes du ſecond degré

$$ddy + \frac{a+g}{4} dy^2 = A.N^{\frac{(g-a).y}{2}} dx^2 \text{ \&}$$

$$ddy + \frac{a-g}{4} dy^2 = B.N^{\frac{-(g+a).y}{2}} dx^2,$$

d'où, en ôtant la ſeconde de la premiere, il eſt aiſé de tirer $\frac{gdy^2}{2} = N^{\frac{-ay}{2}} dx^2 . \left(A.N^{\frac{gy}{2}} - B.N^{\frac{-gy}{2}} \right)$, équation que nous déſignerons par P, & qu'il eſt facile de réduire au premier degré par l'extraction des racines. En faiſant $\sqrt{\frac{g}{2}} = c$, $\sqrt{\left[N^{\frac{-ay}{2}} \left(A.N^{\frac{gy}{2}} - B.N^{\frac{-gy}{2}}\right)\right]} = p$, on aura $cdy = pdx$ & $\frac{cdy}{p} = dx$, équation ſéparée, puiſque p eſt une fonction de y & que c eſt une conſtante.

Si $g = 0$, ce qui arrive lorſque $aa = -8b$ (par exemple, ſi a eſt $= 4$ & $b = -2$), on multipliera la premiere des équations du ſecond degré trouvées ci-deſſus par $2dy$ & la diviſant par $N^{\frac{-ay}{2}}$, il viendra $N^{\frac{ay}{2}} \left(2dyddy + \frac{a}{2} dy^3\right) = 2Adydx^2$, dont l'intégrale eſt $N^{\frac{ay}{2}} dy^2 = (2Ay + D) dx^2$. Si l'on prend

la valeur de dy^2 dans cette derniere équation & qu'on l'égale à la valeur de dy^2 prise dans l'équation P, qu'on divise ensuite par dx^2, on aura une équation qui contiendra l'intégrale finie de la proposée.

Si g est imaginaire & $= n\sqrt{-1}$, alors de l'équation P on tirera aisément $N^{\frac{ay}{2}} dy^2 = \frac{2dx^2}{n\sqrt{-1}} \left[A.\left(cos.\frac{ny}{2} + \sqrt{-1}.sin.\frac{ny}{2}\right) - B\left(cos.\frac{ny}{2} - \sqrt{-1}.sin.\frac{ny}{2}\right)\right] = dx^2 \left(E \times cos.\frac{ny}{2} + F.sin.\frac{ny}{2}\right)$, en faisant $E = \frac{2(A-B)}{n\sqrt{-1}}$ & $F = \frac{2(A+B)}{n}$. Il sera donc facile de parvenir à une équation du premier degré dans laquelle les variables seront séparées.

293. REMARQUE I. Ce qu'on vient de dire a également lieu pour l'équation $y^2d^3y + aydyddy = bdy^3$ (A): car en faisant $y = N^z$, & prenant les valeurs de y, dy, ddy, d^3y, que donne cette supposition, divisant ensuite par N^z & substituant, l'équation A deviendra $d^3z + (a+3)dzddz = (b-a-1)dz^3$ qui a la même forme que celle dont on vient de parler.

294. REMARQUE II. La difficulté de cette méthode consiste à trouver la forme qu'on doit donner à l'intégrale de la différentielle proposée pour que cette intégrale, étant différenciée, on puisse trouver un résultat, qui étant comparé à la proposée, fasse connoître les exposans & les coefficients de cette intégrale : or pour celà je

ne crois pas qu'on ait encore trouvé de méthode générale; ce n'est guere que l'habitude du calcul, ou le hasard qui peut faire rencontrer juste.

295. ON peut employer la même méthode lorsqu'il s'agit de trouver les conditions nécessaires pour qu'une équation d'un ordre supérieur puisse être abaissée à un ordre du moins inférieur d'une unité.

296. PROBLEME. *Dans quel cas l'équation* $d^4y + adyd^3y + bddy^2 + cdy^2ddy = fdy^4$ *peut être abaissée d'un degré?* Soit supposée $N^{my}(d^3y + pdyddy + qdy^3) = Adx^3$, l'intégrale de la proposée. Ayant pris la différentielle de cette intégrale supposée & l'ayant divisée par N^{my}, on trouvera aisément $d^4y + (m+p)dyd^3y + pddy^2 + (mp + 3q) \times dy^2ddy = -mqdy^4$. En comparant cette équation avec la proposée, l'on aura $a = m + p$, $b = p$, $c = 3q + mp$ & $f = -mq$; d'où l'on tire les deux équations $m = a - b$ & $m^2b = mc + 3f$. Si dans cette derniere équation on substitue la valeur de m prise dans l'avant-derniere, il viendra $(a-b)^2 . b = (a-b) . c + 3f$. Si cette condition a lieu, la proposée pourra se réduire à l'équation du troisieme degré $N^{(a-b)y}(d^3y + bdyddy + \frac{f}{b-a}dy^3) = Adx^3$.

297. PROBLEME. *Trouver dans quel cas l'équation générale* $a^n d^n y + ba^{n-1}d^{n-1}ydx + a^{n-2}d^{n-2}ydx^2 \ldots + Rydx^n = pdx^n$, *p étant une fonction de x sans y & dx étant*

supposé constant, peut se réduire à autant d'équations de l'ordre $n-1$ que le nombre n contient d'unités. Supposons que l'intégrale de la proposée est de cette forme $a^n d^{n-1} y + a' a^{n-1} d^{n-2} y dx + b' a^{n-2} d^{n-3} y dx^2 \ldots\ldots + H a y dx^{n-1} = z dx^{n-1}$, & soit supposée $z = u \left(S. \frac{pdx}{u} + A\right)$, u étant une fonction de x sans y & A une constante. En différenciant cette intégrale supposée, nous aurons $a^n d^n y + a'. a^{n-1} d^{n-1} y dx + b' a^{n-2} d^{n-2} y dx^2 \ldots\ldots + H a dy dx^{n-1} = du dx^{n-1} \left(S. \frac{pdx}{u} + A\right) + p dx^n$. Mais $du. dx^{n-1} \left(S. \frac{pdx}{u} + A\right) = \frac{du}{u} . dx^{n-1} u \times \left(S. \frac{pdx}{u} + A\right) = \frac{du}{u} . z dx^{n-1}$. Donc en transposant la quantité du $dx^{n-1} \left(S. \frac{pdx}{x} + A\right)$, lui substituant ensuite la valeur que nous venons de trouver, & mettant dans cette valeur celle de $z dx^{n-1}$ prise de l'intégrale supposée, on aura $a^n d^n y + a'. a^{n-1} d^{n-1} y dx + b'. a^{n-2} d^{n-2} y dx^2 \ldots\ldots + H a dy dx^{n-1} - \frac{du}{u} (a^n d^{n-1} y + a'. a^{n-1} d^{n-2} y dx + b' a^{n-2} d^{n-3} y dx^2 \ldots\ldots + H a y dx^{n-1}) = p dx^n$.

Si l'on compare maintenant cette équation avec la proposée, on trouvera facilement $a' dx - \frac{adu}{u} = b dx$, en égalant les quantités qui

multiplient $d^{n-1}y$ dans les deux équations; donc $(a'-b)\,dx = \frac{a\,du}{u}$, ou $m\,dx = \frac{a\,du}{u}$ (en supposant $m = a'-b$); donc $mx = a\,\mathrm{L}.u$, ou $mx\,\mathrm{L.N} = a.\,\mathrm{L}.u$, ou $\frac{mx}{a}.\,\mathrm{L.N} = \mathrm{L}.u$; ou $u = \mathrm{N}^{\frac{mx}{a}}$; donc $z = \mathrm{N}^{\frac{mx}{a}}\left(\mathrm{S.N}^{\frac{-mx}{a}}\,p\,dx + \mathrm{A}\right)$. Puisque $m = a' - b$, on a $a' = m + b$. En continuant la comparaison on trouve $b' = c + a'(a'-b) = m^2 + mb + c$ & $\mathrm{H} = m^{n-1} + bm^{n-2} + cm^{n-3} \ldots\ldots + \mathrm{F}m + \mathrm{G}$. Et parce que $\mathrm{R} + \mathrm{H}(a'-b)$ est $= \mathrm{H}m + \mathrm{R} = 0$; si l'on substitue la valeur de H, on aura $m^n + bm^{n-1} + cm^{n-2} \ldots\ldots + \mathrm{G}m + \mathrm{R} = 0$ (V). Supposant que par le moyen de cette équation on connoisse toutes les valeurs de m, on aura aisément celles de a', b' ..... H qui feront connoître l'intégrale supposée. De plus, toutes les fois que les valeurs de m, que donne l'équation V seront toutes inégales, on pourra trouver autant d'équations de l'ordre $n-1$ que n contient d'unités, ainsi le problême est résolu.

298. MAIS pour ne laisser aucun embarras aux commençans, supposons que la proposée soit du quatrieme ordre, & que les valeurs de m que donne alors l'équation V soient e, f, g, i. Si l'on substitue successivement ces valeurs à la place de m, & qu'on fasse attention que dans une équation le coefficient du second terme doit être égal à la somme des racines prises avec un signe contraire, que celui du troisieme doit être égal à la somme des produits des racines prises deux

à deux, &c. & que pour plus de commodité on fasse $N^{\frac{ex}{a}}\left(A+S.N^{\frac{-ex}{a}}pdx\right)=Q$, $N^{\frac{fx}{a}}\left(B+S.N^{\frac{-fx}{a}}pdx\right)=R$, $N^{\frac{gx}{a}}\times\left(C+S.^{\frac{-gx}{a}}pdx\right)=R'$ & $N^{\frac{ix}{a}}\left(D+S.N^{\frac{-ix}{a}}pdx\right)=T$, on aura les quatre équations suivantes du troisieme ordre:

$a^4d^3y-(f+g+i)a^3ddydx+(fg+fi+gi)a^2dydx^2-fgiaydx^3=Q.dx^3$ (*).

$a^4d^3y-(e+g+i)a^3ddydx+(eg+ei+gi)a^2dydx^2-egiaydx^3=R.dx^3$.

$a^4d^3y-(e+f+i)a^3ddydx+(ef+fi+ei)a^2dydx^2-efiaydx^3=R'.dx^3$.

$a^4d^3y-(e+f+g)a^3ddydx+(ef+fg+eg)a^2dydx^2-efgaydx^3=T.dx^3$.

Maintenant si de la premiere de ces équations on retranche successivement la seconde, la troisieme & la quatrieme, on trouvera aisément (après les opérations convenables) les équations.

$$a^3ddy-(g+i)a^2dydx+giaydx^2=\frac{Qdx^2}{e-f}+\frac{R.dx^2}{f-e}.$$

(*) Si l'on veut connoître la quantité a' qui doit affecter le second terme, l'équation $a'=m+b=e-(e+f+g+i)$, en supposant $m=e$, donnera $a'=-(f+g+i)$; car $b=-(e+f+g+i)$ il est aisé de voir que la même supposition donne $b'=(fg+fi+gi)$, &c.

$$a^3 ddy - (f+i)\, a^2 dy dx + fi a y dx^2 = \frac{Q dx^2}{e-g} + \frac{R' dx^2}{g-e}.$$

$$a^3 ddy - (f+g)\, a^2 dy dx + fg a y dx^2 = \frac{Q dx^2}{e-i} + \frac{T dx^2}{i-e}.$$

Par une opération semblable sur celles-ci, on trouve

$$a^2 dy - i a y dx = \frac{Q dx}{(e-f)(e-g)} + \frac{R dx}{(f-e)(f-g)} + \frac{R' dx}{(g-e)(g-f)}.$$

$$a^2 dy - g a y dx = \frac{Q dx}{(e-f)(e-i)} + \frac{R dx}{(f-e)(f-i)} + \frac{T dx}{(i-e)(i-f)}.$$

Retranchant la derniere de ces équations de la premiere, & faisant les opérations convenables, il vient $a y = \frac{Q}{(e-f)(e-g)(e-i)} + \frac{R}{(f-e)(f-g)(f-i)} + \frac{R'}{(g-e)(g-f)(g-i)} + \frac{T}{(i-e)(i-f)(i-g)}$; c'est-là l'intégrale complette & finie de la proposée dans la supposition que $n = 4$ & que les valeurs de m sont telles qu'on l'a supposé. On doit faire attention que R n'a pas ici la même signification que dans l'équation V (n°. 297).

299. PROBLEME. *Intégrer l'équation* $ddy + c^2 y dx^2 = p dx^2$ *(*p *étant une fonction de* x *sans* y *&* c *une constante), à l'intégration de laquelle se réduit le fameux problême des trois corps.*

On a ici $n = 2$, $a = 1$, $b = 0$, $m^2 + R =$

$m^2 + c^2 = 0$; d'où l'on tire $m = \pm c\sqrt{-1}$; donc supposant les deux équations de l'ordre $n-1$ représentées par $dy \pm c\sqrt{-1}.ydx = zdx$, on aura $z = N^{cx\sqrt{-1}}(A + S.N^{-cx\sqrt{-1}}pdx)$ & $z = N^{-cx\sqrt{-1}}(B + S.N^{cx\sqrt{-1}}pdx)$; & par un procédé semblable à celui qu'on a suivi ci-dessus, on trouvera $y = [N^{cx\sqrt{-1}}(A + S.N^{-cx\sqrt{-1}}pdx) - N^{-cx\sqrt{-1}}(B + S.N^{cx\sqrt{-1}}pdx)] : 2c\sqrt{-1}$*; donc $2cy = \frac{(A-B).\,cof.\,cx}{\sqrt{-1}} + (A+B).\,fin.\,cx + 2\,fin.\,cx.\,S.\,cof.\,cx.\,pdx. - 2\,cof.\,cx.\,S.\,fin.\,cx.\,pdx$. Donc en faisant $\frac{B-A}{\sqrt{-1}} = 2D$, $A + B = 2.C$, on aura $cy = fin.\,cx\,(C + S.\,cof.\,cx.\,pdx.) - cof.\,cx\,(D + S.\,fin.\,cx.\,pdx)$.

300. PROBLEME. *Soit enfin l'équation* $ddy - \frac{dy\,dX}{X} = yX^2.dx^2$, *dont on demande l'intégrale, en supposant que* dx *est constant & que* X *est une fonction de* x *sans* y. Soit supposée l'intégrale cherchée représentée par $dy + X^p y dx = AX^q N^{mS.Xdx}$ (P). En différenciant cette

(*) Ces deux points indiquent une division.

équation

équation, ſubſtituant dans le réſultat, la valeur de A priſe de l'équation P, tranſpoſant & arrangeant les termes, on aura $ddy + X^p dy dx - mXdxdy + (p-q).X^{p-1} y dX dx - \frac{q dX dy}{X} = m.X^{p+1} y dx^2$. En comparant les termes de cette équation avec les termes homologues de la propoſée, on trouve $p = q = 1$, $1 - m = 0$ & $m = 1$; donc notre intégrale ſuppoſée ſera $dy + yXdx = AXN^{SXdx}$, par le moyen de laquelle nous ne pouvons pas parvenir à l'intégrale finie & complette de la propoſée. Mais en ſuppoſant que l'intégrale eſt $dy + nyXdx = AX^q N^{SXdx}$, nous trouverons $ddy + nX^p dy dx - mXdydx + n(p-q).X^{p-1} ydXdx - \frac{q dX dy}{X} = mnX^{p+1} y dx^2$. Si l'on compare cette équation avec la propoſée, on aura $p = q = 1$, $n = m$, $mn = 1$; donc $nn = mm = 1$ & $n = m = \pm 1$. De-là viennent les deux équations du premier degré $dy + yXdx = AXN^{SXdx} dx$ & $dy - yXdx = BX.N^{-S.Xdx} dx$; d'où l'on tire $2y = AN^{S.Xdx} - BN^{-S.Xdx}$. Cette intégrale contenant deux quantités arbitraires A & B eſt complette.

Des trajectoires orthogonales.

301. Le problême des trajectoires orthogonales, qui

a long-tems exercé la sagacité des Géomètres, peut se proposer ainsi.

Etant supposée une infinité de lignes MN, *mq* (*fig.* 1.) *formées par une loi commune, on demande une ligne* BD *qui les coupe toutes à angles droits.*

Il est visible que si du point D on abaisse l'ordonnée DP perpendiculaire sur la ligne des abcisses AP, dont l'origine soit supposée en A, DT sera la tangente, & PT la sous-tangente de la ligne MD, qui est une de celles qui doivent être coupées par la ligne cherchée BD. Mais PT est la sous-normale de BD, & P*b* en est la sous-tangente. Ayant mené D*n* = P*p* = dx parallele à la ligne des abcisses, je fais PD = y, *n*N = dy'; mais je fais *nq* (différentielle de l'ordonnée par rapport à la secante) = $-dy$. Maintenant parce D*n* est une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit D du triangle rectangle ND*q* sur l'hypothenuse N*q*, on a $dy' : dx :: dx : -dy$; donc $dy' = -\frac{dx^2}{dy}$. Cela posé, on pourra chercher l'expression de la sous-normale PT de la secante; laquelle sera $= -\frac{ydy}{dx}$, parce qu'elle est négative par rapport à la sous-tangente PT, & qu'elle est prise en allant vers l'origine A des x. Egalez cette expression avec celle de la sous-tangente PT, ayant soin d'exprimer celle-ci en x & y, de maniere que le paramètre p de la courbe MD ne s'y trouve pas, & vous aurez l'équation cherchée : ou bien cherchez la valeur de dy' que je suppose = Mdx, chassez p de M par le moyen de l'équation de la courbe qui doit être coupée & faites ensuite $Mdx = -\frac{dx^2}{dy}$, cette équation donnera celle de la courbe. Le paramètre p est une ligne constante dans chaque courbe, mais qui varie d'une courbe à l'autre; de maniere que p n'est pas le même pour mq & pour MD. Mais si ces deux courbes ne différent qu'infiniment peu l'une de l'autre, le paramètre de DM sera $= p + dp$, celui de mq étant $= p$.

302. PROBLEME. *Supposant que les courbes* A q, A D, *&c.* (*fig.* 2.) *représentent une infinité de paraboles qui aient même sommet, & dont l'équation soit* $p^{m-1}x = y^m$, p *étant un paramètre qui varie d'une parabole à l'autre, on demande la nature de la courbe* B q D *qui les coupe toutes à angles droits.*

Je différencie cette équation en regardant p comme constant, & j'ai $p^{m-1}dx = my^{m-1}dy'$; donc $dy' = \frac{p^{m-1}dx}{my^{m-1}} = \frac{-dx^2}{dy}$. Donc $p^{m-1} = \frac{-my^{m-1}dx.}{dy}$. Mais par la nature des paraboles $p^{m-1} = \frac{y^m}{x}$; donc $\frac{y^m}{x} = \frac{-my^{m-1}dx}{dy}$, ou $ydy = -mxdx$, & en intégrant $y^2 = m.(A^2 - x^2)$, équation à l'ellipse d'Appollonius qu'on pourra construire ainsi : ayant pris A B = A, constante arbitraire, menez la normale A a = A $\sqrt{m}$, & par le moyen des deux demi-axes A B, A a, décrivez l'ellipse B a; cette courbe coupera toutes les paraboles A q, A D, &c. à angles droits.

REMARQUE. Nous n'avons pas égalé explicitement la sous-tangente P T des paraboles avec l'expression de la sous-normale de la maniere dont on l'a dit ci-dessus; mais on auroit trouvé la même chose par cette méthode, car la sous-tangente des paraboles est mx, donc en faisant $mx = -\frac{ydy}{dx}$, on aura $ydy = -mxdx$ comme auparavant.

303. PROBLEME. *Soit supposé une infinité de cercles* A D N *qui aient un même sommet* A, *mais différens diamètres* A N = $2p$ (*fig.* 3), *on demande la courbe qui les coupe tous à angles droits.* L'équation des cerles sera $2px - xx = y^2$, dont la différentielle (en regardant p comme constant) donne $pdx - xpx = ydy'$; $\frac{pdx - xdx}{y} = dy' = \frac{-dx^2}{dy}$: mais $p = \frac{x^2 + y^2}{2x}$.

par la nature du cercle ; donc en ſubſtituant, multipliant par y, diviſant par dx, réduiſant les fractions à leur plus ſimple expreſſion, il viendra $\frac{x\,dy}{2} + \frac{y^2\,dy}{2x} - x\,dy = -y\,dx$, ou $dy = \frac{xx\,dy - 2yx\,dx}{yy}$; donc en intégrant, $y = A - \frac{xx}{y}$, ou $xx = Ay - yy$, équation au cercle qu'on conſtruit ainſi : ayant élevé une perpendiculaire Aa à l'extrémité A du diamètre AN, prenez Aa à volonté pour diamètre, & décrivez le demi-cercle ADa qui coupera les cercles propoſés à angles droits (*).

La méthode, dont on vient de parler eſt générale lorſque les courbes qui doivent être coupées ſont algébriques ; mais elle réuſſit rarement ſi elles ſont tranſcendantes, parce qu'il eſt rare qu'on puiſſe alors exprimer p en x & y.

304. PROBLEME. *Soit* amH (*fig.* 4.) *une demi-cycloïde dont le cercle générateur ait un diamètre* $= 2a$, *ſi on prend les abciſſes* $HP = x$ *ſur la tangente* Hn, *& qu'on faſſe* Pm (*parallele à* AH) $= z$, *l'équation de la cycloïde ſera* $dx = \frac{dz\,\sqrt{(2a - z)}}{\sqrt{z}} = \frac{dz.\sqrt{(2az - zz)}}{z}$ (**). *Suppoſons maintenant qu'on décrive une infinité de courbes* NM, *dont les ordonnées* $PD = y$ *ſoient réciproques à*

(*) On peut démontrer cette propriété par la Géométrie Elémentaire ; car ſi du point D on mene les rayons Dc, DC aux centres des cercles, & qu'on tire cC, les triangles CDc, CAc auront tous leurs côtés égaux, à cauſe de CD = CA & de Ac = Dc, donc ces triangles ſont équiangles ; donc l'angle CDc eſt = CAc ; mais celui-ci eſt droit, donc l'autre l'eſt auſſi ; donc CD eſt tangente du demi-cercle ADa & cD tangente du demi-cercle ADN ; ainſi ces demi-cercles ſe coupent à angles droits.

(**) Voyez la ſection précédente, n°. 15.

z, de maniere que l'on ait $y = \frac{pp}{z}$, ou $yz = pp$, on demande la courbe B D *qui coupe toutes ces transcendantes* MN *à angles droits.*

Différenciant l'équation de la courbe M N, en regardant p comme constant, on trouve $dy' = \frac{-ppdz}{z^2}$ $= \frac{-ydz}{z}$, à cause de $pp = yz$; donc $\frac{-ydz}{z} =$ $dy' = \frac{-dx^2}{dy} = \frac{-dz^2(2a-z)}{zdy}$, en substituant la valeur de dx, prise de l'équation de la cycloïde, & $ydy = 2adz - zdz$, $\frac{y^2}{2} = A.a + 2az - \frac{zz}{2}$. Donc $y = \sqrt{(2.Aa + 4az - zz)}$; donc si on prolonge P$m$ jusques en D, de maniere que P D soit $= \sqrt{(2.Aa + 4az - zz)}$, le point D appartiendra à la courbe cherchée. Mais parce qu'on peut prendre la constante A arbitrairement, il y a une infinité de lignes B D qui ont la même propriété.

Nous allons maintenant traiter le problême des trajectoires orthogonales d'une autre maniere.

305. PUISQUE les lignes mq, MN (fig. 1.) qui doivent être coupées, sont représentées par une équation commune; cette équation doit contenir non-seulement x & y, mais encore un paramètre p, qui pour la même courbe M N doit être invariable, & qui en changeant de valeur, doit représenter les autres courbes. Cette équation, étant différenciée, en faisant aussi varier p, sera de cette forme $ndy = Mdx + Ndp$. Ainsi pour la même courbe MN l'on aura $dp = 0$ & $\frac{dy}{dx} = \frac{M}{n}$; donc la sous-normale P$b = \frac{ydy}{dx}$, sera $= \frac{My}{n}$. Mais Pb est la sous-tangente de la courbe seçante B D; donc en retenant pour cette courbe les

mêmes coordonnées AP $= x$ & PD $= y$, sa soustangente $\frac{ydx}{dy}$ sera $= \frac{-My}{n}$, on met le signe —, parce que la sous-normale $\frac{My}{n}$ étant positive, puisqu'elle est prise en s'éloignant de l'origine A des abcisses, la sous-tangente P*b* doit être négative, parce qu'on la prend contre l'usage ordinaire, selon lequel la sous-normale étant située dans un sens, la sous-tangente est située dans un sens opposé. Cela posé, l'on aura l'équation $\frac{ydx}{dy} = \frac{-My}{n}$, ou $nydx + Mydy = 0$ (B). Ainsi en faisant p variable, l'équation des lignes qui doivent être coupées, étant supposée représentée par (A) $ndy = Mdx + Ndp$, l'équation de la courbe secante sera $ndx + Mydy = 0$. Mais il est visible que pour pouvoir intégrer cette derniere, il est nécessaire que ni M, ni n ne contiennent pas p que nous regardons comme variable; il faut donc faire en sorte de chasser p par le moyen de l'équation A, si cela est possible.

Si l'équation des courbes qui doivent être coupées est telle que p puisse être déterminé par une fonction de x & de y à laquelle on puisse l'égaler, cette équation aura cette forme $dp = Pdx + Qdy$, P & Q étant des fonctions de x & de y sans p. En comparant cette équation avec l'équation A, on trouve $n = Q$, $M = -P$ & $N = 1$; donc l'équation B des trajectoires sera $Qdx - Pdy = 0$, équation qui ne contiendra que deux variables x & y, & qu'on tâchera d'intégrer par quelqu'une des méthodes ci-dessus.

Si l'équation des courbes qui doivent être coupées est telle que y soit égal à une fonction de x & de p, de maniere que sa différencielle donne $dy = Pdx + Rdp$; P & R étant des fonctions de x & de p sans y, alors à cause de $n = 1$, $M = P$, $N = R$, l'équation des trajectoires sera $dx + Pdy = 0$, qui à cause de $dy = Pdx + Rdp$, peut acquérir cette forme: $(1 + PP)dx + PRdp = 0$, équation qui ne renferme que deux variables x & p.

Si l'équation des courbes qui doivent être coupées,

étant différenciée, peut acquérir la forme $dx = Qdy + Rdp$, Q & R étant des fonctions de y & de p sans x; dans ce cas à cause de $n = Q$, $M = 1$, & $N = -R$, l'équation des trajectoires sera $Qdx + dy = 0$, qui à cause de $dx = Qdy + Rdp$, deviendra $(1 + QQ)\, dy + QR\,dp = 0$, équation qui ne renferme pas x.

Toutes les fois donc que des trois quantités p, x, y, l'une peut être exprimée par les deux autres de la maniere qu'on vient de le dire, l'invention des trajectoires se réduit à l'intégration d'une équation à deux variables; mais les fonctions de deux quantités qui déterminent la troisieme, doivent être explicites, & cela qu'elles soient algébriques ou transcendantes : car si ces fonctions renferment des formules intégrales, dans ce cas les équations trouvées ne sont d'aucun usage, à moins qu'on ne puisse faire disparoître les formules intégrales dont elles sont embarrassées. Comme, par exemple, si l'équation des courbes qui doivent être coupées, étoit $y = S.\,V dx$, V étant une fonction de x & de p, & p étant regardé comme constant dans l'intégrale; alors au lieu de $dy = Pdx + R\,dp$, on aura $dy = Pdx = Vdx$ (parce que dp est supposé $= 0$); mais en regardant ensuite p comme variable, on doit avoir (voyez le n°. 225.) $R = S.\,dx \left(\frac{dV}{dp}\right)$, équation dans laquelle on regarde x seul comme variable; & alors l'équation des trajectoires devient $(1 + VV)\, dx + V\,dp\, S.\,dx \left(\frac{dV}{dp}\right) = 0$, équation qu'on ne peut résoudre dans tous les cas par aucune méthode connue.

Si nous supposons que le multiplicateur M, qui peut rendre cette formule intégrable, est $= \frac{p'}{V}$, p' étant une fonction de p sans x ni y, notre équation deviendra $\frac{p'dx\,(1 + VV)}{V} + dp\,S.\,p'dx \left(\frac{dV}{p}\right) = 0$ (A), à cause que dans l'intégrale indiquée on regarde x seul comme variable. Supposons maintenant que l'intégrale

du second membre de la derniere équation est de cette forme S. $\frac{p' dx (1+VV)}{V}$, dans ce cas l'intégrale de l'équation A sera double de cette quantité. Ainsi en ajoutant une constante 2 C, & divisant par 2, l'intégrale de l'équation sera S. $\frac{p' dx (1+VV)}{V} = C$. Mais en différenciant cette intégrale dans la supposition de x & p variables, on trouve $\frac{p' dx (1+VV)}{V} + dp\, S. dx. \left(\frac{d. [p'(1+VV)V^{-1}]}{dp}\right) = 0$ (*) (v. le n°. 225). Donc il faut supposer $S. p' dx \left(\frac{dV}{dp}\right) = S. dx \left(\frac{d. [p'(1+VV)V^{-1}]}{dp}\right)$; d'où l'on tire $p'\left(\frac{dV}{dp}\right) = \left(\frac{d. [p'(1+VV)V^{-1}]}{dp}\right)$. Maintenant parce que dans cette derniere équation la seule quantité p est supposée variable, on a $p' dV = \frac{p' dV. (VV-1)}{VV} + \frac{dp'. (1+VV)}{V}$, ou (en multipliant & divisant en même-tems le premier membre de l'équation par V V, transposant ensuite & reduisant) $\frac{p' dV}{VV} = dp' \frac{(1+VV)}{V}$; donc $\frac{dp'}{p'} = \frac{dV}{V(1+VV)} = \frac{dV}{V} - \frac{VdV}{1+VV}$, & $L. p' = L. V - \frac{1}{2} L. (1+VV) + L. X$, en introduisant X fonction de x au lieu d'une constante; donc $p' = \frac{VX}{\sqrt{(1+VV)}}$ & $V =$

(*) En différenciant la quantité $\frac{p(1+VV)}{V}$ dans la supposition de p seul variable, il faut diviser la différentielle par dp, ou la multiplier par $\frac{1}{dp}$, afin d'avoir le multiplicateur de dp qui doit être $=$ S. $dx. \left(\frac{d[p'(1+VV)V^{-1}]}{dp}\right)$.

$\frac{p'}{\sqrt{(XX - p'p')}}$: ainsi toutes les fois que V sera de cette forme $\frac{p'}{\sqrt{(XX - p'p')}}$, p' étant une fonction de p sans x, & X une fonction de x sans p, on pourra trouver les trajectoires des courbes dont l'équation est $y = S. V dx$. De sorte que l'équation des courbes qui doivent être coupées étant $y = S. \frac{p' dx}{\sqrt{(XX - p'p')}}$, l'équation des trajectoires sera $S. \frac{XX dx}{\sqrt{(XX - p'p')}} = C$, (à cause de $1 + VV = \frac{XX}{XX - p'p'}$, & selon les différentes valeurs de C, on pourra trouver une infinité de courbes qui couperont les courbes données à angles droits.

Supposons que les courbes MN, mq (fig. 1) sont représentées par l'équation $y = S. \frac{p' dx}{\sqrt{(XX - p'p')}}$, p' variant d'une courbe à l'autre. Si sur l'axe AP, des x, (l'origine des abcisses étant en A), on décrit pour différentes valeurs déterminées de p' une infinité de courbes, telles que aG, fg, en prenant pour une certaine valeur de p', & pour la courbe aG, chaque ordonnée $PG = \frac{XX}{\sqrt{(XX - p'p')}}$, il est visible que $\frac{XX.dx}{\sqrt{(XX - p'p')}}$ sera la différentielle de l'aire de la courbe aG ; si donc on prend sur cette courbe une aire $= 1.C = C = S. \frac{XX.dx}{\sqrt{(XX - p'p')}}$ (*), & qu'on

(*) Dans ce cas on doit regarder C comme une aire, ou si on veut la regarder comme une ligne, il faut la supposer multipliée par l'unité de ligne, ce qui rendra C égal à une surface.

prolonge GP de maniere que GP soit = PD, le point D appartiendra à la trajectoire cherchée. De même si sur la courbe fg décrite par la même loi; mais en donnant une valeur différente au paramètre p', on prend une aire = C, & qu'on prolonge l'ordonnée gp de cette aire, de maniere que l'on ait $gp = pq$, le point q sera un point de la trajectoire; & l'on pourra de cette maniere trouver tant d'autres points de cétte courbe que l'on voudra. Pour se convaincre que tous les points ainsi trouvés appartiennent à la trajectoire, on n'a qu'à remarquer que toutes ses ordonnées PD, pq sont telles que l'on a $S. \frac{XX.dx}{\sqrt{(XX-p'p')}} = C$ (A); tandis que pour les mêmes ordonnées, considérées comme appartenant aux courbes MN, mq, l'on a $y = S. \frac{p'dx}{\sqrt{(XX-p'p')}}$ (B). Or ces deux équations doivent toujours aller ensemble. Comme C est une quantité arbitraire, il est visible qu'on peut trouver une infinité de courbes représentées par l'équation A qui feront les trajectoires des courbes exprimées par l'équation B.

306. NOUS avons vu ci-dessus que l'équation pour les courbes qui doivent être coupées, étant supposée $ndy = Mdx + Ndp$, l'équation des trajectoires étoit $ndx + Mdy = 0$; donc si l'équation des courbes qui doivent être coupées est $Ndy = -Mdx - ndp$, ou $Ndy + Mdx + ndp = 0$ (A), l'équation des trajectoires sera $Ndx - Mdy = 0$, le paramètre q de ces courbes étant regardé comme constant dans cette derniere équation. Mais si on fait aussi varier q, l'équation des trajectoires aura nécessairement cette forme $Kdq + Ndx - Mdy = 0$ (B). Si p dans l'équation A & q dans l'équation B est donné en x & y, on pourra donner à ces équations les formes $dp = M(Pdx + Qdy)$ & $dq = N(Qdx - Pdy)$, M & N étant des facteurs qui rendent intégrables les formes $Pdx + Qdy$ & $Qdx - Pdy$; ce qui étant toujours possible, on peut trouver une infinité de paires de systêmes

de lignes qui aient la propriété de se couper mutuellement à angles droits. Si on suppose, par exemple, $P = X$ & $Q = Y$, X étant une fonction de x sans y, & Y une fonction de y sans x, nos équations donneront $p = S.\,X\,dx + S.\,Y\,dy$ & $q = S.\,\frac{dx}{X} - S.\,\frac{dy}{Y}$, en faisant $M = x^0 y^0 = 1$ & $N = \frac{1}{XY}$.

307. On peut aussi exprimer les deux variables x & y par les paramètres p & q, & cela par le moyen des deux équations A & B, desquelles on tirera facilement les équations $dx + \frac{nM\,dp + KN\,dq}{MM + NN} = 0$, & $dy + \frac{nN\,dp - KM\,dq}{MM + NN} = 0$, qu'on peut ramener à ces formes plus simples $dx = PR\,dp + QT\,dq$ & $dy = PT\,dp - QR\,dq$, P, Q, R & T désignant des fonctions de p & de q, telles que ces deux formules soient intégrables. Mais x & y étant des fonctions de p & de q, si on considére successivement p & q comme variables, la premiere des dernieres équations donnera $PR = \left(\frac{dx}{dp}\right)$; $QT = \left(\frac{dx}{dq}\right)$, & la seconde donnera $PT = \left(\frac{dy}{dp}\right)$; $QR = -\left(\frac{dy}{dq}\right)$. Mais il est visible que $PR.\,QT - PT.\,QR = 0$; donc $\left(\frac{dx}{dp}\right).\left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right).\left(\frac{dy}{dq}\right) = 0$, *propriété digne de remarque.*

Revenons aux équations $dx = PR\,dp + QT\,dq$, $dy = PT\,dp - QR\,dq$, desquelles il est aisé de conclure $dx + dy\sqrt{-1} = (R + T\sqrt{-1}).(P\,dp - Q\,dq\sqrt{-1})$, & $dx - dy\sqrt{-1} = (R - T\sqrt{-1}).(P\,dp + Q\,dq\sqrt{-1})$. Maintenant P & Q étant des fonctions de p & q, on pourra toujours

trouver un multiplicateur M qui rende intégrable la forme ambigue $P\,dp \mp Q\,dq\,\sqrt{-1}$; de sorte que l'on aura $S.M(P\,dp \mp Q\,dq\sqrt{-1}) = z \pm V\sqrt{-1}$, & prenant pour $R \pm T\sqrt{-1}$ une fonction quelconque de $z \pm V\sqrt{-1}$ multipliée par M, l'on aura, en intégrant, $x + y\sqrt{-1} = f(z + V\sqrt{-1})$ & $x - y\sqrt{1} = F(z - V\sqrt{-1})$, f & F désignant des fonctions quelconques des quantités qui suivent ces lettres. Donc, en ajoutant ces équations & retranchant ensuite la seconde de la premiere, & donnant une autre forme aux fonctions, on pourra représenter les variables x & y par les équations $x = \frac{1}{2}f(z + V\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}f(z - V\sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}F(z + V\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}F(z - V\sqrt{-1})$, & $y = \frac{1}{2\sqrt{-1}}f(z + V\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}f(z - V\sqrt{-1}) - \frac{1}{2}F(z + V\sqrt{-1}) - \frac{1}{2}F(z - V\sqrt{-1})$, qui sont toujours réelles quelles que soient les fonctions désignées par f & F, où il est bon de remarquer que les équations précédentes ne contiennent, à proprement parler, que deux fonctions, l'une de $z + V \times \sqrt{-1}$, l'autre de $z - V\sqrt{-1}$.

Les quantités z & V désignent des fonctions de p & de q, dont on peut trouver la nature par l'équation $\left(\frac{dx}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dq}\right) = 0$; car puisqu'on a trouvé $x + y\sqrt{-1} = f(z + V\sqrt{-1})$ & $x - y\sqrt{-1} = F(z - V\sqrt{-1})$, on aura en différenciant:

$$\text{I. } \left(\frac{dx}{dp}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right)\sqrt{-1} = \left[\left(\frac{dz}{dp}\right) + \left(\frac{dV}{dp}\right)\sqrt{-1}\right] \cdot f'(z + V\sqrt{-1}).$$

II. $\left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dq}\right) \sqrt{-1} = \left[\left(\frac{dz}{dq}\right) + \left(\frac{dV}{dq}\right) \times \sqrt{-1} \right] \cdot f'(z + V\sqrt{-1})$.

III. $\left(\frac{dx}{dp}\right) - \left(\frac{dy}{dp}\right) \sqrt{-1} = \left[\left(\frac{dz}{dp}\right) - \left(\frac{dV}{dp}\right) \sqrt{-1} \right] . F'(z - V\sqrt{-1})$.

IV. $\left(\frac{dx}{dq}\right) - \left(\frac{dy}{dq}\right) \sqrt{-1} = \left[\left(\frac{dz}{dq}\right) - \left(\frac{dV}{dq}\right) \sqrt{-1} \right] . F'(z - V\sqrt{-1})$.

Multipliant la premiere de ces équations par la quatrieme, & la seconde par la troisieme, ajoutant ensuite les deux produits, on trouvera

$2 \left(\frac{dx}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dq}\right) + 2 \left(\frac{dy}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dq}\right) = 2 \left[\left(\frac{dz}{dp}\right) \times \left(\frac{dz}{dq}\right) + \left(\frac{dV}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dV}{dq}\right) \right] \cdot f'(z + V\sqrt{-1}) . F'(z - V\sqrt{-1})$. Mais le premier membre de cette équation étant $= 0$, le second sera aussi $= 0$, ce qui donne $\left(\frac{dz}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dz}{dq}\right) + \left(\frac{dV}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dV}{dq}\right) = 0$. Les fonctions z & V doivent donc satisfaire à cette équation.

308. CONNOISSANT les valeurs de x & de y qui représentent deux systêmes de lignes qui se coupent à angles droits, $x = t$ & $y = u$, t & u étant des fonctions des deux paramètres p & q, telles que l'on ait $\left(\frac{dt}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dt}{dq}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right) \cdot \left(\frac{du}{dq}\right) = 0$, on peut facilement trouver une infinité de paires de tels systêmes contenus dans les deux équations suivantes : $x =$

$\frac{1}{2}f(t+u\sqrt{-1})+\frac{1}{2}f(t-u\sqrt{-1})-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\times$ $F(t+u\sqrt{-1})+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot F(t-u\sqrt{-1})$; $y=$ $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot f(t+u\sqrt{-1})-\frac{1}{2\sqrt{-1}}f(t-u\sqrt{-1})+\frac{1}{2}F(t+u\sqrt{-1})+\frac{1}{2}F(t-u\sqrt{-1})$; formules que l'on a choisies, afin qu'en développant chaque fonction, les imaginaires se détruisent d'elles-mêmes.

309. CES formules sont très-comodes pour la pratique : car supposant qu'en prenant pour f différentes fonctions déterminées, la forme $\frac{1}{2}f(t+u\sqrt{-1})+\frac{1}{2}f(t-u\sqrt{-1})$, donne T; T'; T''; T''', la forme $\frac{1}{2\sqrt{-1}}f(t+u\sqrt{-1})-\frac{1}{2\sqrt{-1}}f(t-u\sqrt{-1})$, donnant V; V'; V''; V'''. Les valeurs qui satisfont à la question seront les suivantes.

$$x = aT + bT' + CT'' + DT''' - eV - gV' - hV'' - iV''',$$
$$y = aV + bV' + CV'' + DV''' + eT + gT' \; hT'' + iT'''.$$

Les lettres a, b, C, &c. désignant des coefficients constans quelconques. On doit faire attention que les valeurs homologues T & V, T' & V', &c. doivent être formées des mêmes fonctions & des mêmes lettres t & u. Ainsi si f & F désignent la puissance 1, on aura $x=t-u$ & $y=u+t$.

Les valeurs les plus simples qu'on peut former par les quantités t & u, en substituant des puissances au lieu de f & de F, sont telles qu'on le voit ici.

$T=t$ $V=u$	$T=tt-uu$ $V=2tu$	$T=t^3-3tuu$ $V=3ttu-u^3$
$T=t^4-6ttuu+u^4$ $V=4t^3u-4tu^3$	&c.	

Et pour les puissances négatives,

$$T = \frac{t}{t^2 + u^2} \quad \Big| \quad T = \frac{t^2 - u^2}{(t^2+u^2)^2} \quad \Big| \quad T = \frac{t^3 - 3tu^2}{(t^2+u^2)^3}$$

$$V = \frac{u}{t^2 + u^2} \quad \Big| \quad V = \frac{2tu}{(t^2+u^2)^2} \quad \Big| \quad V = \frac{3t^2u - u^3}{(t^2+u^2)^3}$$

$$T = \frac{t^4 - 6t^2u^2 + u^4}{(t^2+u^2)^4} \quad \Big| \quad \&c.$$

$$V = \frac{4t^3u - 4tu^3}{(t^2+u^2)^4}$$

Ainsi toute la difficulté consiste à trouver pour t & u des fonctions de p & de q, telles que l'on ait

$$\left(\frac{dt}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dt}{dq}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right) \cdot \left(\frac{du}{dq}\right) = 0 \ (A).$$

310. SUPPOSANT $t = p$ & $u = q$, ces suppositions satisfont à l'équation A, puisque alors $\left(\frac{dt}{dq}\right) = 0$ & $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$; & l'on a les formules $x = ap - eq$ & $y = aq + ep$; & en éliminant premierement q & ensuite p, les deux systêmes de lignes seront représentés par les équations $ax + ey = (a^2 + e^2)p$ & $ay - ex = (a^2 + e^2)q$, qui représentent une infinité de droites paralleles, telles que chacune coupe à angles droits les lignes de l'autre systême.

Supposons en second lieu $T = t^2 - u^2$ & $V = 2tu$; d'où, en mettant x au lieu de T, y au lieu de V, p au lieu de t, & q au lieu de u, on tire $x = p^2 - q^2$ & $y = 2pq$; & parce $\sqrt{(x^2 + y^2)} = p^2 + q^2$, en éliminant alternativement q & p, les deux systêmes des lignes seront $\sqrt{(x^2 + y^2)} + x = 2p^2$ & $\sqrt{(x^2 + y^2)} - x = 2q^2$. C'est pourquoi si au lieu de $2p^2$ & $2q^2$, nous écrivons simplement p & q, ces équations donneront $y^2 = p^2 - 2px$ & $y^2 = q^2 + 2qx$, qui représentent deux systêmes de paraboles AD, BD (fig. 5) décrites du même foyer

F, les unes allant vers la droite, & les autres vers la gauche; ce qui est une belle propriété des paraboles (*).

Supposons maintenant $T = t^3 - 3tu^2$ & $V = 3t^2u - u^3$, & formons les équations $x = p^3 - 3pq^2$ & $y = 3p^2q - q^3$, dont la derniere donne $p = \sqrt{\left(\frac{y+q^3}{3q}\right)}$. Cette valeur étant substituée dans la premiere, il vient $x = \frac{y-8q^3}{3q} \cdot \sqrt{\left(\frac{y+q^3}{3q}\right)}$. Substituant dans la seconde la valeur de q prise dans la premiere, prenant les quarrés de l'équation résultante & de la précédente, faisant les opérations ordinaires & écrivant ensuite p & q au lieu de q^3 & de p^3, les deux systêmes de lignes seront

$$27qx^2 = y^3 - 15qy^2 + 48q^2y - 64q^3,$$
$$27py^2 = -x^3 - 15px^2 - 48p^2x + 64p^3.$$

Ces équations représentent des lignes du troisieme ordre qui ont la propriété de se couper à angles droits.

Supposons maintenant $T = \frac{t}{t^2+u^2}$ & $V = \frac{u}{t^2+u^2}$, & formons les équations $x = \frac{p}{p^2+q^2}$, & $y = \frac{q}{p^2+q^2}$, pour avoir $x^2+y^2 = \frac{1}{p^2+q^2}$; les deux systêmes

(*) Lorsque les paraboles AD, BD ont leurs paramètres p & q égaux, il est aisé de voir par les premiers élémens des sections coniques que l'ordonnée FD qui passe par leur foyer, est la même dans chacune des paraboles; car cette ordonnée est la moitié du paramètre : ainsi ces courbes se rencontrent alors à l'extrémité de cette ordonnée. De plus les sous-tangentes FT, Ft étant aussi égales chacune à l'ordonnée FD, puisqu'elles sont chacune double de FA = FB (FA est le quart du paramètre p), les triangles rectangles FDt, FDT sont isoceles; ainsi les angles FDt, FDT sont chacun de 45°, & l'angle TDt de 90°; donc &c.

systêmes des lignes seront dans ce cas $x = p(x^2 + y^2)$, & $y = q(x^2 + y^2)$. Changeons la forme des paramètres en écrivant $\frac{1}{2p}$ au lieu de p & $\frac{1}{2q}$ au lieu de q, les deux systêmes des lignes seront alors exprimés par les équations $x^2 + y^2 = 2px$ & $x^2 + y^2 = 2qy$ qui représentent deux systêmes de cercles.

Développons aussi les formes $x = \frac{p^2 - q^2}{(p^2 + q^2)^2}$, & $y = \frac{2pq}{(p^2 + q^2)^2}$, nous trouverons $x^2 + y^2 = \frac{1}{(p^2 + q^2)^2}$; de maniere que l'on aura $\frac{x}{x^2 + y^2} = p^2 - q^2$, & $\frac{y}{x^2 + y^2} = 2pq$. Mais à cause de $p^2 + q^2 = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, nous trouverons $2p^2 = \frac{x + \sqrt{(x^2 + x^2)}}{x^2 + y^2}$, & $2q^2 = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)} - x}{x^2 + y^2}$. Ecrivons maintenant $\frac{1}{p}$, & $\frac{1}{q}$ au lieu de $2p^2$ & $2q^2$, & les deux systêmes des lignes seront représentés par les équations $x^2 + y^2 = px + p\sqrt{(x^2 + y^2)}$ & $x^2 + y^2 = q\sqrt{(x^2 + y^2)} - qx$, qu'on réduit à celles-ci $(x^2 + y^2)^2 - 2px(x^2 + y^2) = p^2y^2$ & $(x^2 + y^2)^2 + 2qx(x^2 + y^2) = q^2y^2$. Ces deux systêmes de lignes sont donc représentés par une équation commune du quatrieme ordre, en prenant dans la derniere le paramètre q négativement.

Il est aisé de voir, par ce qu'on vient de dire, comment on peut s'y prendre pour trouver tant de systêmes de lignes algébriques qu'on voudra, dont les trajectoires soient aussi des lignes algébriques. Il suffit pour cela de prendre pour t & u des fonctions des

deux paramètres p & q, telles que l'on ait $\left(\frac{dt}{dp}\right).\left(\frac{dt}{dq}\right)$ $+\left(\frac{du}{dp}\right).\left(\frac{du}{dq}\right)=o$ (A), & de faire $x+y\sqrt{-1}$ $=f(t+u\sqrt{-1})$ & $x-y\sqrt{-1}=F(t-u\sqrt{-1})$, de la maniere expliquée ci-dessus. Cela fait, tout consiste à trouver les cas les plus simples pour t & u: or le plus simple de ces cas donne $t=p$ & $u=q$: le cas de $t=ap+bq$ & $u=ep+gq$ est encore fort simple, & ces cas fournissent une ample moisson de paires de systêmes de lignes algébriques. Le cas de $t=\sqrt{[p(a+q)]}$ & $u=\sqrt{[q(b-p)]}$ mérite d'être observé. Ce cas donne $\left(\frac{dt}{dp}\right).\left(\frac{dt}{dq}\right)$ $=\frac{1}{4}$ & $\left(\frac{du}{dp}\right).\left(\frac{du}{dq}\right)=-\frac{1}{4}$: ainsi il satisfait à l'équation A, & l'on peut en tirer une infinité de solutions. Si l'on suppose maintenant $x=t$ & $y=u$, on a $x^2=pa+pq$ & $y^2=bq-pq$; & à cause de $x^2+y^2=pa+bq$, si l'on prend la valeur de q dans cette derniere équation, & qu'on l'égale à la valeur de la même quantité prise dans l'équation $x^2=pa+pq$; si on prend aussi la valeur de p dans l'équation $y^2=bq-pq$, & qu'on l'égale à la valeur de la même lettre, prise de l'équation $x^2+y^2=ap+bq$, on aura les équations

I. $p.(x^2+y^2)-bx^2+ap(b-p)=o$.

II. $q(x^2+y^2)+ay^2-bq(a+q)=o$.

La derniere représente une infinité d'ellipses, & la premiere, à cause de $b>p$ (*), appartient à une infinité d'hyperboles décrites sur un axe commun & du même centre. Passons aux courbes dont les ordonnées partent d'un point.

(*) Autrement l'équation $y^2=bq-pq$ donneroit pour y une quantité imaginaire $=\sqrt{[q(b-p)]}$.

311. PROBLEME. *Soit une courbe* AE (*fig.* 6) *rapportée au foyer* C, *dont la relation entre* E$p = dx$, CE $= z$ *& sa différentielle* dz *soit donnée par une équation. Supposons une infinité d'autres courbes* Mm *engendrées par la premiere, de maniere que ses ordonnées* CD $= y$ *soient des fonctions algébriques de* z *& d'un paramètre* p *qui varie d'une courbe à l'autre, on demande la courbe* BDQ *qui coupe toutes ces lignes à angles droits.* Du centre C ayant décrit l'arc infiniment petit Dn, & faisant CD $= y$, $mn = dy'$. na (qui appartient à la courbe sécante) $= -dy$, je remarque que les secteurs CEp, CDn donnent $z : y :: dx : Dn = \frac{y\,dx}{z}$. Mais à cause de l'angle droit aDm, on a mn : Dn :: Dn : na; donc $dy' : \frac{y\,dx}{z} :: \frac{y\,dx}{z} : -dy$; donc $dy' = -\frac{y^2dx^2}{z^2dy}$. Lorsque y sera une fonction algébrique de z & de p, ayant fait la différenciation dans la supposition de p constant, on aura dy' en z, dz & p, & chassant p par le moyen de l'équation de la courbe Mm, & dx par le moyen de l'équation de la courbe AE, on trouvera l'équation de la trajectoire en y & z, d'où l'on tirera la valeur de y.

312. SOIT AE une spirale logarithmique dans laquelle, à cause de l'angle constant peE du rayon avec la courbe, on a $pe = dz$: E$p = dx :: a : b$, (a étant le cosinus & b le sinus de l'angle peE); donc $dx = \frac{b\,dz}{a}$. Supposons que les courbes MN soient représentées par l'équation $y = \frac{p.z}{a}$ qui donne une infinité de spirales logarithmiques. Afin de trouver la sécante BD, je différencie cette équation, en regardant p comme constant, pour avoir $dy' = \frac{p\,dz}{a}$; mais $p = \frac{ay}{z}$; donc

$dy = \frac{y\,dz}{z} = \frac{-y^2\,dx^2}{z^2\,dy}$; donc $dz = \frac{-y\,dx^2}{z\,dy}$ $= \frac{-b^2 y\,dz^2}{a^2 z\,dy}$, en ſubſtituant la valeur de dx; donc $a^2 z\,dy = -b^2 y\,dz$. On peut par le moyen de cette équation déterminer y en z (*) ; mais cherchons l'équation de la courbe. Suppoſant D$n = du$, on a $z : y :: dx : du$, & en ſubſtituant la valeur de dx, il vient $z : y :: \frac{b\,dz}{a} : du$; donc $\frac{b\,dz}{az} = \frac{du}{y}$; mais l'équation $a^2 z\,dy = -b^2 y\,dz$ donne $\frac{b^2\,dz}{a^2 z} = \frac{-dy}{y}$; donc $\frac{b}{a} \cdot \frac{du}{y} = \frac{-dy}{y}$, ou $b\,du = -a\,dy$, ou $a\,dy = -b\,du$, équation à une ſpirale logarithmique, mais ſituée dans une ſituation renverſée, & dans laquelle on a $-dy = na : du =$ D$n :: b : a$, donc puiſque b eſt le ſinus de l'angle C E A, cet angle eſt $= a$Dn; mais aDC eſt complément de aDn; donc l'angle CDa eſt complément de CEA, ce qui eſt une propriété remarquable. Si l'angle CEA eſt de 45°, l'angle CDB ſera auſſi de 45°, & la courbe BD ſera une ſpirale logarithmique égale à la courbe AE, mais ſituée dans une ſituation renverſée. Ainſi une ſpirale dont l'angle du rayon avec la tangente eſt de 45°, a la propriété, étant renverſée, de ſe couper toujours elle-même à angles droits.

Si la courbe AE étoit un cercle, dans ce cas l'angle pEe ſeroit $= 0$, & l'on auroit $a = 0$, & par conſéquent auſſi $du = 0$; ce qui indique que la ſeule ligne

(*) Car on a $\frac{a^2\,dy}{y} = -\frac{b^2\,dz}{z}$, a^2L.$y = -b^2$L.z, ou $y^{aa} = z^{-bb}$ & $y = z^{-\frac{bb}{aa}}$.

droite menée du centre peut couper une infinité de cercles concentriques (car dans ce cas de l'équation $y = \frac{pz}{a}$ on ne peut tirer qu'une infinité de cercles) à angles droits.

313. PARLONS maintenant des trajectoires réciproques. Si la courbe A B C (fig. 7) tourne autour de l'axe B R qui la rencontre au point B, & qu'elle soit placée dans une situation renversée D B E, de maniere que la partie B E soit la même que la partie B C & la partie B D la même que la partie B A ; si ensuite on fait mouvoir la courbe D E parallelement à elle-même ; de sorte que tous ses points décrivent des lignes paralleles à B R, & que la courbe soit parvenue en F G H, où elle coupe A C dans un point variable G, il s'agit de déterminer la nature de la courbe A B C, telle que l'angle de section C G H soit toujours le même, & par conséquent constant : les courbes qui ont cette propriété sont appellées *trajectoires réciproques*. Puisque F H tombant sur D E, l'angle C G H devient l'angle C B E, & que l'angle de section est constant ; il est visible, à cause de C B R = R B E, que C G H est = 2 C B R. Supposons maintenant que le point B étant parvenu en M, on prenne B K = M G, & qu'on tire les lignes K P, G I paralleles à B R, il est évident que les arcs M G, B K étant les mêmes, & la courbe C B A, avant de s'émouvoir parallelement à B R, n'ayant seulement que tourné autour de cette ligne, ces arcs doivent avoir la même inclinaison par rapport aux paralleles entre lesquels ils sont compris ; & qu'ainsi les paralleles K P, G I doivent être également éloignés de B R. Puisque les arcs, dont on vient de parler, sont également inclinés par rapport aux paralleles K P, G I, l'angle C K P est = H G I ; donc en ajoutant de part & d'autre l'angle C G I, on aura C K P + C G I = C G H = C B E = 2 C B R ; donc les trois angles C K P, C B R, C G I *forment une proportion continue arithmétique* ; ce qui doit aussi s'entendre de ceux qui peuvent leur être opposés au sommet, en prolongeant les lignes qui les forment.

314. LA propriété démontrée fournit un moyen aisé de déterminer une infinité de trajectoires réciproques qui se coupent à angles droits. Soit une courbe PBQ (fig. 8) dont l'axe soit BR, & dont les branches BQ, BP soient égales & semblables. Ayant pris les arcs BF, BH que je supposerai égaux, menez les lignes FK, HG égales à ces arcs & paralleles à BR, la courbe ABC qui passe par ces points, & tous les autres déterminés de même est une trajectoire réciproque, qui ayant tourné autour de l'axe BR, & étant placée dans une situation renversée, & étant ensuite mue parallelement à BR, se coupera toujours à angles droits. 1°. Je dis que l'angle CBR est de 45° ; car ayant pris l'arc infiniment petit Bp & mené pb parallele à BR, on aura, par construction, Bp = bp; donc dans le triangle isocele Bpb les angles pBb, pbB sont égaux. Mais l'angle bpB est égal à son alterne RBp, & celui-ci est droit (puisque la tangente qu'on pourroit mener au point B de la courbe QBP seroit perpendiculaire à l'axe BR); donc l'angle pBb, ou son égal CBQ est demi-droit; mais QBR est droit, donc CBR est demi-droit. Je dis 2°. que les trois angles CKF, CBR, BGH, ou ayant prolongé HG en I, CGI sont en proportion continue arithmétique. Qu'on tire les lignes fk, hg paralleles à BR qui terminent les arcs infiniment petits & égaux Ff, Hh, auxquels on menera les paralleles Km, Gn; il est visible que les deux angles Kmf & Kmk valent deux angles droits; mais ce dernier est = mfF, & celui-ci est évidemment = Qhn = hnG; donc les angles Kmf + hnG valent deux angles droits. Mais Kmf (extérieur au triangle Kmk) = mKk + mkK & hnG = nGg + ngG; donc les quatre angles mKk + mkK + nGg + ngG valent deux angles droits. Mais à cause des triangles isoceles Kmk, Gng (parce que BH = HG = BF, hg = Bh = Bf & hn = HG = FK), on doit avoir ng = nG; on a aussi Km = mk, l'angle mKk = mkK & ngG = nGg. Donc les deux angles mkK + ngG, ou leurs égaux CKF + BGH valent un angle droit; donc ils valent 2. CBR, donc les trois angles CKF, CBR, BGH sont en proportion continue arithmétique. Ce qui étant la principale propriété des trajectoires

réciproques, il est évident que la courbe ABC est une trajectoire réciproque, qui étant située dans une situation renversée, de maniere que la partie BA acquierre la situation Ba (fig. 9.), tandis que la partie BC devient Bc, se coupera toujours à angles droits, si on la fait mouvoir parallelement à BR. Si la ligne PBQ (fig. 8) est droite, la trajectoire ABC sera aussi une ligne droite.

315. De la propriété démontrée ci-dessus, nous pouvons en tirer une autre qui nous conduira à une analyse expéditive. Quelque part qu'on mene la ligne IP (fig. 7) qui fasse avec BR l'angle BRP égal à l'angle CBE, dans lequel la courbe doit toujours se couper elle-même, ayant pris RI = RP; & les infiniment petites $Ii = Pp$, & mené les lignes PK, pk, IG, ig, parallelement à BR; ayant de plus mené gn, Km parallelement à PI: il est visible que les angles Kmp, gnI sont chacun = BRP = CBE; de même les deux angles $Ckm + kKm$, aussi-bien que $CGn + Ggn$ sont égaux à CBE; mais par la propriété démontrée $Ckm + CGn$, ou $CKP + CGn$ = CBE; donc $Ckm + CGn = CGn + Ggn$; & $Ckm = Ggn$; mais d'ailleurs $kmK = Gng$; donc les triangles Kmk, Gng sont semblables, & l'on a la proportion $Gn : ng :: Km : km$; donc $Gn.km = ng.mK = Ii.Pp = -dx^2 = -(Pp)^2$; ainsi lorsque le rectangle des différentielles des ordonnées également distantes de l'ordonnée moyenne BR sera égal au produit des différentielles des abcisses correspondantes CP, CI (en prenant ces différentielles d'égale longueur, l'une avec le signe + & l'autre avec le signe —), la courbe sera une trajectoire réciproque, & elle se coupera sous un angle BRP égal à celui que les ordonnées font avec les abcisses.

316. Cette propriété fait voir que la logarithmique est une trajectoire réciproque. Ce que je démontre ainsi: ayant décrit une logarithmique gk (fig. 10), dont PI soit l'asymptote, & dont l'ordonnée BR soit égale à la sous-tangente = a, je prends RI = RP & les infiniment petites égales Ii & Pp; je fais de plus RP = x, KP = y. Par la nature de la courbe

l'on a l'équation $a = \frac{y\,dx}{dy}$, ou $km = dy = \frac{y\,dx}{a}$. Par la propriété de la logarithmique l'on a KP : BR :: BR : GI, ou $y : a :: a : GI = \frac{aa}{y}$; donc $d.(GI) = Gn = \frac{-a^2 dy}{y^2}$; mais $\frac{a}{y} = \frac{dx}{dy}$ (par la nature de la courbe); donc $Gn = \frac{-a\,dx}{y}$; donc $km . Gn = - dx^2 = -(Pp)^2 = -(Li)^2$. Ainsi si l'on fait tourner la logarithmique gK autour de BR, & qu'on la fasse ensuite mouvoir parallelement à BR elle se coupera toujours sous un angle BRP. L'angle de section sera droit, aigu ou obtus, selon que l'angle BRP sera droit, aigu ou obtus.

317. Il est aisé de voir que la propriété trouvée fournit un moyen facile de trouver un nombre infini d'équations qui appartiennent toutes à des trajectoires réciproques. Car il suffit de supposer $dy = dx$ multiplié par une fraction qui ait les mêmes termes au numérateur & au dénominateur, avec cette seule différence que les puissances paires doivent être affectées du même signe; mais les puissances impaires doivent avoir des signes différens. En effet si on suppose que l'abcisse $-x$ est égale à l'abcisse $+x$, avec la seule différence que l'une est négative & l'autre positive, on aura alors $dy = -dx$ multiplié par une fraction, dont le dénominateur sera égal au numérateur de la premiere fraction, & le numérateur de la seconde égal au dénominateur de la premiere, (dans cette derniere hypothèse, je marque la différence de l'ordonnée par $d'y$). Ainsi l'on aura $dy . d'y = -dx^2$; donc la courbe sera une trajectoire réciproque.

Soit $\frac{M}{N}$ une fraction telle que si on écrit $-x$ au lieu de x, on ait $\frac{N}{M}$, prenez P fraction de x, telle qu'en

mettant $-x$ pour x, elle reste la même. Décrivez la courbe dont les co-ordonnées soient $S.Pdx$, & $S.\frac{MP}{N}dx$; je dis qu'elle sera une trajectoire réciproque. Prenez $RP = RI$ (fig. 7) $= S.Pdx$, on aura $PK = S.\frac{MPdx}{N}$; puisque les intégrales désignent, par supposition, les co-ordonnées d'une même courbe, R étant l'origine des abcisses. Donc en changeant x (RP) en $-x$ (RI), on aura $IG = S.\frac{-NPdx}{M}$; donc le rectangle des différentielles des ordonnées correspondantes à x & à $-x$ sera $= -P^2dx^2$, c'est-à-dire que $dy.d'y = -(Pp)^2$; car puisque $S.Pdx = RP$, $Pdx = Pp$.

318. POUR trouver tant de courbes algébriques qu'on voudra qui soient des trajectoires réciproques, il faut faire en sorte que la fonction P de x rende intégrables les formules Pdx, $\frac{MPdx}{N}$, ce qui en prenant pour $\frac{M}{N}$ une fraction rationnelle, peut se faire de plusieurs manières. Voici un moyen très-facile de réussir. Je fais $P = MN$; donc $Pdx = MNdx$, & $\frac{MPdx}{N} = MMdx$; mais ces formules sont intégrables algébriquement, puisque M & N sont des fonctions algébriques & entieres; donc les co-ordonnées de la courbe cherchée peuvent s'obtenir algébriquement, aussi-bien que la courbe (*).

(*) Supposons $dy = \frac{Mdx}{N} = dx.\frac{a^3 - x^3}{a^3 + x^3}$, $P =$

Usages du Calcul intégral dans la recherche des courbes par quelque propriété donnée.

319. QUOIQUE nous ayons déja donné plusieurs exemples par lesquels les commençans peuvent se former une

---

$a^6 - x^6$, nous aurons $S.Pdx = a^6 x - \frac{x^7}{7} = \frac{7a^6x - x^7}{7}$ & $S.\frac{MP}{N}dx = S.MMdx = a^6x - \frac{1}{2}.a^3x^4 + \frac{1}{7}x^7 + C$ (C étant une constante arbitraire qu'on peut déterminer à volonté). Pour construire la courbe C A (fig. 7), dont les co-ordonnées sont $S.Pdx$ & $S.MMdx$, je prends $ab = a$, & faisant $bh = x$, je cherche une ligne $RP = \frac{7a^6x - x^7}{7}$ (*voyez dans la premiere Partie de cet Ouvrage la construction géométrique des équations*). Sur cette ligne j'ordonne $PK = a^6x - \frac{1}{2}a^3x^4 + \frac{1}{7}x^7 + C$, il est visible que le point K & tous les autres trouvés de cette maniere, en donnant différentes valeurs à bh, appartiendront à la courbe cherchée dont l'ordonnée $y = a^6x - \frac{1}{2}a^3x^4 + \frac{1}{7}x^7 + C$, x étant bh & a étant ab. Si l'on change le signe de RP pour avoir $-RP = RI = \frac{x^7 - 7a^6x}{7}$, on aura, en mettant $-x$ pour x, $IG = -a^6x - \frac{1}{2}a^3x^4 - \frac{1}{7}x^7 + C$.

Soit encore $dy = dx.\frac{a+x}{a-x}$, nous aurons $M = a + x$, $N = a - x$ & $P = a^2 - x^2$; donc $S.Pdx = a^2x - \frac{x^3}{3} = \frac{3a^2x - x^3}{3} = t$, & $S.MMdx = a^2x + ax^2 + \frac{x^3}{3} + C = y$ (A); de sorte que les

idée de la maniere dont on peut employer le Calcul intégral dans la recherche des courbes, nous pensons qu'il ne sera pas inutile d'ajouter ici la solution de quelques autres problêmes assez curieux.

320. PROBLEME. *Trouver une courbe dans laquelle l'arc soit une fonction algébrique X de l'abcisse x.* L'élément de l'arc, en supposant les ordonnées perpendiculaires aux abcisses, étant $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, l'on aura $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = p\,dx$, en supposant $dX = p\,dx$; donc $dx^2 + dy^2 = pp\,dx^2$; $dy^2 = dx^2 (pp - 1)$; $dy = dx\sqrt{(pp - 1)}$. Supposons $X = ax^{\frac{3}{2}}$ pour avoir $p\,dx = \frac{3}{2} ax^{\frac{1}{2}} dx = bx^{\frac{1}{2}} dx$, en faisant $\frac{3}{2} a = b$; donc $dy = dx\sqrt{(bbx - 1)}$ & $y = \frac{2}{3bb} (bbx - 1)^{\frac{3}{2}} + C$, équation d'une courbe qui a la propriété demandée. Il n'est pas difficile de déterminer la constante C, puisqu'il n'y a qu'à supposer que x & y deviennent o en même-tems.

Si l'on demande une courbe dont l'arc soit une fonction algébrique Y de l'ordonnée, on aura $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dY = p\,dy$, en faisant $dY = p\,dy$; donc $dx^2 = p^2 dy^2 - dy^2$ & $dx = dy\sqrt{(pp - 1)}$. Si

---

co-ordonnées de la courbe cherchée, sont y & z, & il est facile de construire la trajectoire. Pour avoir l'équation entre les RP $= z$ & les PK $= y$; je fais C $=$ 2.1.C $= \frac{a^3}{3}$, & multipliant l'équation A par 3, il vient $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = 3y$; d'où je tire $x + a = \sqrt[3]{3y}$ & $x = -a + \sqrt[3]{3y}$. Substituant cette valeur dans l'équation $\frac{3a^2x - x^3}{3} = z$, il vient $3a^2\sqrt[3]{3y} - 3a^3 - (-a + \sqrt[3]{3y})^3 = 3z$, équation qu'il est facile de rendre rationnelle par les méthodes ordinaires.

on suppose que Y est $= \frac{1}{3} a y^{\frac{1}{2}}$, on aura $p = a y^{\frac{1}{2}}$ & $dx = dy \sqrt{(a^2 y - 1)}$; donc $x = \frac{2}{3aa}(aay - 1)^{\frac{3}{2}} +$ C, équation qui résout le problème.

321. PROBLEME. *Trouver la courbe* BD *rapportée à la ligne droite* AG, *dans laquelle ayant mené la tangente* DT *l'on a toujours* DT : DF, *dans un rapport donné, & telle qu'en tirant ensuite la ligne* FG *perpendiculaire à* AG, *jusqu'à la rencontre de* DK *normale à la courbe* BD, *on ait toujours* DK *égale au rayon osculateur* R *de la courbe cherchée* (fig. 11). Ayant mené les lignes que représente la figure, soit Ae, ou AE $= x$, $ep = y$, l'élément pD de la courbe $= ds$, $pi = -dy$ (car x augmentant y diminue). Les triangles semblables ipD, ETD donnent $-dy : dx :: y :$ ET $= \frac{-ydx}{dy}$. On a aussi DT $= \frac{-yds}{dy}$. Si l'on demande que DT soit à DF :: 1 : n; on aura DF $= -\frac{nyds}{dy}$.

Je remarque maintenant que le triangle rectangle FDK est semblable à FTG, & par conséquent à TED; donc FD : KD :: ED : ET, ou $\frac{-nyds}{dy}$: R :: y : $\frac{-ydx}{dy}$ :: $-dy : dx$. Donc R $= \frac{nydxds}{dy^2}$; mais (section 1e, 101.) R $= \frac{-ds^3}{dyddx - dxddy}$, je mets le signe $-$ parce que le rayon osculateur n'est pas situé du même côté que les ordonnées. Donc $\frac{nydxds}{dy^2} = \frac{-ds^3}{dyddx - dxddy}$, & $nydydxddx - nydx^2ddy$

$= - dy^2 ds^2 = - dy^2 dx^2 - dy^4$, équation que je dispose ainsi $dx^2 \left(\frac{nddx}{dx} - \frac{nddy}{dy} + \frac{dy}{y}\right) = \frac{-dy^3}{y}$. Je fais le multiplicateur de $dx^2 = \frac{dz}{z}$ pour avoir $\frac{dx^2 dz}{z} = -\frac{dy^3}{y}$ (A); mais de la formule de substitution on tire $\frac{ydx^n}{dy^n} = z$; donc $dx^n = \frac{zdy^n}{y}$. Prenant la racine n, & élevant ensuite au quarré, il vient $dx^2 = \frac{z^{2:n}dy^2}{y^{2:n}}$; donc l'équation A se changera en celle-ci, $z^{\frac{2}{n}-1}dz = -y^{\frac{2}{n}+1}dy$. Donc en intégrant, (ajoutant une constante $\frac{nA^{2:n}}{2}$, & multipliant par $\frac{2}{n}$), $z^{2:n} = A^{2:n} - y^{2:n}$, ou $z = \pm (A^{2:n} - y^{2:n})^{n:2}$; donc $\frac{ydx^n}{dy^n} = \pm (A^{2:n} - y^{2:n})^{n:2}$, & $dx = \pm \frac{dy(A^{2:n} - y^{2:n})^{1:2}}{y^{1:n}}$. Dans le cas de la figure on doit donner le signe $-$ à dy, parce que x croissant y diminue. Supposons que n est $= 1$; donc en faisant $A = a$, l'on aura dx, $= \frac{-dy\sqrt{(a^2 - y^2)}}{y}$, équation de la tractrice.

Les choses, étant disposées comme ci-dessus, supposons qu'on demande que DT soit à DF en raison donnée de $a : b$. Faisant $\frac{a}{b} = \frac{1}{n}$, nous aurons $DF = \frac{-nyds}{dy}$, & nous parviendrons de même à

l'équation $dx = \frac{\pm dy(A^{2:n} - y^{2:n})^{\frac{1}{2}}}{y^{1:n}}$. si $a:b::1:2$, on aura $n = 2$ & $dx = \frac{\pm dy\sqrt{(A-y)}}{\sqrt{y}} = \frac{\pm dy\sqrt{(Ay-yy)}}{y}$, équation à une cycloïde, en prenant les x sur la tangente au sommet.

Si $a:b::1:-2$, on aura $dx = \frac{\pm dy\sqrt{(y-A)}}{\sqrt{A}} = \pm \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{A}}$ (en faisant $y - A = z$), équation intégrable qui appartient à la seconde parabole cubique.

Enfin (section 2, n°. 1.) si $-\frac{1}{n} + 1 = \frac{2}{n}$, ou si $\frac{2n-2}{2n} = \frac{2}{n} = \frac{4}{2n}$, ou si $2n = 6$, ou $n = 3$, on pourra intégrer l'équation algébriquement. On pourra aussi intégrer toutes les fois que $-\frac{1}{n} + 1 = \frac{2n-2}{2n}$ sera exactement divisible par $\frac{2}{n}$ & donnera un nombre entier positif, c'est-à-dire, toutes les fois que $\frac{n-1}{2}$ sera un nombre entier positif. Donc p étant un nombre entier positif quelconque, si l'on a $\frac{n-1}{2} = p$, ou $n - 1 = 2p$, ou $n = 2p + 1$, l'on parviendra à une équation algébrique qui exprimera la nature de la courbe.

322. PROBLEME. *On demande une courbe* BC (*fig.* 12) *rapportée à un foyer* A, *dans laquelle ayant mené* AQ *perpendiculaire à la normale* CQ *de la courbe, le rayon osculateur soit à* CQ, *en raison donnée de* $a:b$. Soit CQ

$= p$, on aura $R : p :: a : b$; donc $R = \frac{ap}{b} = \frac{ydy}{dp}$, $\frac{apdp}{b} = ydy$; donc en intégrant & ajoutant une constante $\frac{bA}{2}$, $\frac{app}{b} + bA = y^2$, $p = \sqrt{\left(\frac{byy - bbA}{a}\right)}$ $= \frac{ydx}{ds}$ (voyez 1e. sect. n°. 101). Mais $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{ayydx^2}{byy - bbA}$; donc $dy. \frac{\sqrt{(byy - bbA)}}{\sqrt{[(a-b).yy + bbA]}}$ $= dx$. Si $a = b$, l'on a $dx = \frac{dy\sqrt{(yy - aA)}}{\sqrt{aA}} =$ $\frac{dy\sqrt{(yy - bb)}}{b}$ (en faisant $\sqrt{aA} = b$), équation à la développante d'un cercle dont le rayon $= b$ (voyez section précédente n°. 27). Si on n'ajoute point de constante dans l'intégration, ou ce qui revient au même si l'on suppose $A = 0$, on aura $dx = \frac{dy\sqrt{b}}{\sqrt{(a-b)}}$, ou $dx = cdy$, (dans laquelle, pour éviter les imaginaires, b ne doit pas être plus grand que a). Cette équation appartient à la spirale logarithmique.

323. PROBLEME. *Trouver une courbe rapportée à un axe dans laquelle le rayon osculateur est une fonction quelconque de y.* En employant la formule $R = \frac{bdy}{dp}$, nous aurons $dp = \frac{bdy}{R}$ & $p = S. \frac{bdy}{R} + A$, mais $p = \frac{bdx}{ds}$. Ainsi $\frac{bdx}{ds} = S. \frac{bdy}{R} + A$; donc $\frac{bdx}{ds}$ doit être une fonction de y que je ferai $= z$ pour avoir z $= S. \frac{bdy}{R} + A$. Mais $\frac{bdx}{ds} = z$; donc $bdx = zds$,

$b^2 dx^2 = zz ds^2 = z^2 dx^2 + z^2 dy^2$, & $dx = \frac{z\,dy}{\sqrt{(bb - zz)}}$, équation dans laquelle les ordonnées sont séparées, puisque z est une fonction de y.

324. PROBLEME. *Quelle est la courbe rapportée à un foyer dans laquelle le rayon osculateur est une fonction de y?* Puisque $R = \frac{y\,dy}{dp}$, nous aurons $dp = \frac{y\,dy}{R}$ & $S. \frac{y\,dy}{R} + A = p = \frac{y\,dx}{ds}$.

325. PROBLEEME. *D'un point donné* A *ayant mené les lignes* AB, AC (*fig.* 13), *à la courbe* BC, *la premiere au point donné* B, *la seconde à un point quelconque* C, *& tiré les lignes* BE, CE *perpendiculaires à la courbe, on demande la nature de cette courbe, lorsque* BAC *doit toujours être égal à l'angle* BEC. Ayant pris l'arc infiniment petit CD, je mene le rayon AD & le rayon osculateur DQ. Puisque l'angle CQD = BPD — BEC(*), CQD sera la différentielle de l'angle BEC, comme CAD est celle de l'angle BAC; donc en supposant que $a = n$, l'on aura CAD : CQD : : $a : n$; mais si du point A nous décrivons l'arc Cp = dx, & que nous fassions CD = ds, le rayon osculateur CQ = R, le sinus total = 1 & le rayon AC de la courbe = y, nous aurons AC : Cp : : 1 : CAD, (on peut, si l'on veut, entendre par CAD la mesure de cet angle par un arc de cercle décrit avec le rayon 1) = $\frac{Cp}{AC}$. On aura aussi CQD = $\frac{CD}{CQ}$; donc $\frac{dx}{y} : \frac{ds}{R} :: a : n$, ou $\frac{n\,dx}{ay} = \frac{ds}{R}$. Mais

$$R = \frac{y\,ds^3}{dx\,ds^2 + y\,dy\,ddx - y\,dx\,ddy};$$

(*) Car l'angle BEC = PEQ & l'angle BPD extérieur au triangle PEQ vaut les deux intérieurs opposés.

donc

donc on aura $\frac{ds}{R} = \frac{ndx}{ay} = \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{yds^2}$, ou $\frac{(n-a)dxds^2}{y} = a(dyddx - dxddy)$, mais $n - a = 0$; donc $dyddx - dxddy = 0$, ou en divisant par dy^2, $\frac{dyddx - dxddy}{dy^2} = 0$; donc en intégrant, $\frac{dx}{dy} = C$, équation à la spirale logarithmique.

326. PROBLEME. *Supposant que le côté* CN *du rayon osculateur (voyez section 1e, n°. 101) est une fonction de l'arc* AC $= s$, *trouver la nature de la courbe* AC (*fig* 14).

Soit CN $= u$, nous aurons $u = \frac{dxds^2}{dyddx - dxddy}$ (sect. 1e, n°. 101), ou $\frac{dxds^2}{u} = dyddx - dxddy$

Soit $\frac{dx}{dy} = \frac{t}{a}$, & $dyddx - dxddy = \frac{dt.dy^2}{a}$; donc $\frac{dxds^2}{u} = \frac{dtdy^2}{a}$ (A). Mais l'équation $\frac{dx}{dy} = \frac{t}{a}$ donne $aadx^2 = ttdy^2$; ainsi $\frac{(aa+tt)dx^2}{tt} = dy^2 + dx^2 = ds^2 = \frac{(aa+tt).dx^2}{tt}$; donc $dx = \frac{tds}{\sqrt{(aa+tt)}}$, & $dy = \frac{ads}{\sqrt{(aa+tt)}}$. substituant ces valeurs dans l'équation A, il vient $\frac{tds^3}{u\sqrt{(aa+tt)}} = \frac{adtds^2}{aa+tt}$, ou $\frac{ds}{u} = \frac{adt}{t\sqrt{(aa+tt)}}$, équation dans laquelle les variables sont séparées, puisque s est une fonction de u.

327. PROBLEME. *Etant donné un point A (fig. 15) situé sur une droite AB, donnée de position, trouver la courbe MC dans laquelle ayant mené la normale BC, l'on a toujours AB : BC :: m :: n, c'est-à-dire en raison donnée de m : n.* Soit AB $= t$, l'on aura BC $= \frac{n.t}{m}$. Menons CD perpendiculaire à BA, & faisons AD $= x$, DC $= y$. Le triangle rectangle BCD donnera $\frac{nn.tt}{mm} = y^2 + (t - x)^2$, d'où l'on tire $t = \frac{mmx \pm m\sqrt{[nnxx - yy.(mm - nn)]}}{mm - nn}$, équation que je désigne par (B). Mais la propriété de la normale donne $dx : dy :: y : t - x$, ou $(t - x).dx = ydy$; or par l'équation ci-dessus, $ydy = \frac{nn}{mm}tdt - (t - x).(dt - dx)$; donc $(t - x).dx = \frac{nn}{mm} \times tdt - (t - x).dt + (t - x).dx$. Effaçant les termes qui se détruisent & transposant, $(t - x).dt = \frac{nn}{mm}tdt$; d'où l'on tire $\left(\frac{mm - nn}{mm}\right).tdt = xdt$. Cette équation fournit ces deux autres $dt = 0$, $\frac{mm - nn}{mm}.t = x$. Par la premiere $t = A$, substituant cette valeur dans l'équation B, il vient $\frac{mmx \pm m\sqrt{[nnxx - yy.(mm - nn)]}}{mm - nn} = A$, ou $\pm m\sqrt{[nnxx - yy.(mm - nn)]} = (mm - nn).A - mmx$, & en quarrant, $m^2 n^2 x^2 - m^2 y^2 (m^2 - n^2) = (mm - nn)^2 A^2 - 2m^2 (mm - nn) Ax + m^4 x^2$, ou $- m^2 y^2 (mm - nn) - A^2 (mm - nn)^2 = m^2 (mm - nn). x^2 - 2m^2 (mm - nn) Ax$. Si

l'on divise par $mm(mm-nn)$, il viendra $-y^2 - \frac{A^2(mm-nn)}{mm} = x^2 - 2Ax$; & en ajoutant A^2 de part & d'autre, on trouvera $\frac{nnA^2}{mm} - y^2 = (x-A)^2 = z^2$ (en faisant $x - A = z$); mais $\frac{nnAA}{mm} - yy = zz$ est l'équation à un cercle dont le rayon $= \frac{nA}{m}$, & l'abcisse $= z$; ainsi la courbe cherchée est un cercle.

328. PROBLEME. *Trouver la nature de la courbe* BDC *décrite dans l'angle droit* CAB, *telle que chaque tangente* GDH, *terminée par les côtés de l'angle* A, *soit constante &* $= a$ (*fig.* 16). Du point de contact D, je mène des paralleles aux côtés de l'angle A, & faisant $AE = FD = x$, $ED = AF = y$, j'aurai la soustangente $EG = \frac{-ydx}{dy}$, $FH = \frac{-xdy}{dx}$ (la soustangente EG a le signe $-$, parce que x augmentant y diminue). Donc $AG = x - \frac{ydx}{dy} = \frac{xdy - ydx}{dy}$, $AH = y - \frac{xdy}{dx} = -\left(\frac{xdy - ydx}{dx}\right)$. Donc $HG^2 = \left(\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2}\right).(xdy - ydx)^2 = aa$, ou $xdy - ydx = \frac{adxdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, ou $x = \frac{ydx}{dy} + \frac{adx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Soit $x = S. - \frac{zdy}{a}$, & $dx = \frac{-zdy}{a}$. Ayant fait la substitution, je trouve $S. \frac{-zdy}{a} = \frac{-zy}{a} + \frac{az}{\sqrt{(aa+zz)}}$. Je donne le signe $+$ au dernier terme, parce que la racine quarrée de dy^2

doit avoir le signe —. Si l'on différencie cette équation, on trouvera $\frac{-z\,dy}{a} = \frac{-z\,dy}{a} - \frac{y\,dz}{a} + \frac{a^3\,dz}{(aa+zz)^{\frac{3}{2}}}$, ou $\frac{y\,dz}{a} = \frac{a^3\,dz}{(aa+zz)^{\frac{3}{2}}}$. D'où l'on tire $dz = 0$, & $y = \frac{a^4}{(aa+zz)^{\frac{3}{2}}}$. Donc $z = A$, & par conséquent $x = S. \frac{-A\,dy}{a} = B - \frac{Ay}{a}$, équation à une ligne droite. Pour avoir la position de cette droite, il faut déterminer B en A. Si l'on substitue la valeur de x & de dx que donne cette équation, dans $x = \frac{y\,dx}{dy} + \frac{a\,dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, on trouvera $B - \frac{Ay}{a} = \frac{-Ay}{a} + \frac{Aa}{\sqrt{(AA+aa)}}$, ou $B = \frac{Aa}{\sqrt{(AA+aa)}}$. Donc $x = \frac{Aa}{\sqrt{(AA+aa)}} - \frac{Ay}{a}$.

Mais laissant la ligne droite que nous ne cherchons pas, examinons ce qui peut résulter de l'équation $y = \frac{a^4}{(aa+zz)^{\frac{3}{2}}}$, qui donne $z = a.\frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{3}}}$. L'on aura donc $x = S. \frac{-z\,dy}{a} = S. \frac{-dy}{y^{\frac{1}{3}}}.\left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$; donc $x = A + \left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. Afin de déterminer la constante A, je substitue la valeur de x & de dx que donne cette équation dans $x = \frac{y\,dx}{dy} + \frac{a\,dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, pour avoir $A + \left(a^{\frac{2}{3}} -\right.$

$y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = -y^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{2}{3}}. (a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$ $= (a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$; équation qui ne peut être vraie qu'en supposant $A = 0$; donc l'équation de la courbe cherchée est $x = (a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$, ou $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, équation à une ligne du sixieme ordre.

329. PROBLEME. *On demande la nature de la courbe* BDC *décrite entre les côtés de l'angle droit précédent, dans laquelle le produit* $AG.^m AH^n$ *est constant &* $= a^{m+n}$. L'on aura donc $\pm \frac{(xdy - ydx)^{m+n}}{dy^m dx^n} = a^{m+n}$, le signe + a lieu si n est pair, & le signe — si n est impair. Donc $xdy - ydx = a. (\pm dy^m dx^n)^{\frac{1}{m+n}}$, & $x = \frac{ydx}{dy} + \frac{a. (\pm dy^m dx^n)^{\frac{1}{m+n}}}{dy}$.

Faisons comme ci-dessus $x = S. \frac{-z\,dy}{a}$, pour avoir

$$S. \frac{-z\,dy}{a} = \frac{-zy}{a} + \frac{a. \left(\pm dy.^m \frac{z^n dy^n}{a^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}}{dy}$$

$= -\frac{zy}{a} + a^{\frac{m}{m+n}} z^{\frac{n}{m+n}}$. En prenant les différences, divisant par dz & transposant, il vient $\frac{y}{a} = \frac{n}{m+n}. a^{\frac{m}{m+n}} z^{\frac{-m}{m+n}}$, ou $z^{\frac{m}{m+n}} = \frac{n}{m+n} \times$

$\frac{a^{\frac{2m+n}{m+n}}}{y}$, ou $z = \left(\frac{n}{m+n}\right)^{\frac{m+n}{n}} \cdot \frac{a^{\frac{2m\cdot}{n}}}{y^{\frac{m-}{1}}}$

Mais $x = S\frac{-z\,dy}{a}$; donc $x = \left(\frac{n}{m+n}\right)^{\frac{m+}{m}}$

$S.\frac{-a^{\frac{m+n}{m}}\,dy}{y^{\frac{m+n}{n}}}$. Si l'on prend cette intégrale s

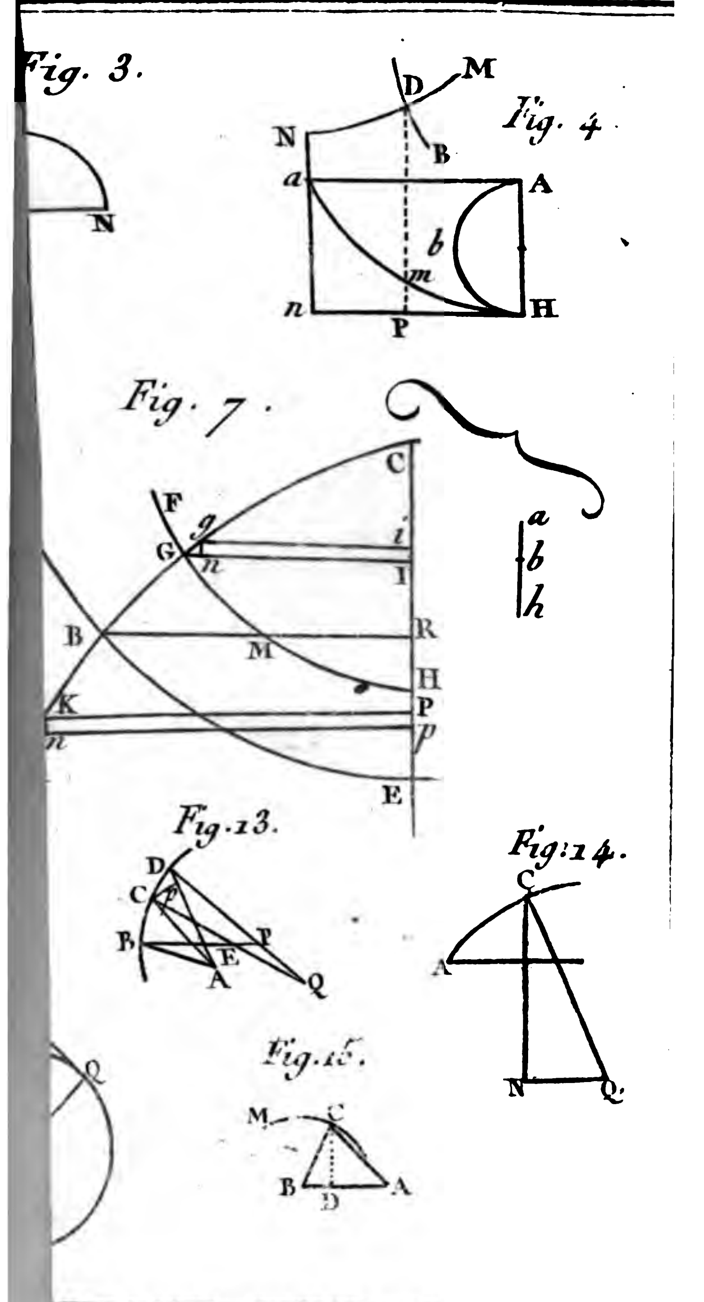
ajouter aucune constante (ce qui seroit superflu d

ce cas), il viendra $x = \frac{m}{n}\cdot\left(\frac{n}{m+n}\right)^{\frac{m+n}{m}}$

$\frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{y^{\frac{n}{m}}}$, ou $x^m y^n = \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{n}{m+n}\right)^{m+n}$

a^{m+n}, équation qu'on peut facilement réduire à celle-c $x^m y^n = b^{m+n}$, qui appartient à une infinité d'hy-perboles.

330. PROBLEME. *Les mêmes choses étant supposées trouve la courbe dans laquelle* $\overline{AG}^m + \overline{AH}^m = a^m$. On trouve aisément l'équation $\left(\frac{1}{dy^m} \pm \frac{1}{dx^m}\right)\cdot(x\,dy - y\,dx)^m = a^m$; le signe supérieur a lieu lorsque m est pair & l'inférieur si m est impair. Donc $x = S.\frac{-z\,dy}{a} = \frac{y\,dx}{dy}$ $+ \frac{a\,dx}{(dx^m \pm dy^m)^{\frac{1}{m}}} = \frac{-zy}{a} + \frac{az}{(a^m + z^m)^{\frac{1}{m}}}$.

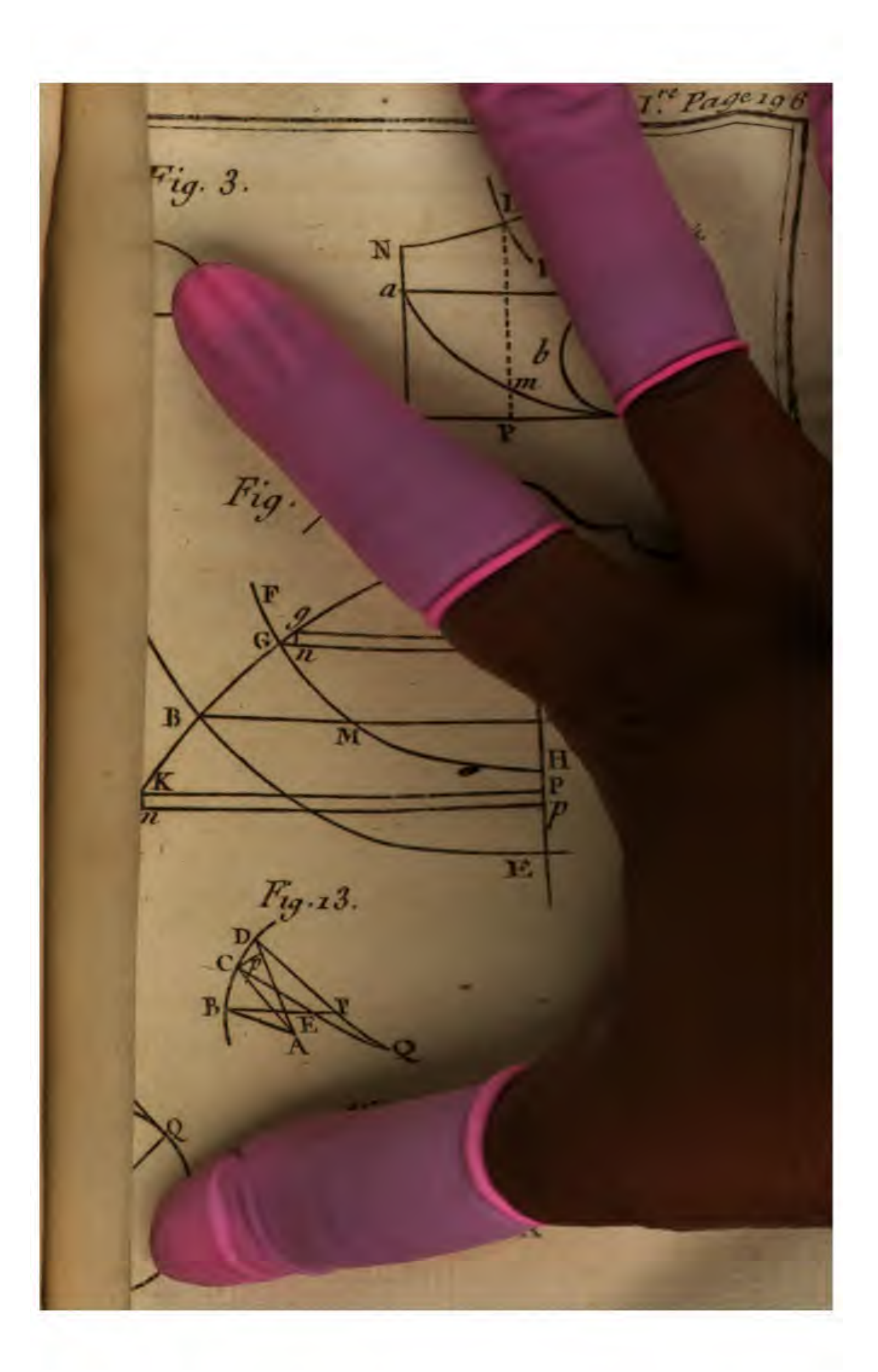


Picquet Sculpsit

$\frac{a^{\frac{2m+n}{m+n}}}{y}$, ou $z = \left(\frac{n}{m+n}\right)^{\frac{m+n}{n}} \cdot \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{y^{\frac{m+n}{m}}}$.

Mais $x = S\frac{-z\,dy}{a}$; donc $x = \left(\frac{n}{m+n}\right)^{\frac{m+n}{m}} \times$ $S. \frac{-a^{\frac{m+n}{m}}\,dy}{y^{\frac{m+n}{n}}}$. Si l'on prend cette intégrale sans ajouter aucune constante (ce qui seroit superflu dans ce cas), il viendra $x = \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{n}{m+n}\right)^{\frac{m+n}{m}} \times$ $\frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{y^{\frac{n}{m}}}$, ou $x^m y^n = \left(\frac{m}{n}\right)^m \cdot \left(\frac{n}{m+n}\right)^{m+n} \times$ a^{m+n}, équation qu'on peut facilement réduire à celle-ci, $x^m y^n = b^{m+n}$, qui appartient à une infinité d'hyperboles.

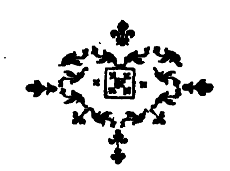
330. PROBLEME. *Les mêmes choses étant supposées trouver la courbe dans laquelle* $\overline{AG}^m + \overline{AH}^m = a^m$. On trouve aisément l'équation $\left(\frac{1}{dy^m} \pm \frac{1}{dx^m}\right) \cdot (x\,dy - y\,dx)^m$ $= a^m$; le signe supérieur a lieu lorsque m est pair & l'inférieur si m est impair. Donc $x = S. \frac{-z\,dy}{a} = \frac{y\,dx}{dy}$ $+ \frac{a\,dx}{(dx^m \pm dy^m)^{\frac{1}{m}}} = \frac{-zy}{a} + \frac{az}{(a^m \mp z^m)^{\frac{1}{m}}}$.


I.re Page 196
Fig. 3.
N
a
b
m
P
Fig.
F
g
G
n
B
M
H
K
P
p
n
E
Fig. 13.
D
C
f
B
F
E
A
Q
Q

& $-z\,dy = -z\,dy - y\,dz + \frac{a^{m+2}\,dz}{(a^m+z^m)^{\frac{m+1}{m}}}$,

ou $y = \frac{a^{m+2}}{(a^m+z^m)^{\frac{m+1}{m}}}$, ou $a^m + z^m = a^m . \frac{a^{\frac{m}{m+1}}}{y^{\frac{m}{m+1}}}$, & $z = a . \frac{\left(a^{\frac{m}{m+1}} - y^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{1}{m+1}}}$. Donc

$x = S. \frac{-z\,dy}{a} = S. \frac{-dy}{y^{\frac{1}{m+1}}} . \left(a^{\frac{m}{m+1}} - y^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{m}{m+1}} - y^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{m}}$, ou $x^{\frac{m}{m+1}} + y^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}}$, équation de la courbe cherchée.



CALCUL

DES VARIATIONS.

1. La *variation* d'une quantité eſt l'accroiſſement infiniment petit qui arrive à cette quantité. Si on conçoit, par exemple, que x ſoit augmenté d'une quantité infiniment petite que nous déſignerons par vx, de maniere qu'il devienne $x + vx$, vx ſera la variation de x. Dans tout ce que nous dirons ſur le Calcul des variations, nous employerons la lettre v pour déſigner la variation : ainſi vy déſignera la variation de y, c'eſt-à-dire, l'accroiſſement infiniment petit que y eſt ſuppoſé recevoir.

C'eſt à M. de la Grange, célèbre Mathématicien, que nous devons les premieres notions du beau Calcul des variations, Calcul dont on peut faire uſage dans la réſolution des problêmes très-difficiles. Mais pour fixer les idées, ſuppoſons que B D (fig. 1) repréſente l'ordonnée d'une courbe. Si l'on augmente cette ordonnée d'une quantité D b infiniment petite, le point b appartiendra à la courbe variée amb qui différera infiniment peu de la courbe A M, pourvu qu'on prenne les variations (des ordonnées) infiniment petites.

Si on propoſe de mener du point A à la courbe C D, une courbe A M qui ſoit ſuſceptible d'un *maximum* ou d'un *minimum*, la courbe variée am ne différant qu'infiniment peu de la courbe A M, lorſqu'on ſuppoſera que la différence s'évanouit, le point m tombera ſur le point M, & la variation de l'ordonnée P M ſera $= 0$. A l'égard du point A, il eſt viſible que dans ce cas l'ordonnée correſpondante ne doit ſubir aucune variation. Pour ce qui regarde l'abciſſe A B, on doit lui donner une variation qui s'accorde avec la nature de la courbe C D. Ainſi pour que le calcul puiſſe s'appliquer à cette variation, il eſt néceſſaire que pour tous les points de la courbe A D ſitués entre A & D on attribue des variations, ſoit aux abciſſes, ſoit aux ordonnées.

S'il eſt queſtion de mener entre deux courbes données A N, C n, une courbe N n qui ſoit ſuſceptible

d'un *maximum* ou d'un *minimum* ; on doit auſſi concevoir des variations non-ſeulement aux ordonnées, mais encore aux abciſſes. Pour nous faire mieux entendre, ſuppoſons que lorſque BP $= x$ (fig. 4) augmente de la quantité $Pp = dx$, l'ordonnée $PM = y$ devient $= pN + Nn = y + dy$. Suppoſons que la variation de BP ſoit $= Pg$, & que celle de Pp ſoit $= gD$, celle de Bp ſera $= pD = v(x + dx) = vx + vdx$, tandis que $v(y + dy) = vpn$ eſt $= bm$; alors Dm ſera l'ordonnée de la courbe variée, correſpondante à l'abciſſe Bp, & à l'ordonnée pn de la courbe AM.

Au reſte, après avoir trouvé une *courbe variée*, on ne paſſe pas à la courbe qui ſeroit la variée de celle-ci ; c'eſt pourquoi dans ce calcul on ne conſidere nullement la variation de la variation, ou la ſeconde variation, au lieu que dans le calcul différentiel on conſidere la différentielle de la différentielle ; ainſi ces calculs ſont bien différens.

Les variations ne ſont aſſujetties à aucune loi ; elles ſont indépendantes l'une de l'autre : il ſuffit ſeulement qu'elles ſoient infiniment petites. L'on peut donc ſuppoſer qu'une ſeule ordonnée P M reçoit une variation, tandis que les autres ordonnées ne varient nullement ; mais parce que dans ce cas-là *la loi de continuité* ſeroit violée (*), il ſera bon de concevoir que toutes les ordonnées varient, ſe réſervant de ſuppoſer nulles toutes les variations, excepté celle dont on a beſoin, à la fin de toutes les différenciations & de toutes les intégrations ; de cette maniere on gardera du moins une apparence de loi de continuité. On peut donc ſuppoſer $= 0$, la variation Mm (fig. 2) de l'ordonnée d'une courbe quelconque A M, en ſuppoſant que les variations des autres ordonnées de la même courbe ne ſont pas nulles.

S'il s'agit d'une courbe à double courbure B M (fig. 3)

(*) C'eſt une loi par laquelle, ſi elle exiſte, comme bien des gens le prétendent, rien ne ſe fait par ſaut dans la nature. Nous en parlerons dans la phyſique.

dont les co-ordonnées ſoient AP $= x$, PD $= y$, DM $= z$, on peut concevoir que la courbe variée *am* réſulte des variations des z ſeuls. Mais on peut auſſi avoir une courbe variée, en faiſant varier ſoit les x, ſoit les y, ſéparément ou enſemble.

Si nous ſuppoſons que dans une courbe à ſimple courbure les valeurs des ordonnéées correſpondantes aux x, $x + dx$, $x + 2dx$, $x + 3dx$, &c. ſoient reſpectivement y, y', y'', y''', &c. On aura par la nature des différentielles $d.(vy) = vy' - vy$; $d.(vy') = vy'' - vy'$; $d.(vy'') = vy''' - vy''$; &c. & $dd.(vy) = d(vy' - vy) = d.(vy') - d.(vy) = vy'' - vy' - vy' + vy = vy'' - 2vy' + vy$.; l'on a auſſi $d^3 vy$ ou $d^3(vy) = d.(vy'' - 2vy' + vy) = d.vy'' - 2d.vy' + d.vy = vy''' - vy'' - 2vy'' + 2vy' + vy' - vy = vy''' - 3vy'' + 3vy' - vy$, &c.

De-là il ſuit que ſi l'ordonnée y reçoit une variation, les variations des ordonnées y', y'', y''', &c. étant ſuppoſées $= 0$, auſſi-bien que celles de x, $x + dx$, &c. on aura $d.vy$ ou $d(vy) = - vy$; $ddvy = + vy$; $d^3 vy = - vy$; $d^4 vy = + vy$; &c.

2. Le *Calcul des variations eſt la méthode de trouver la variation que reçoit une expreſſion qui renferme un nombre quelconque de variables, en attribuant des variations à une ſeule variable, à toutes les variables, ou ſeulement à quelques-unes.*

Soit V une expreſſion qui renferme les variables x, y, z. Si dans cette expreſſion on ſubſtitue $x + vx$, $y + vy$, $z + vz$, au lieu de x, y, z reſpectivement, la quantité V deviendra V′, & l'expreſſion V′ — V ſera la variation de V. Si on veut que la variation de x, par exemple, ſoit nulle, on fera $vx = 0$. Si l'on ſuppoſe nulle la variation de y, on fera $vy = 0$.

3. THÉOREME. *La variation de la différentielle d'une expreſſion* V, *eſt toujours égale à la différentielle de ſa variation; c'eſt-à-dire*, $vdV = d.(vV)$, *quelle que ſoit la quantité* V, *qui tandis qu'elle croît par des différentielles, reçoit auſſi une variation.* On peut conſidérer V comme l'ordonnée d'une courbe, qui en paſſant d'un point de cette courbe à un point infiniment proche,

devient $V + dV = V'$, de maniere que $dV = V' - V$; donc $v dV = v(V' - V) = vV' - vV$. Or dvV exprime la différence entre vV' & vV, donc $v(V' - V) = d.vV = v.dV$ (les expressions dvV & $d.vV$ ont la même valeur, ainsi que vdV & $v.dV$).

COROLLAIRE. SI dans l'équation $d.vV = v.dV$, on écrit dV au lieu de V, on aura $d.vdV = v.ddV$; or $dvV = vdV$; donc $ddvV = vddV$; donc $vddV = dvdV = ddvV$. Si on écrit encore ici dV pour V, on aura égalité entre ces quatre formes: $vdddV = d.vddV = dd.vdV = ddd.vV$; ensuite entre ces cinq formes $v.d^4V = d.vd^3V = dd.vd^2V = d^3.vdV = d^4vV$. & en général on aura $v.d^nV = d^m.vd^{n-m}V = d^n.vV$ (nous supposons m & n entiers, positifs, de maniere que $m = n$, ou $< n$). En général, la variation d'une différentielle d'un ordre quelconque est égale à la différentielle du même ordre de la variation.

REMARQUE. Ce théorême a également lieu, quel que soit le nombre des variables qui entrent dans V; car dans la démonstration on peut tenir compte de la seule variable, dont on considere soit la différentielle, soit la variation, sans avoir égard aux autres variables (*).

(*) Ainsi en faisant varier x dans V, on aura $v\left(\frac{dV}{dx}\right)dx = dvV$, faisant varier y, on a $v\left(\frac{dV}{dy}\right)dy = dvV$, de même $v\left(\frac{dV}{dz}\right)dz = dvV$; donc en faisant tout varier, on a toujours $vdV = d.vV$. Il faut faire attention que lorsqu'on dit que $v\left(\frac{dV}{dx}\right)dx = dvV$, on suppose que x seul reçoit une variation; de maniere qu'alors $vy = o$, $vz = o$, &c. $dy = o$, $dz = o$, &c. S'il s'agit de faire varier y seul, on a $dx = o$, & $vx = o$, $dz =$ & $vz = o$, &c.

4. PROBLEME. *Etant données les variations* vx, vy, *des variables* x *&* y, *trouver la variation de la formule différentielle*, $p = \frac{dy}{dx}$. Puifque $vdy = d.vy$, & que $vdx = d.vx$, la variation cherchée vp fe trouvera par les régles ordinaires de la différenciation, en écrivant le figne v de la variation à la place du figne d de la différenciation; de forte que l'on aura $vp = \frac{dx v.dy - dy v.dx}{dx^2}$. Mais par le théorême précédent $vdy = d.vy$ & $vdx = d.vx$; donc $vp = \frac{dx dvy - dy d.vx}{dx^2}$, où l'on peut remarquer que $v.dx = v(x + dx) - vx$, & $dvy = v(y + dy) - vy$.

On trouvera la même chofe fi on fubftitue $x + vx$, $y + vy$, au lieu de x & de y; car on aura $p + vp = \frac{d(y + vy)}{d(x + vx)} = \frac{dy + dvy}{dx + dvx}$. Or à caufe de $p = \frac{dy}{dx}$, on a $vp = v\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy + dvy}{dx + dvx} - \frac{dy}{dx} = \frac{dx dvy - dy dvx}{dx^2}$.

5. COROLLAIRE. Si l'on fuppofe que x augmenté de fa différentielle eft $= x'$, & que celui-ci augmenté de fa différentielle devient $= x''$; de maniere que l'on ait $x + dx = x'$, $x' + dx' = x''$; que l'on faffe de même $y + dy = y'$, $y' + dy' = y''$, on aura $dvx = vx' - vx$, $dvy = vy' - vy$, & $vp = \frac{dx(vy' - vy) - dy(vx' - vx)}{dx^2}$, & parce que les variations d'une des variables font indépendantes de celles de l'autre variable, on pourra fuppofer $vx = 0$, $vx' = 0$, & alors $vp = \frac{dvy}{dx} = \frac{vy' - vy}{dx}$. Si on fuppofe encore que y feul a une variation, tandis que $vy' = 0$, on aura $vp = -\frac{vy}{dx}$.

6. REMARQUE. Dans la résolution des *problêmes des isopérimètres*, on a coutume de considérer la courbe variée, comme ne différant de la courbe non variée que dans un seul élément ; de sorte que l'on fait $vx' = 0$, $vy' = 0$, $vx'' = 0$, $vy'' = 0$; &c. bien plus pour la commodité du calcul on fait $vx = 0$, de sorte que toute la variation se réduit au seul élément vy ; donc alors $vp = -\frac{vy}{dx}$; & cette seule variation, dans une seule ordonnée y, suffit pour résoudre tous les problêmes de ce genre qu'on a résolus jusques ici ; mais si nous voulons que la courbe cherchée puisse recevoir certaines déterminations à son commencement & vers sa fin ; il est nécessaire de donner aux co-ordonnées intermédiaires des variations indéfinies, & cela doit avoir lieu, sur-tout si l'on veut appliquer certaines recherches aux courbes non-continues.

7. PROBLEME. *Etant données les variations vx, vy des variables x & y, si l'on fait $dy = pdx$, $dp = qdx$, trouver la variation de q.* Puisque $q = \frac{dp}{dx}$, on aura $q + vq = \frac{d(p + vp)}{d(x + vx)} = \frac{dp + dvp}{dx + dvx}$; donc en ôtant q d'un côté & $\frac{dp}{dx}$ de l'autre, on aura $vq = \frac{dxdvp - dpdvx}{dx^2}$, où il est à propos de faire attention que $vdx = dvx$, & que $vdp = dvp$.

COROLLAIRE. Puisque $p = \frac{dy}{dx}$ & $q = \frac{dp}{dx}$, on aura $vp = \frac{dvy}{dx} - \frac{pdvx}{dx}$, & $vq = \frac{dvp}{dx} - \frac{qdvx}{dx}$. Si on suppose que les variations de x sont nulles, on aura $vp = \frac{dvy}{dx}$ & $vq = \frac{dvp}{dx}$.

8. PROBLEME. *Etant données les variations de deux variables x & y, déterminer les variations des rapports entre leurs différentielles d'un degré quelconque.* Ayant supposé $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$, $dr = s\,dx$, &c. La question se réduit à assigner les variations des quantités p, q, r, s, &c. puisque les rapports des différentielles de tous les ordres se réduisent à ces quantités. Pour ce qui regarde p & q, nous avons déja vu que $vp = \frac{dvy}{dx} - \frac{p\,dvx}{dx}$, & que $vq = \frac{dvp}{dx} - \frac{q\,dvx}{dx}$; mais parce que $r = \frac{dq}{dx}$ & $s = \frac{dr}{dx}$, &c.; on trouvera facilement par les régles de la différenciation, en employant le signe v au lieu de d, on trouvera, dis-je, $vr = \frac{dvq}{dx} - \frac{r\,dvx}{dx}$; $vs = \frac{dvr}{dx} - \frac{s\,dvx}{dx}$; &c.

COROLLAIRE I. Si on attribue des variations à y & non à x, on aura $vp = \frac{dvy}{dx}$, $vq = \frac{dvp}{vx}$, $vr = \frac{dvq}{dx}$. Mais à cause de $q = \frac{dp}{dx}$, on aura en supposant dx constant, & nullement sujet aux variations, on aura, dis-je, $dp = \frac{ddy}{dx}$, $vp = \frac{dvy}{dx}$, & $vq = \frac{ddvy}{dx^2}$. On aura aussi $vr = \frac{d^3vy}{dx^3}$; $vs = \frac{d^4vy}{dx^4}$; &c.

COROLLAIRE II. Si les variations de y sont supposées nulles, & qu'on fasse en même-tems dx constant, on aura $vp = \frac{-p.dvx}{dx}$; $vq = \frac{-pddvx}{dx^2} - \frac{2qdvx}{dx}$; $vr = \frac{-pd^3vx}{dx^3} - \frac{3q.ddvx}{dx^2} - \frac{3rdvx}{dx}$; $vs = \frac{-pd^4vx}{dx^4} - \frac{4qd^3vx}{dx^3} - \frac{6rddvx}{dx^2} - \frac{4sdvx}{dx}$.

L'on peut remarquer que, quoique dx ſoit ſuppoſé conſtant, il y a ici des différentielles des ordres ſupérieurs de la variation vx; la raiſon en eſt que les variations des valeurs de x continuellement augmentées x', x'', x''', &c. ne ſont pas cenſées dépendre des différentielles.

9. **Probleme.** *V étant une fonction finie compoſée des variables x, y, & de leurs différentielles d'un ordre quelconque, trouver ſa variation.* Puiſque V a une valeur finie, en faiſant $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$, &c. on aura $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, &c. & les différentielles diſparoîtront dans l'expreſſion V qui deviendra une fonction des quantités finies x, y, p, q, &c. Donc ſa différentielle aura toujours cette forme $dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr$ &c. Le nombre des termes étant d'autant plus grand qu'il y a des différentielles plus élevées dans V. Maintenant pour avoir la variation vV, il faut, ſelon ce que nous avons dit ci-deſſus (2), ſubſtituer dans V au lieu des variables x, y, p, q, &c. ces mêmes variables augmentées de leurs variations, & du réſultat retranchant V, il reſtera vV; ce qui fait voir qu'on peut trouver vV par les régles ordinaires de la différenciation, en changeant le ſigne d en v. C'eſt pourquoi ſi dans la différentielle ci-deſſus on fait le changement, dont nous venons de parler, nous aurons la variation cherchée $vV = M\,vx + N\,vy + P\,vp + Q\,vq + R\,vr$ &c.

Corollaire. Si l'on ſubſtitue dans cette équation les valeurs que nous avons trouvées dans le problême précédent, on aura $vV = M\,vx + N\,vy + \frac{1}{dx} \times (P\,dvy + Q\,dvp + R\,dvq + \text{\&c.}) - \frac{dvx}{dx} \cdot (Pp + Qq + Rr + \text{\&c.})$. Si les variations de x étant ſuppoſées nulles, on fait encore dx conſtant, on aura

$$vV = N\,vy + \frac{P\,dvy}{dx} + \frac{Q\,ddvy}{dx^2} + \frac{R\,d^3vy}{dx^3} + \text{\&c.}$$

EXEMPLE I. Soit $V = \frac{y\,dx}{dy}$ qui eſt l'expreſſion de la ſous-tangente. A cauſe de $dy = p\,dx$, l'on aura $V = \frac{y}{p}$, & la variation vV devient $\frac{vy}{p} - \frac{yvp}{pp}$; ſi on ſubſtitue la valeur de vp, on trouvera $vV = \frac{vy}{p} - \frac{y\,dvy}{pp\,dx} + \frac{y\,dvx}{p\,dx} = \frac{dx}{dy} \cdot vy - \frac{y\,dx}{dy^2} \cdot dvy + \frac{y}{dy} \cdot dvx$. Cette derniere formule ſe tire facilement de la différenciation de la formule propoſée.

EXEMPLE II. Soit $V = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$, expreſſion de la tangente. A cauſe de $dy = p\,dx$, on a $V = \frac{y}{p}\sqrt{(1+pp)}$ & $vV = \frac{vy}{p}\sqrt{(1+pp)} - \frac{yvp}{pp\sqrt{(1+pp)}}$, à laquelle on peut donner la forme $\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} \cdot vy - \frac{y\,dx}{dy^2 \cdot \sqrt{(dx^2+dy^2)}} \cdot (dx\,dvy - dy\,dvx)$.

EXEMPLE III. Soit $V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,ddy}$. A cauſe de $dy = p\,dx$, & de $dp = q\,dx$, on a $V = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{q}$ & $vV = \frac{3pvp}{q} \cdot \sqrt{(1+pp)} - \frac{vq}{qq} \cdot (1+pp)^{\frac{3}{2}}$.

REMARQUE. Si l'on avoit une fonction z de x, y & de

de leurs différentielles, infinie ou infiniment petite, en faisant $dy = pdx$, $dp = qdx$, &c.; on la réduiroit toujours à cette forme Vdx^n, V étant une fonction finie des quantités x, y, p, &c. Cela posé, cette expression sera infiniment petite, ou infinie, selon que l'exposant n sera positif ou négatif. Supposons que la différenciation ordinaire donne $dV = Mdx + Ndy + Pdp +$ &c., d'où l'on tirera facilement la valeur de vV. Mais la variation de Vdx^n est $= nVdx^{n-1}dvx + dx^n vV$; donc la variation vz sera $= nVdx^{n-1}dvx + dx^n.(Mvx + Nvy + Pvp$ &c.$)$, formule dans laquelle il faut substituer les valeurs de $vp = \frac{dvy - pdvx}{dx}$; de $vq = \frac{dvp - qdvx}{dx}$; &c.

10. THÉOREME. V *étant une formule différentielle qui contienne non-seulement x & y, mais encore les différentielles d'un ordre quelconque de ces mêmes variables, je dis que la variation de la formule intégrale* $S.V$ *sera toujours égale à l'intégrale de la variation de la même formule; c'est-à-dire, que l'on aura* $vS.V = S.vV$. Lorsque V passe de son état non-varié à son état varié, il devient $V + vV$; ainsi la valeur variée de la formule proposée est $S.(V + vV) = S.V + S.vV$; mais $vS.V = S.(V + vV) - S.V = S.vV$; donc &c.

COROLLAIRE I. Etant donc proposée la formule intégrale $S.Vdx$, l'on aura sa variation $vS V.dx = S.v(Vdx) = S.(Vvdx + dxvV) = S.V.dvx + S.dxvV$, à cause de $vdx = dvx$.

COROLLAIRE II. Ayant supposé $vx = t$, pour avoir $dvx = dt$, à cause de $S.Vd.vx = Vt - S.tdV$ (*), on aura $vS.Vdx = Vvx - S.dVvx + S.dx.vV = Vvx + S.(dx.vV - dV.vx)$.

REMARQUE. Puisque $vS.V = S.vV$, on peut donc changer le signe d'intégration S avec le signe v

(*) Par la même raison que $S.pdx = px - S.xdp$.

de la variation, comme on peut changer (par le théorême ci-dessus 3) le signe de la différenciation avec celui de la variation. Non-seulement cela a lieu lorsqu'il s'agit d'un seul signe S, mais cela doit encore s'entendre des intégrations répétées ; de sorte que la variation de SSV est $= vSSV = SvSV = SSvV$.

11. PROBLEME. *Si ayant supposé* $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, *&c.*, V *est une fonction des quantités* x, y, p, q, *&c.*, *trouver la variation de la formule intégrale* S. V dx. Nous venons de voir (10) que la variation de cette formule étoit $vS.Vdx = Vvx - S.dVvx + S.dx.vV$ (A). Mais l'on peut supposer $dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$ &c., & par conséquent $vV = Mvx + Nvy + Pvp$ &c. Substituant ces valeurs de dV & de vV dans l'équation A, il vient $vS.Vdx = Vvx + Sdx(Mvx + Nvy + Pvp$ &c.$) - S.vx(Mdx + Ndy + Pdp$ &c.); mais parce que les parties qui dépendent de M se détruisent, on pourra, en séparant les parties selon les lettres N, P, &c., représenter la variation, par l'équation $vS.Vdx = Vvx + S.N(dxvy - dyvx) + S.P(dxvp - dpvx) + S.Q(dxvq - dqvx)$ &c. Mais parce que $vp = \frac{dvy - pdvx}{dx}$, l'on a $dxvp = dvy - pdvx$; on a de même $dxvq = dvp - qdvx$; $dxvr = dvq - rdvx$; &c. & de plus l'on a $dy = pdx$; donc en substituant ces valeurs on aura $vS.Vdx = Vvx + SNdx(vy - pvx) + SPd.(vy - pvx) + SQd.(vp - qvx)$ &c.

Pour réduire encore cette expression, on remarquera que $vp - qvx = \frac{dvy - pdvx - dpvx}{dx} = \frac{d.(vy - pvx)}{dx}$; $vq - rvx = \frac{dvp - qdvx - dqvx}{dx} = \frac{d.(vp - qvx)}{dx}$; $vr - svx = \frac{dvq - rdvx - drvx}{dx} = \frac{d.(vq - rvx)}{dx}$; &c. Et si on suppose $vy - pvx = t$,

on aura $vp - qvx = \frac{dt}{dx}$; $vq - rvx = \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx}$; $vr - svx = \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx}$; &c. & de cette maniere, en éliminant les lettres p, q, r, &c., nous aurons $\int V dx = V vx + \int N dx.t + \int P dt + \int Q d. \frac{dt}{dx} + \int R d. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx} + \int R' d. \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx} + \int T d. \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx}. d \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx}$ &c., formule dans laquelle la loi de la progression est manifeste.

REMARQUE. La premiere partie Vvx est délivrée de tout signe d'intégration; la seconde partie $\int N dx.t = \int N t dx$; la troisieme partie $\int P dt$, peut s'exprimer ainsi $\int P dt = Pt - \int t dP$; la quatrieme partie $\int Q d. \frac{dt}{dx} = Q. \frac{dt}{dx} - \int dQ. \frac{dt}{dx}$. Mais $\int dQ. \frac{dt}{dx} = \int. \frac{dQ}{dx}. dt$ est $= \frac{dQ}{dx}. t - \int t d. \frac{dQ}{dx}$; de sorte que la quatrieme partie est $= Q. \frac{dt}{dx} - \frac{dQ}{dx}. t + \int t. d. \frac{dQ}{dx}$.

La cinquieme partie $\int R d. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx} = R. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx} - \int. \frac{dR}{dx} d. \frac{dt}{dx}$. Mais $\int. \frac{dR}{dx} d. \frac{dt}{dx} = \frac{dR}{dx}. \frac{dt}{dx} - \int. \frac{1}{dx}. d. \frac{dR}{dx} dt$; & $\int. \frac{1}{dx}. d. \frac{dR}{dx}. dt = \frac{1}{dx}. d. \frac{dR}{dx}. t - \int. t d \frac{1}{dx}. d. \frac{dR}{dx}$; de maniere que la cinquieme partie peut s'exprimer ainsi $R. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx} - \frac{dR}{dx}. \frac{dt}{dx} + \frac{1}{dx} d. \frac{dR}{dx}. t - \int t d. \frac{1}{dx}. d. \frac{dR}{dx}$. On trouvera de

O 2

même que la sixieme partie $SR'd.\frac{1}{dx}.d.\frac{1}{dx}d.\frac{dt}{dx}$ est $=$ $R'.\frac{1}{dx}.d.\frac{1}{dx}d.\frac{dt}{dx}-\frac{dR'}{dx}.\frac{1}{dx}d.\frac{dt}{dx}+\frac{1}{dx}d.\frac{dR'}{dx}\times\frac{dt}{dx}-\frac{1}{dx}d.\frac{1}{dx}d.\frac{dR'}{dx}.t+Std.\frac{1}{dx}d.\frac{1}{dx}d.\frac{dR'}{dx}$; & ainsi de suite pour les parties suivantes.

12. PROBLEME. *Supposant toujours $dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq +$ &c., & $dy = pdx$, $dp = qdx$, &c., exprimer la variation de la formule intégrale $SVdx$, en suppòsant des variations à x & à y, de maniere qu'il ne se trouve aucune différentielle des variations après le signe d'intégration.* Si on dispose par ordre les transformations qu'on vient de faire dans le problême précédent, on pourra disposer sous le signe d'intégration toutes les parties qui en sont affectées, en réduisant ces parties en une somme, & nous distribuerons les autres parties ; que nous nommerons *absolues*, en différens membres, relativement aux variations de x & de y & leurs différentielles ; de sorte que t ayant la même signification què dans le problême précédent, on aura

$$vSVdx = Stdx\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{1}{dx}d.\frac{dQ}{dx}-\frac{1}{dx}d.\frac{1}{x}d.\frac{dR}{dx}+\frac{1}{dx}d.\frac{1}{dx}d.\frac{1}{dx}d.\frac{dR'}{dx}-\text{\&c.}\right)$$
$$+Vvx+t\left(P-\frac{dQ}{dx}+\frac{1}{dx}d.\frac{dR}{dx}-\text{\&c.}\right)$$
$$+\frac{dt}{dx}\left(Q-\frac{dR}{dx}+\frac{1}{dx}d.\frac{dR'}{dx}-\text{\&c.}\right)$$
$$+\frac{1}{dx}d.\frac{dt}{dx}\left(R-\frac{dR'}{dx}+\text{\&c.}\right)$$
$$+\frac{1}{dx}d.\frac{1}{dx}d.\frac{dt}{dx}(R'-\text{\&c.})$$
$$+\text{\&c.}$$

13. COROLLAIRE I. Si l'on suppose dx constant, l'on aura la formule suivante que j'appellerai (A) :

$$\left.\begin{array}{l} \nu S V dx = S t dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \&c.\right) \\ + V\nu x + t\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3}\ \&c.\right) \\ + \frac{dt}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddR'}{dx^2}\ \&c.\right) \\ + \frac{ddt}{dx^2}\left(R - \frac{dR'}{dx} + \&c.\right) \\ + \frac{d^3t}{dx^3}\left(R' - \&c.\right) \\ + \&c. \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} S\nu y dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \&c.\right) \\ + \nu y\left(P - \frac{dQ}{dx}\ \&c.\right) \\ + \frac{d\nu y}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx}\ \&c.\right) \\ + \frac{dd\nu y}{dx^2}\left(R - \frac{dR'}{dx}\ \&c.\right) \\ + \frac{d^3\nu y}{dx^3}\left(R' - \&c.\right), \\ + \&c. \end{array}\right.$$

en supposant que les variations de x sont nulles ; car alors $t = \nu y - p\nu x$ est $= \nu y$ & $V\nu x = 0$.

14. COROLLAIRE II. Si on suppose $\nu y : \nu x :: p : 1 :: dy : dx$, on aura $p\nu x = \nu y$ & $t = \nu y - p\nu x = 0$, & dans ce cas toute la variation de la formule $SVdx$ se réduit à $V\nu x$.

REMARQUE I. S'il est question d'une ligne courbe,

la premiere partie intégrale embrasse toutes les variations qui ont lieu depuis le commencement jusques au terme auquel subsistent les co-ordonnées x & y; mais les parties absolues se déterminent seulement par les variations qui ont lieu aux extrémités de la courbe; c'est-à-dire, aux points correspondans aux ordonnées extrêmes.

15. REMARQUE II. Dans le cas où $SVdx$ devra être un *maximum* ou un *minimum*, on fera sa variation $= 0$: or alors $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ppQ}{dx^2}$ &c. doit être évidemment $= 0$. Mais cela ne suffit pas, il faut encore supposer égales à o, les parties absolues, en quoi consiste l'application aux deux bouts de la courbe. Car la nature de la courbe est exprimée par cette équation, qui à cause des différentielles des degrés supérieurs, doit renfermer autant d'intégrations & autant de constantes qu'il est désigné par l'ordre des différentielles. Or ces constantes sont déterminées par les parties absolues, & c'est par-là qu'on peut satisfaire à certaines conditions, comme, par exemple, que la courbe soit terminée à certaines lignes courbes; & même si cette équation est du quatrieme ordre, ou d'un ordre plus élevé, le nombre des parties absolues est augmenté, & alors on peut exiger que la courbe ait à ses extrémités une certaine direction; & si l'équation est encore plus élevée, on peut demander que la courbe ait à ses extrémités une certaine courbure déterminée. Au reste, en passant aux applications, il a accoutumé d'arriver que la nature des questions embrasse des conditions auxquelles on peut facilement satisfaire par les quantités absolues.

16. REMARQUE III. Puisque nous avons considéré la chose dans un sens très-étendu, en donnant à x & à y des variations quelconques indépendantes de toute loi, & cela dans tous les points de la courbe, il est évident que la variation qui convient à toute la courbe, doit dépendre non-seulement des variations extrêmes, mais encore de toutes les intermédiaires. D'où il suit évidemment, que si par hasard la quantité V est de telle nature que la formule Vdx soit intégrable, sans qu'il y ait aucune relation entre les variables x & y,

& que S. $V dx$ soit une fonction absolue (*) des quantités x, y, p, &c., dans ce cas aussi la variation ne peut dépendre que de la variation des élémens extrêmes; & ainsi la partie intégrale de la variation doit s'évanouir, ou être $= 0$; d'où l'on tire le beau théorême suivant.

17. THÉOREME. *Ayant supposé $dy = p dx$, $dp = q dx$, $dq = r dx$, &c. si V est une fonction des variables x, y, p, &c., telle qu'ayant fait $dV = M dx + N dy + P dp +$ &c., l'on ait $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} +$ &c. $= 0$, en faisant dx constant, la formule différentielle $V dx$ sera intégrable par elle-même, sans établir aucune relation entre x & y, & réciproquement.* En effet, si $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$ &c. $= 0$, dans ce cas la variation de la formule intégrale S. $V dx$ ne renferme aucune formule intégrale, & par conséquent pour chaque position des co-ordonnées x & y, elle dépend des seules variations extrêmes; ce qui ne pourroit nullement avoir lieu si la formule $V dx$ se refusoit à l'intégration, parce que dans ce cas la variation dépen-

(*) La nature des fonctions exige qu'aussi-tôt que les variables, dont elles sont composées, reçoivent une valeur déterminée, la valeur de la fonction soit déterminée. Ainsi en supposant $V = xy$, la fonction V sera $= 12$, si $x = 6$ & $y = 2$; mais une formule intégrale S. $V dx$ ne peut être regardée comme une fonction des variables x, y, p, &c. à moins qu'elle n'admette l'intégration; car autrement en donnant des valeurs déterminées aux variables, on ne détermineroit pas la valeur de la formule. En supposant, par exemple, $x = 2$ & $y = 3$, on ne connoît pas pour cela la valeur de S. $y dx$, à moins que l'on ne connoisse la relation entre y & x; mais dans ce cas la formule ne contient réellement qu'une seule variable.

droit encore des variations intermédiaires (car l'intégration renferme tous les élémens intermédiaires). D'où il suit que toutes les fois que notre équation a lieu, la formule $V\,dx$ admet l'intégration ; de sorte que dans ce cas $S.V\,dx$ est une fonction déterminée des quantités x, y, p, &c. qui font que notre équation a lieu, & sans quoi elle ne pourroit subsister. Réciproquement toutes les fois que la formule différentielle $V\,dx$ est intégrable, & que par conséquent $S.V\,dx$ est une vraie fonction des variables x, y, p, &c. sa variation dépend uniquement des variations extrêmes de x & de y, & les variations intermédiaires ne l'affectent nullement ; donc il est nécessaire que la partie intégrale de la variation s'évanouisse ; ce qui ne peut se faire, à moins qu'on n'ait l'équation $N - \frac{dP}{dx} + \&c. = 0$; & ainsi le théorême inverse est encore vrai.

18. COROLLAIRE I. Voilà donc un *signe* bien digne de remarque, par lequel on peut juger si une équation différentielle a deux variables, & qui renferme des différentielles d'un ordre quelconque, est susceptible d'intégration ou non. Ce signe est bien plus étendu que le signe assez connu par lequel on a coutume de juger de l'intégrabilité des formules différentielles du premier degré. Supposons 1°. que l'on ait l'équation $dV = M\,dx + N\,dy$, V étant une fonction sans différentielles ; la formule $V\,dx$ ne peut être intégrable, à moins que N ne soit $= 0$, c'est-à-dire, à moins que V ne soit une fonction de x sans y, ce qui est évident.

19. REMARQUE I. Pour faire mieux sentir l'utilité du théorême, supposons $V = \frac{p}{y} - \frac{xpp}{yy} + \frac{xq}{y}$, pour avoir $S.V\,dx = \frac{x\,dy}{y\,dx} = \frac{xp}{y}$ (*) ; donc la formule diffé-

(*) On trouvera facilement la valeur de V, en faisant

rentielle $V dx = \left(\frac{p}{y} - \frac{xpp}{yy} + \frac{xq}{y}\right) dx$ eſt intégrable par elle-même. Voyons maintenant ſi notre théorême indique cette intégrabilité : comparant la différentielle dV avec la formule $dV = M dx + N dy + P dp + Q dq$, nous aurons $M = \frac{-pp}{yy} + \frac{q}{y}$; $N = \frac{-p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy}$; $P = \frac{1}{y} - \frac{2xp}{yy}$ & $Q = \frac{x}{y}$. Mais par le théorême, $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0$, & par conſéquent $N = \frac{dP}{dx} - \frac{ddQ}{dx^2}$. De plus $\frac{dP}{dx} = \frac{-3p}{yy} + \frac{4xpp}{y^3} - \frac{2xq}{yy}$ & $\frac{dQ}{dx} = \frac{1}{y} - \frac{xp}{yy}$; donc $\frac{ddQ}{dx^2} = \frac{-2p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{y^2}$; & $\frac{dP}{dx} - \frac{ddQ}{dx^2} = -\frac{p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy} = N$, comme le demande le théorême.

20. REMARQUE II. Lorſque la formule différentielle $V dx$ eſt intégrable par elle-même, & que par conſéquent ayant fait $dV = M dx + N dy + P dp + Q dq$ + &c., l'on a par le théorême, $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$ &c. $= 0$, on peut en déduire de beaux corol-

varier dans $\frac{x dy}{y dx}$; 1°. x, 2°. y, 3°. dy, diviſant le réſultat par dx, & introduiſant enſuite p au lieu de $\frac{dy}{dx}$ & q au lieu de $\frac{ddy}{dx^2}$. On ſuppoſe dx conſtant.

laires. Car 1°. puisque, en multipliant par dx & intégrant, on a $\int N dx - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{ddR}{dx^2} + \&c. = A$, il est visible que la formule $N dx$ est encore intégrable par elle-même. 2°. En multipliant la derniere équation par dx & intégrant, l'on aura $\int dx (\int N dx - P) + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddR'}{dx^2}$ &c. $= Ax + B$; d'où il suit que la formule $dx (\int N dx - P)$ admet l'intégration. On trouvera ensuite de la même maniere que la formule $dx [\int dx (\int N dx - P) + Q]$ est encore susceptible d'intégration & ainsi de suite; d'où l'on peut tirer le théorême suivant très-digne de remarque.

21. THÉOREME. *Ayant fait $dy = p dx$, $dp = q dx$, &c. si V est une fonction des variables x, y, p, &c., telle que $V dx$ soit intégrable par elle-même, alors ayant supposé $dV = M dx + N dy + P dp +$ &c., les formules suivantes seront intégrables par elles-mêmes.*

1°. La formule $N dx$ sera intégrable par elle-même, & ayant fait $P - \int N dx = A$, on trouvera 2°. que $A dx$ admet l'intégration; & ayant fait $Q - \int A dx = B$, on trouvera 3°. que $B dx$ est intégrable par elle-même; faisant ensuite $R - \int B dx = C$, on verra 4°. que la formule $C dx$ est intégrable. On verra de même qu'en faisant $R' - \int C dx = D$, la formule $D dx$ sera intégrable par elle-même; & ainsi de suite. Tout cela est évident par le théorême précédent.

22. COROLLAIRE I. Puisque V est une fonction des quantités x, y, p, &c. & que $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, &c. Les quantités M, N, P, &c. qui en dérivent par la différenciation, peuvent être représentées de la maniere suivante. $M = \left(\frac{dV}{dx}\right)$; $N = \left(\frac{dV}{dy}\right)$; $P = \left(\frac{dV}{dp}\right)$; $Q = \left(\frac{dV}{dq}\right)$; &c. donc si $V dx$ est intégrable, $N dx =$

$\left(\frac{dV}{dy}\right) dx$, ſera auſſi intégrable. Par la même raiſon cette formule $\left(\frac{ddV}{dy^2}\right) dx$ doit être intégrable (*), auſſi-bien que les formules $\left(\frac{dddV}{dy^3}\right) dx$; $\left(\frac{d^4V}{dy^4}\right) dx$; &c.

23. COROLLAIRE II. Parce que le nombre des lettres P, Q, R, &c. dépend évidemment du degré des différentielles qui ſe trouvent dans la formule $V dx$, & que toutes les lettres ultérieures s'évanouiſſent, les lettres A, B, C, &c. qui en dérivent, doivent à la fin s'évanouir, ou ſe changer en fonctions de la ſeule quantité x, autrement les intégrations ſuivantes ne pourroient avoir lieu.

Suppoſons que $S.V dx$ eſt $= \frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{x\,dx\,ddy}$. Ayant fait les ſubſtitutions $dy = p dx$, $dp = q dx$, $dq = r dx$, &c., l'on pourra exprimer la fonction V de cette maniere $V = \frac{p(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xq} - \frac{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxq} + \frac{3yp\sqrt{(1+pp)}}{x} - \frac{yr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq}$. D'où l'on

(*) De ſorte que ſi $\left(\frac{dV}{dy}\right) = V'dx$, cette formule ne peut être intégrable, à moins que $\left(\frac{dV'}{dy}\right) dx = \left(\frac{ddV}{dy^2}\right) dx$, ne le ſoit auſſi ; & celle-ci ne peut être intégrable que $\left(\frac{dddV}{dy^3}\right) dx$ ne le ſoit, & ainſi de ſuite.

pourra tirer, par la différenciation, $N = \frac{-(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxq}$ $+ \frac{3p\sqrt{(1+pp)}}{x} - \frac{r(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq}$; $P = \frac{(1+4pp)\sqrt{(1+pp)}}{xq}$ $- \frac{3yp\sqrt{(1+pp)}}{xxq} + \frac{3y(1+2pp)}{x\sqrt{(1+pp)}} - \frac{3yp r\sqrt{(1+pp)}}{xqq}$;

$Q = \frac{-p(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq} + \frac{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxqq} + \frac{2yr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqqq}$;

$R = \frac{-y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq}$. Maintenant Ndx doit être intégrable, & en effet l'on a $SNdx = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xq}$. La formule $(P - SNdx)\,dx = Adx$, devient $= \frac{3pdy\sqrt{(1+pp)}}{xq} - \frac{3ypdx\sqrt{(1+pp)}}{xxq} + \frac{3ydx(1+2pp)}{x\sqrt{(1+pp)}} - \frac{3ypdq\sqrt{(1+pp)}}{xqq}$. Si l'on intègre le dernier membre, en considérant q seul comme variable, l'on trouvera $\frac{3yp\sqrt{(1+pp)}}{xq}$. Mais en différenciant cette quantité, on trouve la différentielle Adx, ce qui fait voir que $S.Adx = \frac{3yp\sqrt{(1+pp)}}{xq}$. Maintenant si dans la valeur de Qdx on substitue dq au lieu de rdx & $\frac{dp}{q}$ au lieu de $dx = \frac{dp}{q}$, on aura Bdx $= Qdx - dx\,S.Adx = Qdx - \frac{dp}{q}\,S.Adx$, ou

$$Bdx = \frac{-dy(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqqq} + \frac{ydx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxqq} +$$

$$\frac{2ydq(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xq^3} - \frac{3ypdp\sqrt{(1+pp)}}{xqq}.$$ L'intégrale du troisieme membre, prise en considérant q seul comme variable, donnera $\frac{-y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq} = SBdx$. La quatrieme formule donne $C = R - SBdx = 0$; ainsi non-seulement Cdx, mais encore toutes les formules suivantes doivent être censées intégrables.

24. PROBLEME. *Ayant fait $z = Smdx$, m étant une fonction des deux variables x & y & de leurs différentielles, $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, &c. si V exprime une fonction de z & de constantes, trouver la variation de l'intégrale compliquée $SVdx$.* A cause de $z = Smdx$ il est visible que $SVdx$ est une intégrale compliquée. Parce que V est une fonction de z & de constantes, supposons $dV = ndz$, & qu'alors l'on ait pour la fonction m la différentielle $dm = M'dx + N'dy + P'dp + Q'dq$ &c. Cela posé, puisque la variation cherchée est $vSVdx = Sv(Vdx) = S(vVdx + Vvdx$ (*); & que par la réduction dont on s'est servi dans le corollaire second du théorême ci-dessus (10), $vSVdx = Vvx + S.(dxvV - dVvx)$, & parce que de plus l'on a par hypothèse $dV = ndz$, on aura donc aussi $vV = nvz$. Mais à cause de $z = Smdx$, on aura $dz = mdx$, & par conséquent $dV = n.mdx$; & alors $vz = vSmdx = mvx + S(dxvm - dmvx)$, & par conséquent $vV = n.mvx + nS(dxvm - dmvx)$; donc $vSVdx = Vvx + S[n.mdxvx + ndxS(dxvm - dmvx) - n.mdxvx] = Vvx + Sndx.S(dxvm - dmvx)$, équation que nous désignerons par (B).

(*) $v(Vdx) = vV.dx + V.vdx$, par la même raison que $d(Vp) = p.dV + V.dp$.

Supposons que l'intégrale $S.ndx$ est $=g$, l'équation B donnera l'équation (D) $vSVdx = Vvx + gS(dxvm - dmvx) - Sg(dxvm - dmvx)$. Maintenant il est facile de voir qu'on peut représenter $dxvm - dmvx$ par cette équation $dxvm - dmvx = dx(M'vx + N'vy + P'vp \&c.) - vx(M'dx + N'dy + P'dp \&c.) = N'dx(vy - pvx) + P'dx(vp - qvx) + \&c.$ à cause de $dxM'vx - vxM'dx = 0$, & de $dy = pdx$, $dp = qdx$, &c. Mais à cause de dx constant & de $vy - pvx = t$, l'on aura (par le n°. 11.) $vp - qvx = \frac{dt}{dx}$; &c. & ainsi $dxvm - dmvx = N'tdx + P'dt + Q'\frac{ddt}{dx} + R'\frac{d^3t}{dx^2}$ &c., équation que je désignerai par (H). Si l'on prend l'intégrale du second membre de cette équation, en faisant $SP'dt = tP' - StdP'$; $SQ'\frac{ddt}{dx} = \frac{dt}{dx}.Q' - S.\frac{dt}{dx}dQ'$; $S.\frac{dt}{dx}dQ' = \frac{tdQ'}{dx} - St\frac{ddQ'}{dx}$; &c., & qu'on dispose convenablement les termes, on aura l'équation $S(dx.vm - dm.vx) =$

$$\begin{aligned} &Stdx\left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} \&c.\right) \\ &+ t\left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{ddR'}{dx^2} \&c.\right) \\ &+ \frac{dt}{dx}\left(Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{ddR''}{dx^2} \&c.\right) \\ &+ \frac{ddt}{dx^2}\left(R' - \frac{dR''}{dx} \&c.\right) \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

En multipliant l'équation H par g, on aura $g(dxvm - dmvx) = gN'tdx + gP'dt + gQ'\frac{ddt}{dx}$, &c. Si l'on fait l'intégration du second membre de cette derniere équation, selon la méthode de la remarque

du n°. 11, qu'on fasse dx constant, comme on l'a supposé n°. 13, & qu'on arrange les choses selon la méthode ci-dessus (n°. 12), on aura $S\,g\,(dx\,\nu m - d\,m\,\nu x) =$

$$S\,t\,dx\left(g\,N' - \frac{d.gP'}{dx} + \frac{dd.gQ'}{gx^2} - \&c.\right)$$
$$+\,t\left(g\,P' - \frac{d.gQ'}{dx} + \frac{dd.gR'}{dx^2}\ \&c.\right)$$
$$+\frac{dt}{dx}\left(g\,Q' - \frac{d.gR'}{dx}\ \&c.\right)$$
$$+\ \&c.$$

Cela posé, il n'est pas difficile de voir que l'équation D donne la variation cherchée $\nu S\,V\,dx =$

$$V\nu x + g\,S\,t\,dx\left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \&c.\right)$$
$$- S\,t\,dx\left(g\,N' - \frac{d.gP'}{dx} + \frac{dd.gQ'}{dx^2} - \frac{d^3.gR'}{dx^3} + \&c.\right)$$
$$+ g\,t\left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{ddR'}{dx^2} - \frac{d^3R''}{dx^3}\ \&c.\right)$$
$$- t\left(g\,P' - \frac{d.gQ'}{dx} + \frac{dd.gR'}{dx^2}\ \&c.\right)$$
$$+ \frac{g\,dt}{dx}\left(Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{ddR''}{dx^2}\ \&c.\right)$$
$$- \frac{dt}{dx}\left(g\,Q' - \frac{d.gR'}{dx} + \frac{dd.gR''}{dx^2}\ \&c.\right)$$
$$+ \frac{g\,ddt}{dx^2}\left(R' - \frac{dR'}{dx}\ \&c.\right)$$
$$- \frac{ddt}{dx^2}\left(g\,R' - \frac{d.gR''}{dx}\ \&c.\right)$$
$$+ \frac{g\,d^3t}{dx^3}\left(R'' - \&c.\right)$$
$$- \frac{d^3t}{dx^3}\left(g\,R'' - \&c.\right)$$
$$\&c.$$

Si ayant différencié les deux parties intégrales (*) on fait les réductions convenables, qu'on réduise aussi les autres parties, qu'on intègre de nouveau les parties qu'on aura différenciées, on trouvera l'équation suivante.

$$vSVdx = Vvx + Sndx.Stdx\left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \&c.\right)$$

$$+ Stdx\left(nP' - \frac{ndQ' - d.nQ'}{dx} + \frac{nddR' + d.ndR'' + dd.nR''}{dx^2} - \&c.\right)$$

$$+ t\left(nQ' - \frac{ndR' - d.nR'}{dx} + \frac{nddR'' + d.ndR'' + dd.nR''}{dx^2} - \&c.\right)$$

$$+ \frac{dt}{dx}\left(nR' - \frac{ndR'' - d.nR''}{dx} + \&c.\right)$$

$$+ \frac{ddt}{dx^2}\left(nR'' - \&c.\right)$$

$$+ \&c.$$

(*) Puisque $g = Sndx$; donc $dg = ndx$. La différentielle des deux parties intégrales sera $ndxStdx\left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \&c.\right) + gtdx\left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \&c.\right) - tdx\left(gN' - nP' - \frac{gdP'}{dx} + \&c\right)$. Mais alors $gtdxN'$ est détruit par $-tdx.gN'$, $-gtdx \times \frac{dP'}{dx} = -gtdP'$ est détruit par $-tdx.\frac{-gdP'}{dx} = +tg.dP'$, &c. Dans les parties absolues gtP' détruit —

Lorsque

Lorsque S V dx doit être un *maximum* ou un *minimum*, il faut égaler les parties intégrales à o, ce qui se fait en faisant attention à la *limite*, jusques où s'étend l'intégrale S V dx, pour laquelle *limite*, si on suppose $g = A$, on en déduira de la premiere formule $o = (A-g)N' - \frac{d.(A-g)P'}{dx} + \frac{dd.(A-g)Q'}{dx^2}$ &c. (*); mais de quelle façon qu'on traite cette équation, il

---

$t g P'$. La quantité $\frac{dgQ}{dx}$ qui, prise avec le signe —, forme le second terme de la seconde partie absolue, devient $nQ' + \frac{gdQ'}{dx}$; ainsi ce second terme, étant pris avec le signe qu'il a & multiplié par $-t$, donnera $+ tnQ' + \frac{gtdQ'}{dx}$; or $\frac{gtdQ'}{dx}$ est détruit par la partie correspondante $\frac{gtdQ'}{dx}$ de la premiere partie absolue, &c. Il est aisé de voir comment on peut continuer.

(*) Il faut considérer A comme constant ; car il l'est en effet, puisque si ndx représente l'élément de l'aire d'une courbe, S ndx sera constant aussi-tôt que l'abscisse x & l'ordonnée n seront déterminées. A la fin de l'intégration on pourra faire passer A sous le signe d'intégration, & l'on aura $S\,t\,dx\left(AN' - A\frac{dP'}{dx} + \&c.\right) - S\,t\,dx\left(gN' - \frac{dgP'}{dx}\ \&c.\right) = S\,t\,dx\left((A-g)N' - \frac{d.(A-g)P'}{dx} + \&c.\right)$; car la différentielle de A est $= o$, & $d.AP' = AdP'$, $ddAQ' = AddQ'$, &c.; donc en égalant cette quantité à o, différenciant & divisant par tdx, on aura l'équation dont il s'agit.

faudra faire disparoître g par la différenciation, & par-là on chassera A, & l'équation résultante ne dépendra plus de la limite de l'intégration.

En général en supposant $=$ A l'intégrale $\mathrm{S}\,n\,dx$ correspondante à toute l'intégrale $\mathrm{S}\,\mathrm{V}\,dx$, la variation dans ce cas sera $v\mathrm{S}\,\mathrm{V}\,dx = \mathrm{V}\,vx +$

$$\mathrm{S}t\,dx\left((\mathrm{A}-g)\mathrm{N}' - \frac{d.(\mathrm{A}-g)\mathrm{P}'}{dx} + \frac{dd.(\mathrm{A}-g)\mathrm{Q}'}{dx}\ \&c.\right)$$

$$+ t\left(n\mathrm{Q}' - \frac{nd\mathrm{R}' - d.n\mathrm{R}'}{dx}\ \&c.\right)$$

$$+ \frac{dt}{dx}\left(n\mathrm{R}' - \frac{nd\mathrm{R}'' - d.n\mathrm{R}''}{dx} + \&c.\right)$$

$$+ \frac{ddt}{dx^2}\left(n\mathrm{R}'' - \&c.\right)$$

$$+ \&c.$$

Dans cette formule $\mathrm{A} - g$ exprime la valeur de $\mathrm{S}\,n\,dx$, depuis le terme extrême de l'intégration jusqu'à un terme quelconque pris en reculant.

25. PROBLEME. *z étant $= \mathrm{S}\,m\,dx$ & $dm = \mathrm{M}'dx + \mathrm{N}'dy + \mathrm{P}'dp +$ &c., tandis que V est une fonction qui contient non-seulement les variables x, y, $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, &c. mais encore la quantité z, trouver la variation de la formule intégrale compliquée* $\mathrm{S}\,\mathrm{V}\,dx$. Soit $d\mathrm{V} = \mathrm{H}dz + \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \mathrm{P}dp + \mathrm{Q}dq$ &c., l'on aura la variation de V exprimée par l'équation $v\mathrm{V} = \mathrm{H}vz + \mathrm{M}vx + \mathrm{N}vy + \mathrm{P}vp$ &c., mais à cause de $dz = m\,dx$, $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$ &c., l'on a $d\mathrm{V} = dx\,(\mathrm{H}m + \mathrm{M} + \mathrm{N}p + \mathrm{P}q + \mathrm{Q}r + \&c.)$; l'on a aussi $vm = \mathrm{M}'vx + \mathrm{N}'vy + \mathrm{P}'vp$ &c. Or il est visible (par le n°. 10) que $vz = \mathrm{S}(m.vdx + dx\,vm) = m\,vx + \mathrm{S}(dx\,vm - dm.vx)$; donc ayant fait $vy - pvx = t$, on aura (selon le n°. 24) $vz = mvx + \mathrm{S}dx\left(\mathrm{N}'t + \frac{\mathrm{P}'dt}{dx} + \frac{\mathrm{Q}'ddt}{dx^2}\right.$

$+ \frac{R'd^3t}{dx^3} + \&c.\Big)$, équation dans laquelle dx eſt conſtant, & que je déſignerai par (A). Ces choſes ſuppoſées, à cauſe de $vSVdx = Vvx + S(dxvV - dV.vx)$, ſi nous ſuppoſons $dV = Hdz + dV'$, pour avoir $vV = Hvz + vV'$, & $dV' = Mdx + Ndy + Pdp + \&c.$, nous aurons (B) $vSVdx = Vvx + S(Hdxvz - Hdzvx) + S(dxvV' - dV'vx)$. Mais

$$dxvV' - dV'vx = dx\left(Nt + \frac{Pdt}{dx} + \frac{Qddt}{dx^2}\ \&c.\right).$$

Et à cauſe de $dzvx = mdx.vx$, ſi l'on ſubſtitue cette valeur dans l'équation A multipliée par dx & qu'on tranſpoſe, on aura $dxvz - mdxvx$, ou $dxvz$

$$-dzvx = dxSdx\left(N't + \frac{P'dt}{dx} + \frac{Q'ddt}{dx^2}\ \&c.\right);$$

donc en ſubſtituant dans l'équation (B), on aura la variation cherchée: $vSVdx = Vvx$

$$+ SHdxSdx\left(N't + \frac{P'dt}{dx} + \frac{Q'ddt}{dx^2}\ \&c.\right)$$

$$+ Sdx\left(Nt + \frac{Pdt}{dx} + \frac{Qddt}{dx^2} + \frac{Rd^3t}{dx^3}\ \&c.\right)$$

Suppoſons maintenant l'intégrale $SHdx = g$, de maniere que pour le commencement d'où l'on compte l'intégrale $SVdx$, g s'évanouiſſe, & que pour la fin où ſe termine $SVdx$, on ait $g = A$, l'on aura $SHdxSdx\left(N't + \frac{P'dt}{dx}\ \&c.\right) = ASdx\Big(N't + \frac{P'dt}{dx} + \&c.\Big) - Sgdx\left(N't + \frac{P'dt}{dx}\ \&c.\right)$ (*),

(*) Les commençants pourront, peut-être, être ſurpris de ce que l'on exprime par A l'intégrale g, lorſqu'elle peut ſe trouver hors du ſigne, & non lorſqu'elle ſe trouve ſous le ſigne d'intégration: mais il eſt aiſé de leur faire

& ainsi l'on aura $v \text{S} V dx = Vvx$

$$+ A\text{S}dx\left(N't + \frac{P'dt}{dx} \&c.\right)$$

$$- \text{S}gdx\left(N't + \frac{P'dt}{dx} \&c.\right)$$

$$+ \text{S}dx\left(Nt + \frac{Pdt}{dx} \&c.\right)$$

Mais en faisant $N + (A - g) N' = n'$; $P + (A - g) P' = p'$; $Q + (A - g) Q' = q'$; $R + (A - g) R' = r'$; &c. nous aurons $v \text{S} V dx = Vvx + \text{S}dx\left(n't + \frac{p'dt}{dx} + \frac{q'ddt}{dx^2} \&c.\right)$. Et en éliminant les différentielles de t qui se trouvent après le signe d'intégration, nous trouverons en suivant la méthode ci-dessus (12), & ajoutant une constante, nous trouverons, dis-je, l'équation suivante: $v \text{S} V dx$

---

sentir par un exemple fort simple, que cela doit être ainsi. Soit la formule $\text{S}Hdx\text{S}Pdx = g\text{S}Pdx - \text{S}gPdx$, en supposant $\text{S}Hdx = g$. Soit de plus $H = xx$, $P = 3x^2$, & supposons que l'intégrale g doive s'évanouir lorsque l'intégrale $\text{S}Hdx\text{S}Pdx$ est $= 0$, ou lorsque $x = 0$, & que g doit être $= A$, au terme auquel finit l'intégrale $\text{S}Hdx\text{S}Pdx$, c'est à dire, par exemple, lorsque $x = a$; alors nous aurons $A\text{S}Pdx - \text{S}gPdx = x^5 - \frac{1}{5}x^5 = \frac{4}{5}x^5$. Il est donc évident que cette intégrale est $= \frac{4}{5}a^5$, lorsque $x = a$. Mais si dans $- \text{S}gPdx$, on faisoit $g = A = aa$, on auroit $A\text{S}Pdx - \text{S}gPdx = a^2x^3 - a^2x^3$; & en supposant $x = a$, on auroit $a^5 - a^5 = 0$, ce qui ne doit pas être. Et la raison en est que A étant supposé constant ou variable, la valeur de $\text{S}Pdx$ dans $A\text{S}Pdx$ ne change pas; mais dans $\text{S}gPdx$ la valeur n'est pas la même, lorsqu'on suppose g constant & $= aa$, ou lorsqu'on suppose g variable & $= xx$.

$$= S t\, dx \left(n' - \frac{dp'}{dx} + \frac{ddq'}{dx^2} - \frac{d^3 r'}{dx^3} \text{ \&c.} \right)$$

$$+ V v x + t \left(p' - \frac{dq'}{dx} + \frac{ddr'}{dx^2} \text{ \&c.} \right)$$

$$+ \text{conſtante} + \frac{dt}{dx} \left(q' - \frac{dr'}{dx} + \frac{dds'}{dx^2} \text{ \&c.} \right)$$

$$+ \frac{ddt}{dx^2} \left(r' - \frac{ds'}{dx} + \text{\&c.} \right)$$

$$+ \frac{d^3 t}{dx^3} \left(s' - \text{\&c.} \right)$$

$$+ \text{\&c.}$$

La conſtante introduite par l'intégration doit être telle que pour le terme du commencement duquel on compte l'intégration $SVdx$, les parties abſolues ou non affectées du ſigne d'intégration s'évanouiſſent, en prenant l'intégrale de la premiere partie, de maniere qu'elle s'évanouiſſe auſſi dans le même cas ; alors pour la fin de l'intégration l'on doit avoir $SHdx = A$.

26. COROLLAIRE. Dans la partie affectée du ſigne S d'intégration la variabilité doit avoir lieu pour toute l'étendue de l'intégration ; mais dans les parties abſolues il ſuffit d'avoir égard au commencement & à la fin de l'intégration. Or les conditions de la queſtion doivent donner les valeurs de dx, t, dt, $\frac{dt}{dx}$, $\frac{ddt}{dx^2}$, &c. pour le commencement & la fin.

Lorſque par les conditions du commencement on aura déterminé la valeur de la conſtante qu'on doit ajouter, conſtante qui doit faire évanouir les parties abſolues pour le même commencement, il ne reſtera qu'à procéder à l'intégration finale. Pour le commencement ou $g = 0$, on aura $n' = N + AN'$; $p' = P + AP'$; $q' = Q + AQ'$; &c. Mais pour la fin de l'intégration l'on doit avoir évidemment $g = A$; $n' = N$; $p' = P$; $q' = Q$; &c.

27. REMARQUE. Afin de mieux comprendre l'esprit de la méthode des variations, les commençans doivent observer que le rapport des variations de x & de y est donné pour le commencement & pour la fin de l'intégration, qu'il est donné, dis-je, par la nature du problême ; mais pour le milieu ces variations ne sont assujetties à aucune loi.

On considere donc premierement une certaine relation entre les deux variables x & y, que cette relation soit connue, ou qu'on doive la déterminer dans la suite ; & la formule S. V dx qui contient cette relation, étant renfermée entre certaines limites, c'est-à-dire, ayant lieu depuis un commencement donné jusques à une fin ou limite donnée, doit avoir une certaine valeur ; mais à chaque $x + vx$ doit répandre $y + vy$; cependant le rapport de vx à vy, n'est assujetti à aucune loi, excepté pour les variations extrêmes.

Ayant pris la partie intégrale, de maniere qu'elle devienne $= 0$ pour le commencement de l'intégration, on doit ensuite ajouter une constante qui rende nulles les parties absolues pour le même commencement. Ce qui étant fait, on pourra procéder à l'intégration finale, afin d'obtenir par ce moyen la véritable variation depuis le commencement jusqu'à la fin. Or on peut employer la doctrine des variations pour résoudre deux especes de questions, l'une dans laquelle connoissant la relation entre x & y, on demande la variation de la formule S V dx, prise depuis un certain terme, jusques à un terme donné ; l'autre dans laquelle on cherche la relation qu'il doit y avoir entre x & y, pour que la variation de la formule ait une certaine propriété, qu'elle soit, par exemple, un *maximum* ou un *minimum* ; & alors on suppose cette variation $= 0$. Mais il y a deux cas, l'un lorsqu'on suppose que les variations de x & de y ne sont assujetties à aucune loi, l'autre si l'on demande qu'elles suivent une certaine loi.

28. PROBLEME. *Si la fonction* V *renferme non-seulement les deux variables x & y avec leurs différentielles*

$p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$ *&c., mais encore plusieurs formules intégrales* $z = Smdx$, $z' = Sm'dx$, *&c., de maniere que l'on ait*

$$dm = M'dx + N'dy + P'dp \text{ \&c.}$$
$$dm' = M''dx + N''dy + P''dp' \text{ \&c.}$$
$$dV = (Hdz + H'dz' + \text{\&c.}) + Mdx + Ndy + Pdp \text{ \&c.},$$

trouver la variation de la formule intégrale $SVdx$. Si on entreprend de résoudre ce problême en suivant la méthode qu'on a employée dans la solution du précédent, on verra facilement que le calcul n'est pas troublé par les deux formules intégrales z & z'; il ne le seroit pas même quand il y en auroit plusieurs autres. C'est pourquoi toute la solution (en ne supposant que deux formules z & z') se réduit, après avoir fixé les limites de l'intégration, à prendre les intégrales $SHdx = g$ & $SH'dx = g'$, de maniere que pour le commencement de l'intégration on ait $g = 0$, $g' = 0'$; tandis que pour la fin de l'intégration $g = A$, $g' = A'$. Ces quantités étant trouvées, on fera

$$N + (A - g)N' + (A' - g')N'' = n';$$
$$P + (A - g)P' + (A' - g')P'' = p';$$
$$Q + (A - g)Q' + (A' - g')Q'' = q';$$
&c.

Et en attribuant à x & à y des variations quelconques on aura selon la solution du problême précédent,

$$vSVdx = Stdx\left(n' - \frac{dp'}{dx} + \frac{ddq'}{dx^2} - \text{\&c.}\right) + Vvx + t\left(p' - \frac{dq'}{dx} + \text{\&c.}\right) + \text{constante} + \frac{dt}{dx}\left(q' - \frac{dr'}{dx} + \text{\&c.}\right).$$

$$+\frac{ddt}{dx^2}\left(r' - \frac{ds'}{dx^2} + \&c.\right)$$

$$+\frac{d^3t}{dx^3}\left(s' - \&c.\right)$$

&c.

formule dans laquelle on suppose dx constant.

COROLLAIRE. Si donc la fonction V renfermoit un plus grand nombre de formules intégrales de la forme $Sm''dx$, $Sm'''dx$, &c., l'expression de la variation cherchée ne changeroit pas; seulement la valeur des quantités n', p', q', &c. feroit différente.

29. REMARQUE. Quoique les formules intégrales $g = SHdx$, $g' = SH\,dx$ renferment deux variables x & y, & qu'ainsi elles paroissent ne pouvoir être susceptibles d'une valeur déterminée; cependant on peut faire attention que dans toutes ces questions on suppose une certaine relation entre x & y, que cette relation soit donnée absolument, ou qu'elle doive être déterminée par le calcul; c'est pourquoi, en faisant usage de cette relation, on pourra regarder y comme une fonction de x, & les formules g & g' obtiendront des valeurs déterminées.

30. PROBLEME. *Si la fonction m renferme non-seulement les variables x & y & leurs valeurs différentielles p, q, &c., mais encore la formule intégrale $u = Sm'dx$, de maniere que l'on ait*

$$dm = hdu + M'dx + N'dy + P'dp \text{ \&c.}$$
$$dm' = M''dx + N''dy + P''dp \text{ \&c.}$$

supposant de plus que V est une fonction de x, y, p, q, &c. & de la formule intégrale $z = Smdx$, de sorte que l'on ait $dV = Hdz + Mdx + Pdp$ &c. déterminer la variation de la formule intégrale $SVdx$. Par la solution de l'avant-dernier problême, il sera aisé de trouver la variation de $Smdx = z$; car ayant déterminé les limites de l'intégration, & ayant fait $Shdx = g''$, de maniere que pour le commencement on ait $g'' = 0$, & $g'' = A'$ pour la fin de l'intégration: si alors on fait $N' + (A' - g')N'' = N'''$; $P' + (A' - g)P'' = P'''$;

$R' + (A' - g') Q'' = Q'''$; &c. on aura par la solution du problême cité : $vz = mvx + Sdx \left(t N''' + \frac{P''' dt}{dx} + \frac{Q'''' ddt}{dx^2} \&c. \right)$, dx étant supposé constant & $t = vy - pvx$. Maintenant en supposant $dV = Hdz + dV'$, & $vV = Hvz + vV'$, il viendra $dV' = Mdx + Ndy + Pdp$ &c., & (comme il suit de l'endroit cité) l'on aura l'équation (D) suivante : $vSVdx = Vvx + S(Hdxvz - Hdzvx)$

$$+ Sdx \left(Nt + \frac{Pdt}{dx} + \frac{Qddt}{dx^2} \&c. \right),$$

en substituant $Sdx \left(Nt + \frac{Pdt}{dx} \&c. \right)$, au lieu de $S.(dxvV' - dV'vx)$ dans l'équation (B) du problême dont on vient de parler. Mais $dz = mdx$, & $vz = mvx + Sdx\,(N'''t + \&c.)$; donc $dxvz - dzvx = dxvz - mdxvx = dxSdx \left(N'''t + \frac{P'''dt}{dx} + \frac{Q'''ddt}{dx^2} \&c. \right)$. Si l'on fait maintenant $SHdx = g$, de maniere que pour le commencement de l'intégration l'on ait $g = 0$, & que pour la fin de l'intégration $g = A$, on trouvera facilement l'équation $SH(dxvz - dzvx) = S(A - g)dx \left(N'''t + \frac{P'''dt}{dx} + \&c. \right)$. Remettant maintenant les valeurs de N''', P''', Q''', &c., & supposant pour abréger que

$N + (A - g) N' + (A - g)(A' - g') N'' = n'$;
$P + (A - g) P' + (A - g)(A' - g') P'' = p'$;
&c.

Il est visible que la variation cherchée sera $vSVdx = Vvx + Sdx \left(n't + \frac{p'dt}{dx} + \frac{q'ddt}{dx^2} + \&c. \right)$ (*),

(*) Car en faisant les substitutions convenables,

formule d'où l'on peut tirer la même expression que nous avons trouvée vers la fin de la solution de l'avant-dernier problême.

REMARQUE. Si la fonction m' renfermoit une formule intégrale, dans ce cas les lettres p', q', &c. recevroient une valeur différente, dépendante de la derniere formule intégrale que l'on auroit ; & il est aisé de voir comment on pourroit trouver la variation dans ce cas. Enfin de quelque maniere que la formule $\text{S V} dx$ soit compliquée, ce que nous avons dit jusqu'ici suffit pour faire trouver sa variation.

De la variation des formules intégrales à trois variables x, y, z, dont la relation est déterminée par deux équations, de maniere que l'on peut regarder deux variables quelconques prises séparément comme une.

31. PROBLEME. V *étant une formule qui renferme les trois variables x, y, z, avec leurs différentielles quelconques, trouver sa variation.* Si l'on écrit dans V au lieu des variables x, y, z, les quantités $x + vx$, $y + vy$, $z + vz$; qu'au lieu des différentielles de ces variables on écrive $dx + vdx$, $dy + vdy$, $ddy + vddy$, &c. & que du résultat V′ on retranche V, on aura la variation cherchée v V. D'où l'on peut conclure qu'on trouvera cette variation par la méthode de la différenciation, en substituant le signe de la variation au lieu de celui de la différenciation. Il sera cependant bon d'observer qu'en prenant les variations des différentielles, il est indifférent de

l'équation (D) donnera $v \text{S V} dx = \text{V} v x$

$$+ \text{S}(\text{A} - g)\, dx \left(\text{N}'t + (\text{A}' - g')\text{N}''t + \&c.\right)$$

$$+ \text{S} dx \left(\text{N}t + \frac{\text{P}dt}{dx} + \&c.\right)$$

d'où il est aisé de tirer l'équation que nous avons donnée.

placer le signe de la variation avant ou après le signe de la différenciation, comme nous l'avons prouvé ci-devant.

COROLLAIRE. Puisque nous pouvons regarder y aussi-bien que z comme une fonction de x, si on suppose $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dz}{dx} = p'$, on aura $vp = \frac{dvy - pdvx}{dx}$, & $vp' = \frac{dvz - p'dvx}{dx}$. Si l'on fait maintenant $vy - pvx = t$, $vz - p'vx = t'$, on aura $dvy - pdvx - qdx.vx = dt$, & $dvz - p'dvx - q'dx.vx = dt'$, en faisant $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dp'}{dx} = q'$; de sorte que $vp - qvx = \frac{dt}{dx}$; $vp' - q'vx = \frac{dt'}{dx}$, en supposant de plus $\frac{dp}{dx} = r$; $\frac{dq'}{dx} = r'$; &c. & faisant dx constant. On aura aussi $vq - rvx = \frac{ddt}{dx^2}$; $vq' - r'vx = \frac{ddt'}{dx^2}$; & ainsi de suite.

REMARQUE I. Si l'on n'avoit qu'une seule équation entre les trois variables x, y, z; les lettres p', p n'auroient aucune valeur déterminée, puisque cette équation subsistant, les rapports de $dy : dx$, & de $dz : dx$, seroient indéterminés. Cependant on pourroit dans ce cas, en employant la régle du problême, trouver la variation de V, & cela en n'introduisant ni les lettres p & p', ni leurs différentielles.

REMARQUE II. Dans les courbes à double courbure l'on a deux équations entre trois co-ordonnées perpendiculaires; ainsi ce que nous dirons ici pourra servir à trouver ces sortes de courbes qui sont susceptibles d'un *maximum* ou d'un *minimum*.

32. PROBLEME. V *étant supposée une fonction des variables* x, y, z, *& de leurs différentielles d'un ordre quelconque, trouver la variation de la formule intégrale*

S. V dx. Ayant fait $\frac{dy}{dx} = p$, $dp = q dx$, &c. $dz = p' dx$, $dp' = q' dx$, &c. On pourra faire en sorte que V devienne une fonction de x, y, z, p, q', &c. Ainsi sa différentielle aura cette forme : $dV =$

$$\begin{array}{l} M dx + N dy + P dp + Q dq + \&c. \\ \quad + N' dz + P' d' p' + Q' dq' + \&c. \end{array}$$

L'on aura aussi

$$\begin{array}{l} vV = M vx + N vy + P vp \ \&c. \\ \quad + N' vz + P' vp' \ \&c. \end{array}$$

Mais, par ce que nous avons dit ci-devant, il est visible que $vSVdx = S(V dvx + dxvV) = V vx + S(dxvV - dV vx)$; mais en substituant les valeurs de vV & de dV, l'on a $\frac{dxvV - dVvx}{dx} =$

$$\begin{array}{l} M vx + N vy + P vp + Q vq \ \&c. \\ \quad + N' vz + P' vp + Q' vq' \ \&c. \\ - M vx - N pvx - P qvx \ \&c. \\ \quad - N' p' vx - P' q' vx \ \&c. \end{array}$$

Mais $N vy - N pvx = N t$, $N' vz - N' p' vx = N' t'$; &c. de sorte que la variation cherchée pourra (on suppose dx constant) s'exprimer ainsi : $vSVdx =$

$$V vx + S dx \left\{ \begin{array}{l} Nt + \frac{P dt}{dx} + \frac{Q ddt}{dx^2} \ \&c. \\ + N't' + \frac{P' dt'}{dx} + \frac{Q' ddt}{dx^2} \ \&c. \end{array} \right\},$$

équation à laquelle on peut, par ce qui précède, donner la forme suivante : $vSVdx$

$$= S t dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} \ \&c. \right)$$
$$+ S t' dx \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} \ \&c. \right)$$

$$+ V\nu x + t\left(P - \frac{dQ}{dx} \text{ \&c.}\right)$$

$$+ \text{conft.} + t'\left(P' - \frac{dQ'}{dx} \text{ \&c.}\right)$$

$$+ \frac{dt}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} \text{ \&c.}\right)$$

$$+ \frac{dt'}{dx}\left(Q' - \text{\&c.}\right)$$

$$+ \text{\&c.}$$

On doit obferver à l'égard de la conftante les mêmes chofes que ci-devant.

COROLLAIRE. Si l'on ne regardoit une quelconque des trois variables x, y, z, comme une fonction des deux autres, de maniere que z & y puffent être déterminées en x par une relation connue, ou qui doit être déterminée par la nature de la variation, la formule $S V dx$ ne fauroit avoir de fignification déterminée. Mais fi la formule $V dx$ eft intégrable par elle-même fans fuppofer aucune relation entre les trois variables, dans ce cas la variation de l'intégrale $S V dx$ ne fauroit envelopper aucune formule intégrale ; de forte qu'alors le fecond membre de l'équation précédente ne doit renfermer aucune formule intégrale ; donc dans ce cas on aura les équations fuivantes :

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} \text{ \&c.} = 0.$$

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} \text{ \&c.} = 0.$$

Réciproquement fi ces deux équations ont lieu, ce fera un figne certain que la formule différentielle $V dx$ eft intégrable par elle-même, fans fuppofer aucune relation entre les variables.

EXEMPLE. Suppofons que l'on ait $S V dx = \frac{z\,dy}{x\,dz} =$

$\frac{pz}{p'x}$ (*) ; donc $V = \frac{-pz}{xxp'} + \frac{p}{x} + \frac{zq}{xp'} - \frac{zpq'}{xp'p'}$. En différenciant cette valeur de V, on trouvera facilement $N = 0$; $P = \frac{-z}{xxp'} + \frac{1}{x} - \frac{zq'}{xp'p'}$; $Q = \frac{z}{xp'}$. Mais $N' = \frac{-p}{xxp'} + \frac{q}{xp'} - \frac{pq'}{xp'p}$; $P' = \frac{pz}{xxp'p'} - \frac{zq}{xp'p'} + \frac{2zpq'}{xp'p'p'}$, & $Q' = \frac{-zp}{xp'p'}$. Maintenant à cause de $N = 0$, la premiere équation donnera $-\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0$ & $P - \frac{dQ}{dx} = C$, constante.

A l'égard de la seconde équation $N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} = 0$, on en conclura $SN'dx = P' - \frac{dQ'}{dx}$; ainsi en substituant la valeur de N', il sera nécessaire que la formule $N'dx = \frac{-pdx}{xxp'} + \frac{qdx}{xp'} - \frac{pdx}{xp'p'}$ soit intégrable. Mais à cause de $dp = qdx$; on aura $SN'dx = \frac{p}{xp'}$; donc $\frac{dQ'}{dx} = P' - SN'dx = \frac{pz}{xxp'p'} - \frac{zq}{xp'p'} + \frac{2zpq'}{xp'p'p'} - \frac{p}{xp'}$; ce qu'on trouvera être vrai en différenciant $Q = \frac{-zp}{xp'p'}$.

(*) Car $dy = pdx$ & $dz = p'dx$; ainsi $\frac{dy}{dz} = \frac{pdx}{p'dx} = \frac{p}{p'}$, & $\frac{zdy}{xdz} = \frac{pz}{xp'}$.

REMARQUE. Si la formule S V dx doit avoir une valeur qui soit un *maximum* ou un *minimum*, on égalera séparément à o les deux parties intégrales, ce qui donnera ces deux équations:

$$N - \frac{dP}{dx} + \&c. = 0.$$

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \&c. = 0.$$

Ces équations expriment une double relation entre les trois variables x, y, z, telle qu'on peut ensuite regarder y aussi-bien que z, comme une fonction de x. Lorsque ces équations sont différentielles, l'intégration introduit dans le calcul, & cela pour chaque équation, autant de constantes arbitraires qu'il est désigné par le plus haut degré différentiel de chaque équation. On doit ensuite déterminer ces constantes, de maniere qu'on satisfasse aux conditions prescrites de l'intégration de la formule V dx, pour le commencement & pour la fin de l'intégration; & faisant de plus en sorte que les parties absolues de la variation soient = o. 1°. On doit déterminer la constante dont on a parlé ci-dessus, de maniere qu'elle satisfasse aux conditions pour le commencement de l'intégration, où ces quantités t, $\frac{dt}{dx}$, $\frac{ddt}{dx^2}$, t', $\frac{dt'}{dx}$, &c. ont ordinairement des valeurs déterminées par la nature de la question. Or comme cela arrive également à la fin de l'intégration, on détermine par toutes ces valeurs les constantes introduites par l'intégration.

REMARQUE II. Les membres qui expriment la variation de la formule S V dx, se partagent comme naturellement en deux classes, dont l'une regarde la variation de y, c'est-à-dire, son rapport relativement à x, comme si z étoit constant, & l'autre regarde le rapport de z à x comme si y étoit constant. De-là on doit conclure que s'il y avoit une quatrieme variable u, qu'on peut aussi regarder comme une fonction de x, il faudroit ajouter une autre classe qui renfermeroit des membres semblables dépendans de la seule variabilité

de u, & ainsi de suite s'il y avoit encore d'autres variables. De sorte que quelque nombre de variables que contienne V, pourvu qu'on puisse regarder ces variables comme toutes déterminées par une seule, on trouvera toujours la variation de $SVdx$ par la même méthode.

33. PROBLEME. *m étant supposée une fonction des variables x, y, z, & de leurs différentielles d'un degré quelconque, trouver la variation de la formule $SVdx$, en supposant que V renferme non-seulement les variables x, y, z, & leurs différentielles d'un ordre quelconque, mais encore la formule intégrale $Smdx = u$.* On aura dV

$$= Hdu + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \&c.$$
$$+ N'dz + Pdp' + Q'dq' + \&c.$$

Mais à cause de $du = mdx$, on a $dm = M^b dx$

$$+ N^b dy + P^b dp + \&c.$$
$$+ N^f dz + P^f dp' + \&c. \ (*)$$

Si au lieu du signe d on substitue par-tout le signe v, on aura les variations de V & de m; or $vSVdx = Vvx + S(dxvV - dVvx)$. Mais à cause que la valeur de la différentielle de dV ne differe de la precédente qu'en ce qu'elle contient la partie $Hdu = Hmax$ qu'elle ne contenoit pas dans le dernier problême, & que la variation vV contient de plus la partie Hvu qu'elle ne contenoit pas dans le même problême, la variation cherchée sera exprimée par une formule semblable à la précédente, en y ajoutant le membre $SH(dxvSmdx - mdx.vx) = SHdx(vSmdx\ mvx)$. Mais par ce que $Smdx$ est une formule semblable à celle du problême précédent, on aura, en supposant dx constant, l'équation suivante: $vSmdx -$

(*) Les lettres b & f ne désignent pas ici des exposans; on ne s'en est servi que pour distinguer les coefficiens de la derniere équation de ceux de la premiere.

$$m v x = S d x \begin{cases} N^b t + \dfrac{P^b d t}{d x} + \dfrac{Q^b d d t}{d x^2} \; \&c. \\ N^f t' + \dfrac{P^f d t'}{d x} + \dfrac{Q^f d d t'}{d x^2} \; \&c. \end{cases}$$

Supposons l'intégrale $S H d x = g$, de maniere que pour le commencement de l'intégration on doive avoir $g = 0$, & que pour la fin de l'intégration g soit $= A$. Cela posé, l'on aura pour toute l'étendue de l'intégration $SHdx\,(v S m d x - m v x)$

$$= S(A - g)\, d x \begin{cases} N^b t + \dfrac{P^b d t}{d x} \; \&c. \\ N_f t' + \dfrac{P^f d t'}{d x} \; \&c. \end{cases}$$

Supposons maintenant, pour abréger, que l'on fasse

$$\begin{array}{ll} N + (A - g) N^b = N^n; & N' + (A - g) N^f = N^s \\ P + (A - g) P^b = P^n; & P' + (A - g) P^f = P^s \\ Q + (A - g) Q^b = Q^n; & Q' + (A - g) Q^f = Q^s \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

Alors on aura $v S V d x = V v x +$

$$S d x \begin{cases} N^n t + \dfrac{P^n d t}{d x} + \dfrac{Q^n d d t}{d x^2} + \&c. \\ N^s t' + \dfrac{P^s d t'}{d x} + \dfrac{Q^s d d t'}{d x^2} + \&c. \end{cases}$$

La partie intégrale, étant développée, il viendra

(*) On doit se souvenir que n & s ne désignent pas des exposans, de sorte que N^s sert seulement à distinguer N^s de N, N', N^b, N^f.

$$vSV\,dx - S\iota\,dx\left(N'' - \frac{dP''}{dx} + \frac{ddQ''}{dx^2}\ \&c.\right)$$
$$+ S\iota'dx\left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2}\ \&c.\right)$$
$$+ Vvx + \iota\left(P'' - \frac{dQ''}{dx}\ \&c.\right)$$
$$+ \text{conſt.} + \iota'\left(P' - \frac{dQ'}{dx}\ \&c.\right)$$
$$+ \frac{d\iota}{dx}\left(Q'' - \&c.\right)$$
$$+ \frac{d\iota'}{dx}\left(Q' - \&c.\right)$$
$$+ \&c.$$

REMARQUE. Il eſt aiſé de voir par la méthode que nous venons de ſuivre dans la ſolution du problême, comment il faudroit s'y prendre ſi V renfermoit plusieurs formules intégrales, ou ſi m contenoit auſſi des formules intégrales, quand même ces formules intégrales contiendroient plus de trois variables.

De la variation des formules à trois variables, dont la relation eſt donnée par une ſeule équation.

34. PROBLEME. *Trouver les variations des formules* $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $p' = \left(\frac{dz}{dy}\right)$. L'on aura $p + vp = \left(\frac{d(z+vz)}{d(x+vx)}\right)$ (*) $= \left(\frac{dz}{dx} + \frac{dvz}{dx} - \frac{dz\,dvx}{dx^2}\right)$.

(*) Dans cette expreſſion y eſt cenſé conſtant, & l'on conſidere z comme une fonction des variables x & y; de

Dont à cause de $p = \frac{dz}{dx}$, on aura $vp = \left(\frac{dvz}{dz}\right)$ $- \left(\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dvx}{dx}\right) = \left(\frac{dvz}{dx}\right) - p\left(\frac{dvx}{dx}\right)$. On aura aussi $vp' = \left(\frac{dvz}{dy}\right) - p'\left(\frac{dvy}{dy}\right)$. Dans la valeur de vp, y est regardé comme constant; mais x est regardé comme constant dans la valeur de vp'.

REMARQUE I. On peut regarder également chacune des variables x, y, z comme une fonction des deux autres; mais il suffit de se servir des deux formules différentielles du premier degré, dont on vient de trouver les variations; parce qu'on peut réduire les autres à celles-là. En effet $\left(\frac{dx}{dz}\right) = \frac{1}{p}$; $\left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{1}{p'}$; $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-p}{p'}$; & $\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{-p'}{p}$; or p & p' sont des fonctions de x & y. Maintenant il est aisé de voir qu'on aura $v\left(\frac{dx}{dz}\right) = \frac{-vp}{pp} = -\frac{1}{pp}\left(\frac{dvz}{dx}\right)$ $+\frac{1}{p}\left(\frac{dvx}{dx}\right)$; $v\left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{-vp'}{p'p'} = -\frac{1}{p'p'}\left(\frac{dvz}{dy}\right)$ $+\frac{1}{p'}\left(\frac{dvy}{dy}\right)$; $v\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-vp}{p'} + \frac{pvp'}{p'p'} = -\frac{1}{p'} \times$ $\left(\frac{dvz}{dx}\right) + \frac{p}{p'}\left(\frac{dvx}{dx}\right) + \frac{p}{p'p'}\left(\frac{dvz}{dy}\right) - \frac{p}{p'}\left(\frac{dvy}{dy}\right)$.

REMARQUE II. Les formules différentielles ne sauroient avoir une valeur certaine, si l'on ne compare

même on peut considérer vx, vy, vz comme des fonctions infiniment petites de x & de y; car quand même elles dépendroient de z, celle-ci est une fonction de x & y; on voit donc que vx disparoît devant x & que vz s'évanouit devant z.

ensemble deux différentielles, en regardant la troisieme variable, s'il y en a trois, ou même toutes les autres s'il y en a un plus grand nombre, comme constantes. Ainsi dans le cas présent où l'on suppose trois variables x, y, z & une seule équation, la formule $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ ne peut avoir aucune signification déterminée si on ne regarde y comme constant. En effet en regardant z comme une fonction de x & de y, telle que $dz = pdx + p'dy$, on aura $\frac{dz}{dx} = p + p'. \frac{dy}{dx}$. Or cette équation peut avoir lieu d'une infinité de manieres quel que soit le rapport de dy à dx. On peut remarquer encore que quoique $dz = pdx + p'dy$, il ne s'ensuit pas que $vz = pvx + p'vy$; parce que, quoique z soit une fonction de x & y, nous pouvons lui attribuer une variation qui lui soit propre & qui soit indépendante de celles de x & de y.

35. PROBLEME. *Trouver les variations des formules du second degré* $q = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$; $q' = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$; $q'' = \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$. Dans le problême précédent nous avons fait $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ & $p' = \left(\frac{dz}{dy}\right)$; ainsi on aura $q = \left(\frac{dp}{dx}\right)$; $q' = \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right)$ & $q'' = \left(\frac{dp'}{dy}\right)$. Maintenant en cherchant les variations de q, q', q'', par la même méthode qui nous a fait trouver celles de p & de p' dans le problême précédent, nous aurons $vq = \left(\frac{dvp}{dx}\right) - q\left(\frac{dvx}{dx}\right)$, où l'on trouve $\left(\frac{dvp}{dx}\right)$ en différenciant la valeur de vp, dans la supposition de y constant, & divisant le résultat par dx, ce qui donne

$\left(\frac{dvp}{dx}\right) = \left(\frac{ddvz}{dx^2}\right) - q\left(\frac{dvx}{dx}\right) - p.\left(\frac{ddvx}{dx^2}\right)$ (*), à cause de $q = \left(\frac{dp}{dx}\right)$; d'où l'on conclut $vq = \left(\frac{ddvz}{dx^2}\right) - 2q\left(\frac{dvx}{dx}\right) - p\left(\frac{ddvx}{dx^2}\right)$.

De même à cause de $q' = \left(\frac{dp}{dy}\right)$, on aura aussi $vq' = \left(\frac{dvp}{dy}\right) - q'\left(\frac{dvy}{dy}\right)$. Mais $\left(\frac{dvp}{dy}\right) = \left(\frac{ddvz}{dxdy}\right) - q'\left(\frac{dvx}{dx}\right) - p\left(\frac{ddvx}{dxdy}\right)$; ainsi $vq' = \left(\frac{ddvz}{dxdy}\right) - q'\left(\frac{dvx}{dx}\right) - q'\left(\frac{dvy}{dy}\right) - p\left(\frac{ddvx}{dxdy}\right)$. La troisieme formule $q'' = \left(\frac{dp'}{dy}\right)$ donne $vq'' = \left(\frac{ddvz}{dy^2}\right) - 2q'' \times \left(\frac{dvy}{dy}\right) - p'\left(\frac{ddvy}{dy^2}\right)$.

REMARQUE. L'autre valeur de $q' = \left(\frac{dp'}{dx}\right)$ donne $vq' = \left(\frac{ddvz}{dxdy}\right) - q'\left(\frac{dvx}{dx}\right) - q'\left(\frac{dvy}{dy}\right) - p' \times \left(\frac{ddvy}{dxdy}\right)$, valeur qui paroît entierement différente de la premiere. Mais on peut ramener l'une à l'autre, en rendant la variation de x indépendante de y, & la variation de y indépendante de x; de sorte que $\left(\frac{dvx}{dy}\right)$ sera alors $= 0$ & $\left(\frac{dvy}{dx}\right) = 0$, ce qui

(*) Avant de différencier on doit substituer la valeur de vp prise du problême précédent.

donnera aussi $\left(\frac{d\,v\,x}{d\,x\,d\,y}\right) = 0$, & $\left(\frac{d\,d\,v\,y}{d\,x\,d\,y}\right) = 0$; & alors les deux valeurs seront égales.

Mais pour aller audevant de tous les doutes, nous n'avons qu'à supposer (comme on le supposera toujours dans la suite), que la seule variable z subit des variations, les variations de x & de y étant chacune $= 0$; de sorte que l'on ait $vx = 0$ & $vy = 0$, & alors nous aurons $vp = \left(\frac{dvz}{dx}\right)$ & $vp' = \left(\frac{dvz}{dy}\right)$. On aura aussi $q = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$; $q' = \left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)$; $q'' = \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$ comme ci-devant; mais alors $vq = \left(\frac{ddvz}{dx^2}\right)$; $vq' = \left(\frac{ddvz}{dx\,dy}\right)$; $vq'' = \left(\frac{ddvz}{dy^2}\right)$.

36. PROBLEME. *Trouver les variations des différentielles de tous les genres, en supposant que z est une fonction de x & y, & que $vx = 0$ & $vy = 0$.* On aura $r = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$; $r' = \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)$; $r'' = \left(\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right)$; $r''' = \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$. Et il est évident qu'on aura $vr = \left(\frac{d^3vz}{dx^3}\right)$; $vr' = \left(\frac{d^3vz}{dx^2dy}\right)$; $vr'' = \left(\frac{d^3vz}{dx\,dy^2}\right)$; $vr''' = \left(\frac{d^3vz}{dy^3}\right)$. En général il est aisé de voir que pour une différentielle d'un ordre quelconque $\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right)$, on aura toujours sa variation $= \left(\frac{d^{m+n}vz}{dx^m dy^n}\right)$.

REMARQUE. Puisque les variables x, y sont indépendantes l'une de l'autre, & que l'une peut varier par tous les degrés possibles, l'autre restant

invariable, il est visible que la formule $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ ne sauroit avoir une signification déterminée : ainsi cette formule ne doit jamais se rencontrer dans le calcul ; & il en est de même de celle-ci $\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Mais parce que z est une fonction de x & y, les formules $\left(\frac{dz}{dx}\right)$; $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ ont des significations déterminées.

37. PROBLEME. *En regardant toujours z comme une fonction de x & de y & V comme une fonction des trois variables x, y, z & de leurs différentielles d'un ordre quelconque, trouver la variation de* V. Pour ôter l'apparence des différentielles, supposons $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$; $p' = \left(\frac{dz}{dy}\right)$; $q = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$; $q' = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$; $q'' = \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$; $r = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$; $r' = \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)$; $r'' = \left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)$; $r''' = \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$; &c. Si nous faisons à présent $vz = t$ (*), il viendra $vp = \left(\frac{dt}{dx}\right)$; $vp' = \left(\frac{dt}{dy}\right)$; $vq = \left(\frac{ddt}{dx^2}\right)$; &c. Maintenant à cause que V peut être regardé comme une fonction des quantités x, y, z, p, p', q, q', &c., on aura

$$\begin{aligned} dV = H\,dx + M\,dy + N\,dz + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ \&c.} \\ + P'dp' + Q'dq' + R'dr' \text{ \&c.} \\ + Q''dq'' + R''dr'' \text{ \&c.} \\ + R'''dr''' \text{ \&c.} \\ \text{\&c.} \end{aligned}$$

(*) On doit regarder t comme une fonction de x & de y.

& parce que $vx = 0$ & $vy = 0$, on a

$$\begin{aligned} vV = N v z &+ P v p + Q v q \text{ \&c.} \\ &+ P' v p' + Q' v q' \text{ \&c.} \\ &+ Q'' v q'' \text{ \&c.} \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} vV = N t &+ P \left(\frac{dt}{dx}\right) + Q \left(\frac{ddt}{dx^2}\right) \text{ \&c.} \\ &+ P' \left(\frac{dt}{dy}\right) + Q' \left(\frac{ddt}{dx\,dy^2}\right) \text{ \&c.} \\ &+ Q'' \left(\frac{ddt}{dy^2}\right) \text{ \&c.} \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

REMARQUE. Nous supposons que z doit être regardé comme une fonction de x & de y, & nous attribuons des variations à z sans en donner à x & à y, ce qui paroît contradictoire. En effet, si on substituoit la valeur de z en x & y dans V, la quantité V deviendroit une fonction de x & de y & n'auroit par conséquent aucune variation. Pour faire évanouir cette difficulté, il n'y a qu'à regarder z comme une fonction inconnue de x & y (quand même on la connoîtroit), & ne substituer sa valeur en x & y, qu'après qu'on aura entiérement trouvé la variation qui dépend uniquement de z.

Avant de passer au problême suivant, nous remarquerons que si V exprime une fonction des variables x, y, z & que z soit regardé comme une fonction de x & y, on aura, par une conséquence des principes établis au commencement de ce calcul, $vSSV\,dx\,dy = SSvV\,dx\,dy$, où vV désigne la variation de V; & l'on aura besoin d'une double intégration pour l'une & l'autre formule. Maintenant si nous supposons $SSV\,dx\,dy = S\,dx\,SV\,dy = V'$; en différenciant dans la supposition de x seul variable, on trouvera $SV\,dy = \left(\frac{dV'}{dx}\right)$, &

en différenciant cette derniere équation, en considérant y seul comme variable, il viendra $V = \left(\frac{ddV'}{dxdy}\right)$; de sorte que l'intégrale V' doit être telle que $V = \left(\frac{ddV'}{dxdy}\right)$. Mais parce qu'il faut faire deux intégrations, l'une en regardant x comme constant, l'autre en regardant y comme constant, il est visible que l'on doit ajouter à l'intégrale, au lieu de deux constantes arbitraires, une fonction de x que nous ferons $= X$, & une fonction arbitraire de y que nous représenterons par Y; par conséquent l'on aura l'intégrale complette $SSV\,dxdy = V' + X + Y$.

38. PROBLEME. *V étant une formule quelconque composée des trois variables x, y, z & de leurs différentielles, & z étant regardé comme une fonction de x & de y, trouver la variation de la formule intégrale* $SSV\,dxdy$. Il est visible par le problême précédent que

$$\begin{aligned} dV = H\,dx + M\,dy + N\,dz &+ P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c. \\ &+ P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \&c. \\ &+ Q''dq'' + R''dr'' + \&c. \\ &+ R'''dr''' + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

Mais à cause de $vx = 0$ & de $vy = 0$, on trouve

$$vV = \left\{\begin{aligned} N\,vz &+ P\,vp + \&c. \\ &+ P'\,vp' + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} Nt + P\left(\frac{dt}{dx}\right) &+ Q\left(\frac{ddt}{dx^2}\right) \&c. \\ + P'\left(\frac{dt}{dy}\right) &+ Q'\left(\frac{ddt}{dxdy}\right) \&c. \\ &+ Q''\left(\frac{ddt}{dy^2}\right) \&c. \\ &\&c. \end{aligned}\right.$$

Si on multiplie par $dxdy$, on aura

$$vVdxdy = dxdy. \left\{ \begin{array}{l} Nt + P\left(\frac{dt}{dx}\right) \&c. \\ \quad + P'\left(\frac{dt}{dy}\right) \&c. \\ \&c. \&c. \end{array} \right.$$

Et $SSvVdxdy$, ou $vSSVdxdy =$

$$SSdxdy. \left\{ \begin{array}{l} Nt + P\left(\frac{dt}{dx}\right) \&c. \\ \quad + P'\left(\frac{dt}{dy}\right) \&c. \\ \&c. \end{array} \right.$$

REMARQUE. Si la nature de la fonction z & de $vz = t$, étoit donnée en x & y, on pourroit facilement, en multipliant chaque terme de la valeur de vV par $dxdy$ & intégrant ensuite deux fois (à cause du double signe SS), trouver la variation de la formule proposée. Mais lorsque z est supposé inconnu & qu'on doit le trouver par la nature du problême, alors t n'a aucune signification déterminée : comme, par exemple, si on demande que la formule $SSVdxdy$ soit un *maximum* ou un *minimum*. Dans ce cas il est nécessaire de réduire la variation de cette formule de maniere qu'après le signe SS on trouve t & non les différentielles de t. Or avant d'entreprendre cette résolution, nous observerons que lorsqu'on parvient à des formules intégrales dans lesquelles l'une des deux variables x, y est regardée comme constante, on peut indiquer facilement laquelle des variables est regardée comme constante. La formule $S.Tdx$ indiquera dans la suite l'intégrale de Tdx en supposant y constant, & la formule $S.Tdy$ indiquera l'intégrale de Tdy, en regardant x comme constant. Pour ce qui regarde les formules doubles $SSVdxdy$, on doit les intégrer deux fois, de maniere qu'une des intégrations ait rapport

à la variabilité de x, & l'autre à la variabilité de y.

39. PROBLEME. *Transformer la variation de la formule* $SSV\,dx\,dy$ *trouvée dans le problême précédent, de maniere qu'après le double signe* SS *on trouve partout* t, *mais non pas ses différentielles.* Pour que cette transformation soit plus étendue, soient T & u des fonctions des variables x & y, & considérons cette formule $SST\,dx\,dy\left(\frac{du}{dx}\right) = S\,dy\,ST\,dx\left(\frac{du}{dx}\right)$.

Or dans $ST\,dx\left(\frac{du}{dx}\right)$ on doit regarder x seul comme variable, & alors on aura $dx.\left(\frac{du}{dx}\right) = du$, parce que y est regardé comme constant; c'est pourquoi on doit avoir $ST\,du = Tu - Su\,dT$. Mais parce que dans dT on regarde x seul comme variable, il conviendra de faire $dT = dx\left(\frac{dT}{dx}\right)$, pour avoir $ST\,dx\left(\frac{du}{dx}\right) = Tu - Su\,dx\left(\frac{dT}{dx}\right)$. Cela posé, il est visible que notre formule réduite donnera $SST\,dx\,dy\left(\frac{du}{dx}\right) = STu\,dy - SSu\,dx\,dy\left(\frac{dT}{dx}\right)$. Si l'on change les variables, on aura $SST\,dx\,dy\left(\frac{du}{dy}\right)$ $= STu\,dx - SSu\,dx\,dy\left(\frac{dT}{dy}\right)$. Ce principe établi, la réduction de la variation trouvée dans le problême précédent pourra se faire ainsi:

$$SSP\,dx\,dy\left(\frac{dt}{dx}\right) = SPt\,dy - SSt\,dx\,dy\left(\frac{dP}{dx}\right);$$

$$SSP'\,dx\,dy\left(\frac{dt}{dy}\right) = SP't\,dx - SSt\,dx\,dy\left(\frac{dP'}{dy}\right);$$

& si pour les membres suivans, on fait $\left(\frac{dt}{dx}\right) = u$

& par conſéquent $\left(\frac{ddt}{dx^2}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$, il viendra $SSQdxdy\left(\frac{ddt}{dx^2}\right) = SQdy\left(\frac{dt}{dx}\right) - SSdxdy.$ $\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)$. Mais en réduiſant le dernier membre de la même maniere, on trouve $SSQdxdy\left(\frac{ddt}{dx^2}\right)$ $= SQdy\left(\frac{dt}{dx}\right) - Stdy\left(\frac{dQ}{dx}\right) + SStdxdy\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)$.
Par la même ſubſtitution, nous aurons $\left(\frac{ddt}{dxdy}\right) = \left(\frac{du}{dy}\right)$; donc $SSQ'dxdy\left(\frac{ddt}{dxdy}\right) = SQ'dx\left(\frac{dt}{dx}\right)$ $- SSdxdy\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dQ'}{dy}\right) = SQ'dx\left(\frac{dt}{dx}\right) -$ $Stdy\left(\frac{dQ'}{dy}\right) + SStdxdy\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) = Q't - Stdx.$ $\left(\frac{dQ'}{dx}\right) + SStdxdy\left(\frac{ddQ'}{dxdy}\right) - Stdy\left(\frac{dQ'}{dx}\right)$, à cauſe de $SQ'dx\left(\frac{dt}{dx}\right) = Q't - Stdx\left(\frac{dQ'}{dx}\right)$. On aura auſſi $SSQ''dxdy\left(\frac{ddt}{dy^2}\right) = SQ''dx\left(\frac{dt}{dy}\right) - Stdx\left(\frac{dQ''}{dy}\right) +$ $SStdxdy\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right)$. Mais parce que $\left(\frac{d^3t}{dx^3}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$, on a $SSRdxdy\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = SRdy\left(\frac{du}{dx}\right) - Sudy\left(\frac{dR}{dx}\right)$ $+ SSudxdy\left(\frac{ddR}{dx^2}\right)$, & $SSudxdy\left(\frac{ddR}{dx^2}\right) =$ $Stdy\left(\frac{ddR}{dx^2}\right) - SStdxdy\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right)$; de ſorte que

l'on aura $SSR\,dx\,dy\left(\frac{d^3t}{dx^3}\right) = SR\,dy\left(\frac{ddt}{dx^2}\right) -$
$S\,dy\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dR}{dx}\right) + S\,t\,dy\left(\frac{ddR}{dx^2}\right) - SS\,t\,dx\,dy\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right)$.
Si l'on fait maintenant attention que $\left(\frac{d^3t}{dx^2\,dy}\right) =$
$\left(\frac{ddu}{dx\,dy}\right)$, on verra aisément que $SSR'dx\,dy\left(\frac{ddu}{dx\,dy}\right)$ est
$= R'u - S\,u\,dx\left(\frac{dR'}{dx}\right) + SS\,u\,dx\,dy\left(\frac{ddR'}{dx\,dy}\right) -$
$S\,u\,dy\left(\frac{dR'}{dy}\right)$. Et parce qu'ici $SS\,u\,dx\,dy\left(\frac{ddR'}{dx\,dy}\right)$
$= S\,t\,dy\left(\frac{ddR'}{dx\,dy}\right) - SS\,t\,dx\,dy\left(\frac{d^3R'}{dx^2\,dy}\right)$, on peut
conclure que $SSR'dx\,dy\left(\frac{d^3t}{dx^2\,dy}\right) = R'\left(\frac{dt}{dx}\right)$

$$-S.\left(\frac{dt}{dx}\right)dx\left(\frac{dR'}{dx}\right) + S\,t\,dy\left(\frac{ddR'}{dx\,dy}\right)$$
$$-S\left(\frac{dt}{dx}\right)dy\left(\frac{dR'}{dy}\right) - SS\,t\,dx\,dy\left(\frac{d^3R'}{dx^2\,dy}\right).$$

Si nous changeons x en y, nous aurons

$$SSR''dx\,dy\left(\frac{d^3t}{dx\,dy^2}\right) = R''\left(\frac{dt}{dy}\right)$$
$$-S\left(\frac{dt}{dy}\right)dy\left(\frac{dR''}{dy}\right) + S\,t\,dx\left(\frac{ddR''}{dx\,dy}\right)$$
$$-S\left(\frac{dt}{dy}\right)dx\left(\frac{dR''}{dx}\right) - SS\,dx\,dy\left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right).$$

Et $SSR'''dx\,dy\left(\frac{d^3t}{dy^3}\right) = SR'''dx\left(\frac{ddt}{dy^2}\right) -$

$S\left(\frac{dt}{dy}\right) dx \left(\frac{dR'''}{dy}\right) + S\,t\,dx \left(\frac{ddR'''}{dy^2}\right) -$
$SS\,t\,dx\,dy \left(\frac{d^3 R'''}{dy^3}\right)$; & ainsi de suite.

En substituant ces valeurs, nous trouverons $v\,SSV\,dx\,dy$

$$= SS\,t\,dx\,dy. \left\{\begin{array}{r} N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3 R}{dx^2}\right) \\ - \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d^3 R'}{dx^2\,dy}\right) \\ + \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^3 R''}{dx\,dy^2}\right) \\ - \left(\frac{d^3 R'''}{dy^3}\right) \end{array}\right.$$

$$+ SP\,t\,dy + SQ\,dy\left(\frac{dt}{dx}\right) - S\,t\,dy\left(\frac{dQ}{dx}\right) + Q't$$

$$+ SP'\,t\,dx - S\,t\,dx\left(\frac{dQ'}{dx}\right) - S\,t\,dy\left(\frac{dQ'}{dy}\right)$$

$$+ SQ''dx\left(\frac{dt}{dy}\right) - S\,t\,dx\left(\frac{dQ''}{dy}\right)$$

$+ SR$ [illegible] $\left(\frac{ddt}{dx^2}\right) + R'\left(\frac{dt}{dx}\right) - S\left(\frac{dt}{dx}\right) dx \left(\frac{dR'}{dx}\right)$

$$- S.\left(\frac{dt}{dy}\right) dy \left(\frac{dR''}{dy}\right) + SR'''dx\left(\frac{ddt}{dy^2}\right)$$

$$- S\left(\frac{dt}{dx}\right) dy \left(\frac{dR}{dx}\right) + R''\left(\frac{dt}{dy}\right)$$

$$- S\left(\frac{dt}{ax}\right) dy \left(\frac{dR'}{dy}\right) - S\left(\frac{dt}{dy}\right) dx \left(\frac{dR''}{dx}\right)$$

$$- S\left(\frac{dt}{dy}\right) dx \left(\frac{dR'''}{dy}\right) + S\,t\,dy\left(\frac{ddR}{dx^2}\right) + S\,t\,dy\left(\frac{ddR'}{dx\,dy}\right)$$

$$+ S t dx \left(\frac{ddR''}{dx\,dy}\right) + S t dx \left(\frac{ddR'''}{dy^2}\right)$$
&c.

REMARQUE I. La premiere partie de cette expression est assez évidente, & l'on peut arranger commodément les autres parties de la maniere suivante :

$$S t dy \left\{ \begin{array}{l} P - \left(\frac{dQ}{dx}\right) + \left(\frac{ddR}{dx^2}\right) \\ \quad - \left(\frac{dQ'}{dy}\right) + \left(\frac{ddR'}{dx\,dy}\right) \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad + \left(\frac{ddR''}{dy^2}\right) \end{array} \right\}$$

$$+ S t dx \left\{ \begin{array}{l} P' - \left(\frac{dQ''}{dy}\right) + \left(\frac{ddR'''}{dy^2}\right) \\ \quad - \left(\frac{dQ'}{dx}\right) + \left(\frac{ddR''}{dx\,dy}\right) \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad + \left(\frac{ddR'}{dx^2}\right) \end{array} \right\}$$

$$+ S \left(\frac{dt}{dx}\right) dy \left\{ \begin{array}{l} Q - \left(\frac{dR}{dx}\right) \\ \quad - \left(\frac{dR'}{dy}\right) \end{array} \text{ \&c.} \right\}$$

$$+ S \left(\frac{dt}{dy}\right) dx \left\{ \begin{array}{l} Q'' - \left(\frac{dR'''}{dy}\right) \\ \quad - \left(\frac{dR''}{dx}\right) \end{array} \text{ \&c.} \right\}.$$

Il est aisé de voir comment on pourroit continuer.

40. REMARQUE II. Parmi ces formules intégrales il y en a qui contiennent dy, & d'autres qui contiennent dx ; dans les premieres on doit supposer x constant

& égal à la valeur qu'il doit avoir à la fin de l'intégration ; mais on doit regarder y comme constant & égal à la valeur qu'il doit recevoir à la fin de l'intégration, lorsqu'il s'agit des formules qui contiennent dx.

Maintenant pour savoir si la quantité désignée par la formule $SSV\,dx\,dy$ est un *maximum* ou un *minimum*, il faut, avant toutes choses, égaler à zéro la partie de la variation qui est affectée du double signe d'intégration, de quelle maniere que l'on prenne $vz = t$, de sorte que

$$\text{l'on aura } 0 = N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) \text{ \&c.}$$
$$- \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) \text{ \&c.}$$
$$+ \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) \text{ \&c.}$$
$$\text{\&c.}$$

Cette équation exprimera la nature de la quantité cherchée. A l'égard des quantités qui doivent être introduites par la double intégration, on les déterminera de maniere à satisfaire aux autres parties de la variation.

Usages du Calcul des variations dans la Géométrie.

41. AVANT d'entrer en matiere, nous observerons que si V est une fonction de x & de y sans différentielles, on aura $dV = M\,dx + N\,dy$ & $vV = Nvy$, en supposant (ce qui est très-permis) $vx = 0$; donc $vV\,dx = Nvy.dx$. Or si V désigne l'ordonnée BN d'une courbe AM (fig. 2), dont la courbe variée soit am, l'on aura $vV = Nn$; & il est clair que l'aire infiniment petite $Nnfr$ sera la variation de l'aire $BNrb$, & que $AanN$ (variation de l'aire DANB) sera la somme des élémens de la variation de l'aire correspondante à l'abscisse DB; ainsi cette aire $AanN$ sera $= SvV\,dx$: car l'élément $Nnfr = vV\,dx$. Mais en supposant que toutes les variations qui répondent

dent aux ordonnées de la courbe sont nulles, excepté celles qui répondent à $Bb = dx$, alors toute la variation se réduit à l'élément $v\,V\,dx = N\,r\,f\,n$; & lorsque $S\,V\,dx$ devra être un *maximum* ou un *minimum*, $v\,V\,dx = N\,r\,f\,n$ sera $= 0$, & il faudra, selon ce qu'on a dit ci-dessus (15), faire $N = 0$. Lorsqu'on cherche une courbe qui jouit de quelque propriété du *maximum* ou du *minimum*, comme, par exemple, si on demande quelle est la courbe qui sous même longueur renferme un plus grand espace entre deux ordonnées, la partie correspondante de l'axe & la courbe, cette propriété affecte toute la courbe & non un de ses points en particulier ; de sorte que les *maxima* & les *minima*, dont il est ici question, sont fort différens de ceux dont on a parlé dans le calcul différentiel.

42. PROBLÊME. *Trouver la courbe dans laquelle* $S\,V\,dx = S\,dx\,(y^3 - naxy)$ *est un* maximum *ou un* minimum (*). On aura $dV = M\,dx + N\,dy = -\,anydx - anxdy + 3y^2dy$ & $N = -\,anx + 3y^2$; donc en faisant $N = 0$, on aura $3y^2 = anx$, $y^2 = \frac{an}{3}x$, équation à une parabole dont le sommet seroit A (*fig.* 5), l'axe AP & le paramètre $= \frac{an}{3}$. Pour déterminer si cette valeur est un *maximum* ou un *minimum*, au lieu d'une parabole je suppose une ligne droite qui se confonde avec l'axe AP ; mais alors $y = 0$, & $S\,dx\,(y^3 - naxy) = 0$; donc nous avons trouvé un *maximum* & non un *minimum*.

REMARQUE. Puisque le terme représenté par $M\,dx$ est $= 0$, on pourra différencier V en supposant x constant, & égaler le résultat à zéro.

(*) Il est visible que le problême seroit le même si on demandoit de trouver quelle doit être la relation entre les x & les y, pour que la formule proposée soit un *maximum* ou un *minimum*.

43. PROBLÊME. *Trouver la courbe dans laquelle la formule* $SVdx = S.(15aaxxy - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5)dx$ *est un* maximum *ou un* minimum. On aura $N = 15aaxx - 15a^3x + 15a^2y^2 - 15y^4 = 0$; donc $a^2x^2 - a^3x + a^2y^2 - y^4 = (ax - yy)(ax + yy - aa) = 0$, équation de la courbe cherchée. A cause des deux facteurs l'on a deux courbes, savoir, $ax = y^2$, & $(a - x)a = y^2$, toutes les deux à la parabole. Pour savoir si ces courbes sont pour le *maximum* ou pour le *minimum*, substituons la valeur de y prise des équations que nous venons de trouver, dans la formule $SVdx$, supposons x infiniment petit, & effaçons les termes qui s'évanouissent respectivement aux autres; alors la premiere courbe donnera $S. - 10a^3xdx\sqrt{ax}$, la seconde donnant $S.2a^5dx$ (*). Et si l'on suppose $y = 0$, la formule deviendra $S.0dx = 0$. Ainsi la seconde courbe donne un *maximum*, & la premiere un *minimum*, c'est-à-dire, un *maximum* négatif.

44. PROBLÊME. *Entre toutes les courbes qui ont la même abscisse* x, *trouver celle dans laquelle, en supposant* $p = \frac{dy}{dx}$, *ou* $dy = pdx$, $Sdx\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$ *est un* minimum. On aura $V = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$, & $dV = Mdx + Ndy + Pdp = \frac{-dx\sqrt{(1+pp)}}{2x\sqrt{x}} + \frac{pdp}{\sqrt{[x.(1+pp)]}}$. Donc dans l'équation ci-dessus (12), on aura $M = \frac{-\sqrt{(1+pp)}}{2x\sqrt{x}}$, $N = 0$, $P = \frac{p}{\sqrt{[x.(1+pp)]}}$, $Q = 0$, $R = 0$, &c. & dans l'équation $N - \frac{dP}{dx} +$

(*) Car à cause de $x = \frac{1}{\infty}$, on a $(a - x).a = aa = y^2$ & $y = a$.

$\frac{ddQ}{dx^2}$ &c. = o, qui (15) doit avoir lieu dans ce cas, on aura $N - \frac{dP}{dx} = o$ & $dP = o$, à cause de $N = o$, & $P = \frac{p}{\sqrt{[x.(1+pp)]}}$ sera une constante (*) que nous ferons $= \frac{1}{\sqrt{a}}$; donc $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$, $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$; & $y = S. \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = S. \frac{dx.x}{\sqrt{(ax-xx)}}$, équation à une cycloïde (**).

45. PROBLÊME. *z désignant la surface d'un solide engendré par la courbe* AM (*fig.* 2) *autour de l'axe* DP, *laquelle en exprimant par c la circonférence d'un cercle dont le rayon est* = 1, *est* $= S. cydx\sqrt{(1+pp)}$ (***), *& V étant une fonction quelconque de cette surface, trouver*

(*) Car puisque la différentielle de P est = o, P est constant ou = o; mais il est évident qu'il n'est pas égal à zéro.

(**) Ayant mené AP perpendiculaire sur la base AD de la demi-cycloïde AB (fig. 6), & les autres lignes que représente la figure, faisons $AP = Da = x$, $Pp = NM = dx$, $PN = y$, $Mm = Nn = dy$. A cause de la corde Bb parallele à la tangente Nt de la cycloïde; les triangles Nmn, Bab sont semblables. Mais ce dernier est semblable au triangle baD: car le triangle BbD rectangle en b, est divisé par la perpendiculaire sur son hypothénuse BD en deux triangles semblables entr'eux (voyez la Géométrie); donc $dy : dx :: x : ba$; & $dy = \frac{dx.x}{ba} = \frac{dx.x}{\sqrt{(ax-xx)}}$, en faisant le diamètre BD $= a$, ce qui donne $ba = \sqrt{(ax-xx)}$.

(***) Car $dy = pdx$ & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(1+pp)}$.

la nature de la courbe dans laquelle $SVdx$ *est un* maximum *ou un* minimum. Soit fait $dV = ndz$, n sera une fonction de z. Or en faisant $z = S.mdx$, on aura $m = y\sqrt{(1+pp)}$, en négligeant la constante qui ne peut changer la nature de la courbe, & $dm = dy\sqrt{(1+pp)} + \frac{ypdp}{\sqrt{(1+pp)}} = M'dx + N'dy + P'dp$ &c. (24); donc $M' = 0$, $N' = \sqrt{(1+pp)}$, $P' = \frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}$, $Q' = 0$, $R' = 0$, &c. Ainsi en supposant que A & g ayent les mêmes significations que ci-dessus (24), nous aurons $(A-g).\sqrt{(1+pp)} - \frac{d(A-g)P'}{dx} = 0$; donc en faisant $A - g = u$, multipliant par dx & transposant, on aura $udx\sqrt{(1+pp)} = d.\frac{ypu}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{up^2dx}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{uydp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ypdu}{\sqrt{(1+pp)}}$, à cause de $dy = pdx$. Multipliant par $\sqrt{(1+pp)}$, transposant ensuite up^2dx & réduisant, il vient $udx = \frac{uydp}{1+pp} + ypdu$. Mais à cause de $u = A - g$, & de A qu'on doit traiter comme constant, ainsi qu'on l'a dit ci-devant, on a $du = -dg = -ndx$ (24); donc $udx = \frac{uydp}{1+pp} - ypndx$. Supposons que V soit $= z$, de manière que la formule $SdxSydx\sqrt{(1+pp)}$ doive être un *maximum*, on aura $n = 1$, $S.ndx = g = x$. Mais parce que A désigne $S.ndx$ prise depuis le point où commence l'intégrale, jusques au terme où elle finit, en supposant qu'alors $x = a$, on aura $A = a$ & $u = A - g = a - x$ (*). Ainsi l'équation de la

(*) Si $DB = x$ & $DP = a$, $A - g$ exprimera la valeur de $S.ndx$ correspondante à BP.

courbe sera $\overline{a-x}. dx = \frac{(a-x) y dp}{1+pp} - y p dx$, équation que je ne sache pas qu'on puisse ramener à une intégrale finie par aucune méthode connue.

46. PROBLÊME. *Dans quelle courbe* S. $\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{y}}$ *est un* minimum ? Comparant cette formule avec la formule S V dx, & faisant attention que $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(1+pp)}$, on a $V = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$ & $dV = M dx + N dy + P dp = \frac{-dy\sqrt{(1+pp)}}{2y\sqrt{y}} + \frac{p dp}{\sqrt{[y.(1+pp)]}}$; donc $M = 0$, $N = \frac{-\sqrt{(1+pp)}}{2y\sqrt{y}}$, & $P = \frac{p}{\sqrt{[y.(1+pp)]}}$; $Q = 0$, $R = 0$, &c. Pour trouver la nature de la courbe, on fera $N - \frac{dP}{dx} = 0$. Pour intégrer cette équation je multiplie par dx & j'ai en transposant, $N dx = dP$; $N p dx = p dP$, & $N dy = p dP$, à cause de $p dx = dy$. Or puisque $M = 0$, & que $dV = M dx + N dy + P dp$, on aura $dV = N dy + P dp = p dP + P dp$, & en intégrant, $V = Pp + C$, C étant une constante. Donc puisque $V = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$ & $P = \frac{p}{\sqrt{[y.(1+pp)]}}$, on aura $\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}} = \frac{pp}{\sqrt{[y.(1+pp)]}} + C$, & $C = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}} - \frac{pp}{\sqrt{[y.(1+pp)]}} = \frac{1}{\sqrt{y}.\sqrt{(1+pp)}}$.

Si on suppose $C = \frac{1}{\sqrt{a}}$, on aura $\frac{1}{a} = \frac{1}{y.(1+pp)}$,

$y.(1+pp)=a$; $pp=\frac{a-y}{y}=\frac{ay-yy}{yy}$, $p=\frac{dy}{dx}$ $=\frac{\sqrt{(ay-yy)}}{y}$, & $dx=\frac{ydy}{\sqrt{(ay-yy)}}$ (*), équation différentielle du premier ordre qui renferme une constante arbitraire a. Pour intégrer cette équation, on remarquera que $\frac{ydy}{\sqrt{(ay-yy)}}=\frac{\frac{1}{2}ady}{\sqrt{(ay-yy)}}-d.\sqrt{(ay-yy)}$, & que $\frac{\frac{1}{2}ady}{\sqrt{(ay-yy)}}$ est la différentielle d'un arc de cercle, dont le rayon $=\frac{1}{2}a$ & le sinus $=\sqrt{(ay-yy)}$; de sorte qu'en désignant cet arc par z, on a $x=z-\sqrt{(ay-yy)}+b$, b est une constante. Ainsi cette intégrale renferme deux constantes arbitraires a & b, introduites par les deux intégrations qu'on a faites.

On voit par-là que cette équation qui fait que la formule proposée devient un *maximum* ou un *minimum*, n'est point entièrement déterminée, puisqu'elle renferme deux constantes arbitraires; on peut donc ajouter au problême proposé deux nouvelles conditions, qu'on remplira au moyen de ces deux constantes.

Si l'on veut, par exemple, que x étant $=c$, P soit $=0$, on aura $\frac{p}{\sqrt{y}.\sqrt{(1+pp)}}=0$ (**), $p=$

(*) Si l'on change y en x on aura $dy=\frac{xdx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ qui est (par le n°. 44) une équation à la cycloïde. Il est bon d'observer qu'en faisant PN $=x$ (fig 6), on a PN $=$ l'arc Db — le sinus de cet arc : car Pa $=$ AD $=$ BbD & l'arc Bb $=$ bN ; donc PN $+$ ba $=$ l'arc Db, donc PN $=$ l'arc Db — ba.

(**) C'est la même chose que si dans la deuxieme formule du n°. 13, on faisoit le membre absolu $=0$.

$\frac{\sqrt{(ay - yy)}}{y} = o$, & $a = y$; par conséquent l'arc z sera la demi-circonférence d'un cercle dont le diamètre $= a$; ainsi notre intégrale, en substituant c pour x & o pour $\sqrt{(ay - yy)}$, deviendra $c = z + b$, & l'on aura $b = c - D$, D étant la demi-circonférence du diamètre a, par conséquent notre équation sera $x = z - \sqrt{(ay - yy)} + c - D$.

Si l'on veut de plus que lorsque $x = o$, y soit aussi $= o$, dans ce cas on a $o = o - o + c - D$ & $c = D$; donc on aura $x = z - \sqrt{(ay - yy)}$. Maintenant si l'on fait $D : g :: \frac{1}{2}a : 1$, g sera la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$, & l'on aura $D = \frac{ga}{2}$. Si l'on fait de même $z : u :: \frac{1}{2}a : 1$, on aura $z = \frac{au}{2}$, u étant un arc semblable à l'arc z, mais pris dans un cercle dont le rayon $= 1$. Mais l'équation $c = D$ devient alors $c = \frac{ga}{2}$, d'où l'on tire $a = \frac{2c}{g}$; donc $z = \frac{cu}{g}$, & notre équation sera $x = \frac{cu}{g} - \sqrt{\left(\frac{2c}{g} y - yy\right)}$.

47. PROBLÊME. *Etant donnée une surface courbe, déterminer la ligne la plus courte qu'on peut mener entre deux points pris sur cette surface.* Sur un plan quelconque A M P (fig. 5), auquel on rapporte la surface, on prendra A P pour l'axe de la projection de la ligne cherchée. De chaque point m de cette ligne on abaissera des perpendiculaires mM sur le plan des y & des x; ces perpendiculaires traceront la ligne A M qui sera la projection de la ligne cherchée, & celle-ci étant connue, la plus courte ligne demandée le sera aussi. Soit A P $= x$, P M $= y$, M$m = z$; puisque la nature de la surface est donnée, z sera donné en x & y. Supposons $dz = t\,dx + u\,dy$, $dt = e\,dx +$

$y.(1+pp)=a;$

$=\frac{\sqrt{(ay-yy)}}{y}$,

tion différentielle
constante arbitrai

remarquera que

$d.\sqrt{(ay-y}$

rentielle d'un
le finus =
cet arc par
constante. A
arbitraires
qu'on a fait

On voit
formule
n'est poi
ferme de
ter au
qu'on r

Si l'

$= du = fdx + gdy$; donc

$$\frac{-upd u}{\ldots pp + (t + up)^2]} = d\left(\frac{p + tu + uup}{\sqrt{[1 + pp + (t + uup)^2]}}\right);$$

... différenciant le second membre, multipliant en-

.. $[1 + pp + (t + uup)^2]^{\frac{3}{2}}$, réduisant, transposant

.. ., on aura $dp = \frac{(tp - u).(dt + pdu)}{1 + tt + uu}$.

$= \frac{dy}{dx}$, & $dp = \frac{ddy}{dx}$; donc (en multipliant tout

..) $dxddy = \frac{(tdy - udx).(dtdx + dydu)}{1 + tt + uu}$,

..n de la courbe de projection sur le plan des y x, laquelle étant trouvée, on déterminera fa-..t sur la surface donnée, la plus courte ligne ..e deux points donnés de cette surface.

..us avons traité des *maxima* & des *minima*, re-..ment aux courbes qui ont la même abscisse, méthode peut s'appeller *la méthode absolue des* ..na *& des* minima. Nous appellons *méthode relative* ..axima *& des* minima, celle qui nous apprend à ..rminer les courbes qui jouissent de la propriété du ..um ou du *minimum*, non pas parmi toutes les ..es qui ont une même abscisse, mais seulement .. celles qui ont une ou plusieurs propriétés com-.. : *le fameux problême des isopérimètres*, proposé ..mmencement de ce siecle, par lequel on deman-.. de déterminer entre toutes les courbes de même ..eur & correspondantes à la même abscisse, celle .. jouit de quelque propriété du *maximum* ou du ..*mum*, appartient à cette seconde méthode. Il faut ..n remarquer que la propriété ou les propriétés com-..nes, dont il s'agit ici, doivent affecter toute la ..urbe, & non un ou plusieurs de ses élémens. Il est ..on aussi d'observer que les *maxima* & les *minima* sont de telle nature, que si on fait un changement infiniment petit dans la courbe, la courbe variée aura le même *maximum*, ou le même *minimum*.

$f\,dy$, $du = f\,dx + g\,dy$. La quantité f doit être la même dans l'une & l'autre formule (*) ; mais l'élément de la ligne cherchée (qu'on doit considérer comme une courbe à double courbure) est $= \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \sqrt{[dx^2 + dy^2 + (t\,dx + u\,dy)^2]} = dx\sqrt{(1 + pp + tt + 2tup + uupp)}$, en faisant $dy = p\,dx$; l'intégrale de cette quantité doit donc être un *minimum*. Faisons $= V$ le multiplicateur de dx pour avoir

$$dV = \frac{\left\{\begin{array}{l} + te\,dx + tf\,dy + p\,dp \\ + uep\,dx + ufp\,dy + tu\,dp \\ + tfp\,dx + tgp\,dy + uup\,dp \\ + ufpp\,dx + ugpp\,dy \end{array}\right\}}{\sqrt{(1 + pp + tt + 2tup + uupp)}}$$

Mais parce que l'on doit avoir ici $N - \frac{dP}{dx} = 0$, ou $N\,dx = dP$, on aura $\frac{tf\,dx + ufp\,dx + tgp\,dx + ugpp\,dx}{\sqrt{(1 + pp + tt + 2tup + uupp)}} = d\left(\frac{p + tu + uup}{\sqrt{(1 + pp + tt + 2tup + uupp)}}\right)$. Mais $f\,dx$

(*) Pour ne laisser aucun doute là-dessus, soit $S(P\,dx + Q\,dy) = V$; de maniere que l'on ait $dP = m\,dx + n\,dy$, $dQ = M\,dx + N\,dy$; donc $P\,dx = \left(\frac{dV}{dx}\right)dx$, & $Q\,dy = \left(\frac{dV}{dy}\right)dy$. Dans P & Q (fonctions de x & de y), faisons varier successivement x & y, pour avoir $dP = \left(\frac{ddV}{dx.dx}\right)dx + \left(\frac{ddV}{dx\,dy}\right)dy$, & $dQ = \left(\frac{ddV}{dy.dy}\right)dy + \left(\frac{ddV}{dy\,dx}\right)dx$. Mais ici $\left(\frac{ddV}{dy\,dx}\right) = N = \left(\frac{ddV}{dx\,dy}\right) = n$; donc puisque dans nos équations, f représente n & N ; il est clair que f a la même valeur dans l'une & dans l'autre.

$+ gpdx = du = fdx + gdy$; donc
$$\frac{tdu + updu}{\sqrt{[1+pp+(t+up)^2]}} = d\left(\frac{p+tu+uup}{\sqrt{[1+pp+(t+uup)^2]}}\right);$$
donc, en différenciant le second membre, multipliant ensuite par $[1+pp+(t+uup)^2]^{\frac{3}{2}}$, réduisant, transposant & divisant, on aura $dp = \frac{(tp-u).(dt+pdu)}{1+tt+uu}$.
Mais $p = \frac{dy}{dx}$, & $dp = \frac{ddy}{dx}$; donc (en multipliant tout par dx^2) $dxddy = \frac{(tdy-udx).(dtdx+dydu)}{1+tt+uu}$,
équation de la courbe de projection sur le plan des y & des x, laquelle étant trouvée, on déterminera facilement sur la surface donnée, la plus courte ligne entre deux points donnés de cette surface.

Nous avons traité des *maxima* & des *minima*, relativement aux courbes qui ont la même abscisse, cette méthode peut s'appeller *la méthode absolue des* maxima *& des* minima. Nous appellons *méthode relative des* maxima *& des* minima, celle qui nous apprend à déterminer les courbes qui jouissent de la propriété du *maximum* ou du *minimum*, non pas parmi toutes les courbes qui ont une même abscisse, mais seulement entre celles qui ont une ou plusieurs propriétés communes : *le fameux problême des isopérimètres*, proposé au commencement de ce siecle, par lequel on demandoit de déterminer entre toutes les courbes de même longueur & correspondantes à la même abscisse, celle qui jouit de quelque propriété du *maximum* ou du *minimum*, appartient à cette seconde méthode. Il faut bien remarquer que la propriété ou les propriétés communes, dont il s'agit ici, doivent affecter toute la courbe, & non un ou plusieurs de ses élémens. Il est bon aussi d'observer que les *maxima* & les *minima* sont de telle nature, que si on fait un changement infiniment petit dans la courbe, la courbe variée aura le même *maximum*, ou le même *minimum*.

48. PROBLÊME. *Entre toutes les courbes rapportées à la même abscisse* AB (*fig.* 7), *dans lesquelles l'expression* V' *a la même valeur, déterminer celle dans laquelle* V *est un* maximum *ou un* minimum. Supposons que az soit la courbe cherchée & que dans cette courbe on ait V' = B, quantité déterminée, que l'on ait aussi V = A qui doit être un *maximum* ou un *minimum*; ayant fait $AP = x$, $PM = y$, $pn = y'$, $Pp = dx$, je fais varier y & y', & prenant la variation de B & de A par la méthode ordinaire, & égalant à o l'une & l'autre variation, j'aurai facilement l'équation de la courbe.

Supposons qu'en prenant la variation par rapport à l'ordonnée y, j'aie $vy\,d\text{A}$, & que j'aie $vy'\,d\text{A}'$, en prenant la même variation par rapport à $y' = y + dy$, & prenant $d\text{A}$ & $d\text{A}'$ conformément aux régles qu'on a suivies dans les variations, & que la valeur variée de V soit $= vy\,d\text{A} + vy'\,d\text{A}'$, & celle de $\text{V}' = vy\,d\text{B} + vy'\,d\text{B}'$, on aura $vy\,d\text{A} + vy'\,d\text{A}' = 0$, $vy\,d\text{B} + vy'\,d\text{B}' = 0$. Multipliant la premiere équation par f & la seconde par g, il vient $vy.f\,d\text{A} + vy'.f\,d\text{A}' = 0$, & $vy.g\,d\text{B} + vy'.g\,d\text{B}' = 0$. Ajoutant ensuite ces équations, j'aurai $vy\,(f\,d\text{A} + g\,d\text{B}) + vy'\,(f\,d\text{A}' + g\,d\text{B}') = 0$, équation qui ne peut avoir lieu dans toutes les suppositions des valeurs de vy & vy', à moins que l'on n'ait à la fois $f\,d\text{A} + g\,d\text{B} = 0$, & $f\,d\text{A}' + g\,d\text{B}' = 0$; mais en prenant la variation qui arrive à $f\,d\text{A} + g\,d\text{B}$, lorsque y devient y', on a $f'\,d\text{A}' + g'\,d\text{B}' = 0$, & comparant cette derniere avec $f\,d\text{A}' + g\,d\text{B}' = 0$, il vient $f' = f$, $g' = g$; de sorte que f & g sont des constantes quelconques. Pour résoudre le problême proposé, on fera $f\,d\text{A} + g\,d\text{B} = 0$ (*), d'où l'on tirera l'équation de la courbe.

(*) Si l'on chasse vy & vy' des équations ci-dessus, on aura $\frac{vy}{vy'} = \frac{-d\text{A}'}{d\text{A}} = \frac{-d\text{B}'}{d\text{B}}$; donc $\frac{d\text{A}'}{d\text{A}} = \frac{d\text{B}'}{d\text{B}}$; mais $d\text{A}' = d\text{A} + dd\text{A}$, & $d\text{B}' = d\text{B} + dd\text{B}$; donc $1 + \frac{dd\text{A}}{d\text{A}} = 1 + \frac{dd\text{B}}{d\text{B}}$, ou $\frac{dd\text{A}}{d\text{A}} = \frac{dd\text{B}}{d\text{B}}$, & en inté-

REMARQUE I. Il est visible que la solution sera la même, soit qu'on demande la courbe qui parmi toutes celles qui ayant une propriété commune V' rendent V un *maximum* ou un *minimum*, soit qu'on demande la courbe qui parmi toutes celles qui jouissant de la propriété commune V rendent V' *maximum* ou *minimum*. L'on peut aussi proposer le problême, de maniere qu'il appartienne à la méthode absolue des *maxima* & des *minima*; car il revient au même que si on demandoit de déterminer entre toutes les courbes rapportées à la même abscisse celle dans laquelle $fV + gV'$ est un *maximum* ou un *minimum*; de sorte que l'on n'a besoin que de la variation d'une seule ordonnée y, & nullement de la variation de y'. S'il s'agissoit de la formule $fSVdx + gSV'dx$, il est visible que le problême ne seroit pas différent.

REMARQUE II. Si la variation de $SVdx$ est supposée $= Svydx\left(N - \frac{dP}{dx}\ \&c.\right)$

$$+ vy\left(P - \frac{dQ}{dx}\ \&c.\right)$$

$$\&c.$$

(voyez ci-dessus le n°. 13) & $vSV'dx =$

$$Svydx\left(N' - \frac{dP'}{dx}\ \&c.\right)$$

$$+ \&c.,$$

pour trouver la courbe dans laquelle $fSVdx + gSV'dx$ est un *maximum* ou un *minimum*, on égalera à o la somme des quantités qui sont sous le signe d'intégration, après avoir multiplié la premiere par f & la seconde par g, pour avoir $fSvydx\left(N - \frac{dP}{dx}\ \&c.\right)$

---

grant, $L.dA = L.dB + c$, ou $dA = cdB$, quantité qui en faisant $c = \frac{-g}{f}$, devient $fdA = -gdB$; donc $fdA + gdB = o$. On comprendra facilement par les exemples suivans ce qu'on doit entendre par dA & par dB.

$+ gSvydx\left(N' - \frac{dP'}{dx} \&c.\right) = 0$. Donc en différenciant & divisant par vy, on aura $fdx\left(N - \frac{dP}{dx} \&c.\right) + gdx\left(N' - \frac{dP'}{dx} \&c.\right) = 0$, ou $fdA + gdB = 0$, équation d'où l'on tirera aisément celle de la courbe, ainsi qu'on va le voir dans les problêmes suivans.

49. PROBLÊME. *Entre toutes les courbes de même longueur qui passent par les points a & z (fig. 7), déterminer celle dont l'aire* A *az* B *est la plus grande.* La longueur de l'arc az est $= Sdx\sqrt{(1 + pp)}$, ce qui est la propriété commune. La variation de cette longueur est donc nulle. C'est pourquoi en supposant $SVdx = Sdx\sqrt{(1 + pp)}$, on aura $dV = Mdx + Ndy + Pdp$; & $M = 0$, $N = 0$, $P = \frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}}$, $Q = 0$, &c. La formule $SV'dx$ du *maximum* est ici $= S.ydx$, d'où l'on tire $dV' = M'dx + N'dy + P'dp + \&c. = dxdy$. Car dx est constant, $M' = 0$, $N' = dx$, $P' = 0$, $Q' = 0$, &c., ainsi $vV' = vydx = vydB$; donc $dB = dx$. Si on multiplie dV' par 1 & dV par b, on aura $f = b$, $g = 1$, & l'équation $fdA + gdB = 0$, deviendra $dx - bd.\frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}} = 0$; ainsi $dx = bd.\frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}}$, & en intégrant, $x + c = \frac{bp}{\sqrt{(1 + pp)}}$; donc $\overline{x + c}^2 \cdot (1 + pp) = b^2p^2$, $\overline{x + c}^2 = [b^2 - (x + c)^2]\, p^2$, & $\frac{x + c}{\sqrt{[bb - (c + x)^2]}} = p = \frac{dy}{dx}$; donc en multipliant par dx, intégrant & ajoutant une constante a, on aura

$a - \sqrt{bb - (x+c)^2} = y$. D'où l'on tire $bb - (x+c)^2 = \overline{y-a}^2$, ou $bb - x'x' = y'y'$ (en faisant $x + c = x'$, $y - a = y'$), équation au cercle. Ainsi la courbe cherchée est un cercle; mais un arc de cercle d'une longueur donnée peut passer par les points a & z, en tournant sa concavité ou sa convexité vers l'axe AB; dans le premier cas l'aire ABza sera un *maximum*, mais cette aire sera un *minimum* dans le second cas.

50. PROBLÊME. *Entre toutes les courbes de même longueur passant par les points* A & M, *trouver celle qui avec les droites* AC, MC, *menées au point fixe* C, *contient une aire* ACM, *qui soit un* maximum *ou un* minimum (*fig.* 8). Ayant mené Cm infiniment proche de CM, avec le rayon $CB = 1$, décrivez l'arc Bf, & avec le rayon Cm l'arc Mn. Faisons $Bb = x$, $bf = dx$, $CM = y$, $nm = dy$, les secteurs semblables Cfb, CMn donneront $1 : dx :: y : Mn = ydx$; donc l'élément de la courbe Mm sera $= \sqrt{(dy^2 + y^2 dx^2)} = dx\sqrt{(pp + yy)}$, & l'élément de l'aire sera $= \frac{1}{2}y^2 dx$. Si dans la formule qui (13) exprime la variation de $\int V dx$ en supposant $vx = 0$, on fait $V = \sqrt{(pp + yy)}$, & ensuite $V = \frac{1}{2}y^2$ (*), on trouvera, selon la seconde remarque de l'avant-dernier problême, on trouvera, dis-je, en faisant $f = b$, & $g = -1$, que l'équation $f dA + g dB = 0$, deviendra $\frac{bydx}{\sqrt{(pp+yy)}} - bd.\frac{p}{\sqrt{(pp+yy)}} - ydx = 0$; donc en multipliant par p, faisant attention que $p = \frac{dy}{dx}$ & transposant, $\frac{bydy}{\sqrt{(pp+yy)}} - bpd.\frac{p}{\sqrt{(pp+yy)}} = ydy$, ou $bd.\sqrt{(pp+yy)} - \frac{bpdp}{\sqrt{(pp+yy)}} -$

(*) Dans notre problême $\frac{1}{2}yy$ est représenté par V'.

$bpd. \frac{p}{\sqrt{(pp+yy)}} = ydy$, dont l'intégrale (*) donne $b\sqrt{(pp+yy)} - \frac{bpp}{\sqrt{(pp+yy)}} + bc = \frac{by^2}{\sqrt{(pp+yy)}} + bc = \frac{y^2}{2}$, bc étant une constante arbitraire. Ayant mené $CP = z$ perpendiculaire à la tangente MP, les triangles semblables & rectangles CPM, Mmn donnent $Mm = dx\sqrt{(pp+yy} : Mn = ydx :: CM = y : CP = z = \frac{y^2}{\sqrt{(pp+yy)}}$; donc $2bz + 2bc = y^2$ & $z = \frac{yy-2bc}{2b}$.

Voici comme on peut prouver que cette équation est au cercle; je tire les lignes CM, Cm (fig. 9), infiniment proches avec les tangentes PM & pm, cette derniere coupe en t le prolongement de PM, je mene aussi les lignes CPT, Cgp, la premiere perpendiculaire sur MP, & la seconde perpendiculaire sur mp & supposant que Mc, mc sont aussi perpendiculaires aux tangentes dont on vient de parler; il est visible que Mc sera le rayon osculateur de la courbe. Enfin du centre C ayant décrit l'arc Mn, je fais $CM = y$, $nm = dy$; donc $CP = z = \frac{yy-2bc}{2b}$. Mais gp est la

(*) Si l'on avoit quelque peine à trouver cette intégrale, on n'auroit qu'à différencier $\frac{-bpp}{\sqrt{(pp+yy)}}$, aussi bien que $\frac{p}{\sqrt{(pp+yy)}}$, & l'on verroit facilement que la différentielle de la premiere quantité est $= \frac{-bpdp}{\sqrt{(pp+yy)}} - bpd\frac{p}{\sqrt{(pp+yy)}}$.

différentielle de CP; donc $gp = \frac{ydy}{b}$. Faisant MP $= t$, on aura aussi $mp = t$ (car ces tangentes ne peuvent différer que d'une quantité inassignable); faisons de plus $Mm = ds$, & $Mc = R$, rayon osculateur de la courbe. Cela posé, je remarque que les tangentes Mt, mt, sont nécessairement égales, parce que l'arc infiniment petit Mm peut être regardé comme circulaire; donc l'angle Ptp extérieur au triangle Mmt vaut le double de l'angle Mmt : or celui-ci a pour mesure la moitié de Mn, dont l'angle Ptp a pour mesure Mm; donc les triangles tgp, Mcm sont semblables, & donnent $pg : Mm :: tp : Mc$, ou $\frac{ydy}{b} : ds :: t : R = \frac{btds}{ydy}$. Mais à cause des triangles semblables Mmn, CMP, on a $ds : dy :: y : t$; donc $ydy = tds$; donc $R = \frac{btds}{tds} = b$. Ainsi notre courbe a le rayon osculateur constant, propriété qui convient uniquement au cercle; la courbe cherchée est donc un cercle. Pour le déterminer je tire une ligne CD $= \sqrt{2bc}$, & menant à celle-ci une perpendiculaire $Dc = b$, du point c pris pour centre avec le rayon b, je décris un cercle MeD, qui satisfera au problême.

51. PROBLÊME. *Trouver la courbe qui parmi toutes celles de même longueur qui passent par les points a & z, engendrera en tournant autour de l'axe* AB (*fig.* 7) *un solide dont la surface soit un* maximum *ou un* minimum. La propriété commune est $Sdx\sqrt{(1+pp)}$; donc la valeur de la différentielle dA est $= -d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; la formule du *maximum* ou du *minimum* est comme $Sydx\sqrt{(1+pp)}$, la valeur de dB est $= dx\sqrt{(1+pp)} - d. \frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}$; & l'équation de la courbe sera

$b d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = dx\sqrt{(1+pp)} - d.\frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}$ (B);

multipliant par p & intégrant, on aura $a - \frac{b}{\sqrt{(1+pp)}}$ $= \frac{y}{\sqrt{(1+pp)}}$ (*), ou $a = \frac{b+y}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{z}{\sqrt{(1+pp)}}$, en faisant $b+y=z$; donc $p = \frac{\sqrt{(z^2-a^2)}}{a} =$ $\frac{dy}{dx}$; donc $dx = \frac{a\,dz}{\sqrt{(zz-aa)}}$; (parce que à cause de $b+y=z$, l'on a $dy=dz$). Or l'équation $dx =$ $\frac{a\,dz}{\sqrt{(zz-aa)}}$, appartient à la ligne des cosinus hyperboliques, z étant le cosinus hyperbolique; ainsi cette courbe, en tournant autour de l'axe AB, engendrera une surface qui sera un *maximum* lorsque la courbe tournera sa concavité vers AB, mais la surface sera un *minimum*, si la courbe tourne sa convexité à l'axe AB (**).

52. PROBLÊME. *Entre toutes les courbes de même longueur c, & qui passent par les points* A & B *de la ligne horisontale* AB, *trouver celle dont le centre p de grandeur ou de gravité est le plus bas possible, c'est-à-dire, le plus éloigné de la ligne* AB (*fig.* 10). Selon ce qu'on a dit dans la section précédente, en faisant l'élément de la courbe $= ds$, l'ordonnée PM $= y$, $y\,ds$ sera le moment de l'élément mMn, & $\frac{S.\,y\,ds}{c}$ exprimera la distance du centre

(*) On trouvera facilement que cette intégrale est vraie, en faisant attention que $p\,dx = dy$, & en effectuant les différenciations indiquées dans l'équation (B).

(**) Selon ce qu'on dira dans la quatrieme section, *la chaîneté* ou *la catenaire*, est la même que la ligne des cosinus hyperboliques.

de

de gravité de toute la courbe ADB par rapport à l'axe AB. Il eſt donc néceſſaire que $S.\frac{yds}{c}$ ſoit un *maximum*; d'où il ſuit que $S.yds$ ſera auſſi un *maximum*. Mais $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$; ainſi $S.ydx\sqrt{(1+pp)}$ doit être un *maximum*, ce qui a lieu dans la ligne des coſinus hyperboliques. Par conſéquent la courbe cherchée eſt la ligne des coſinus hyperboliques.

53. REMARQUE. Si l'expreſſion $a'A + b'B + c'C$ (A, B, C, déſignant des formules intégrales quelconques a', b', c' des conſtantes) a une valeur de *maximum* dans une courbe P, & que dans la courbe R, A & B aient la même valeur que dans la courbe P; il eſt viſible qu'à cauſe de la partie $a'A + b'B$ qui doit avoir la même valeur dans les deux courbes, l'expreſſion totale $a'A + b'B + c'C$ aura une plus grande valeur dans la courbe P que dans la courbe R; puiſque cette expreſſion eſt un *maximum* dans la premiere, & non dans la ſeconde, ainſi que nous le ſuppoſons. Ce que nous venons de dire du *maximum* doit également s'entendre pour le *minimum*: de ſorte que ſi l'on cherche une courbe qui parmi toutes celles qui ont les propriétés A & B communes, doive avoir pour C un *maximum* ou un *minimum*, on multipliera A, B, C par des conſtantes arbitraires, & l'on prendra la différentielle de leur ſomme, qu'on égalera à 0, en prenant toujours cette différentielle par la méthode des variations. On fera bien de comparer ceci avec ce que nous avons dit ſur les *maxima* & les *minima* dans le calcul différenciel.

54. PROBLEME. *Entre toutes les courbes de même longueur & de même aire qui paſſent par les points a & z (fig. 7), trouver celle qui, en tournant autour de l'axe* AB, *engendrera un ſolide dont la valeur ſoit un* maximum *ou un* minimum. Les propriétés communes ſont $S dx\sqrt{(1+pp)}$, $S.ydx$, & l'expreſſion du *maximum* ou du *minimum* eſt comme $Syydx$. Leurs valeurs différentielles ſont $-d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, dx, $dx.2y$; d'où en ſuppoſant une des conſtantes, dont on a parlé ci-devant

(53) = 1, & les deux autres égales l'une à c & l'autre à b, on tire $c\,d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = b\,dx + 2y\,dx$, ou $\frac{c\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = b\,dx + 2y\,dx$. Multipliant par p, écrivant dy au lieu de $p\,dx$ & intégrant, on a $\frac{-c}{\sqrt{(1+pp)}} = a + by + yy$; d'où l'on tire $c^2 = (a + by + yy)^2 . (1 + pp)$, $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{[cc-(a+by+yy)^2]}}{a+by+yy}$, & $dx = \frac{dy\,(a+by+yy)}{\sqrt{[cc-(a+by+yy)^2]}}$. A cause que le radical doit avoir le signe $\pm$, l'un de ces signes indique le *maximum* & l'autre le *minimum*; & parce que aucune abscisse déterminée ne s'y trouve, c'est une marque que toute portion de la courbe a la même propriété. Il y a trois constantes a, b, c dans l'équation, & l'on doit en ajouter une quatrieme dans l'intégration. Par la déterminaison de ces constantes, nous pouvons obtenir non-seulement que la courbe passe par deux points donnés a & z, mais encore remplir deux autres conditions, comme, par exemple, qu'elle passe par deux autres points Q & T.

Application du Calcul des variations à la Méchanique.

Parmi tous les problêmes de Méchanique qu'on peut résoudre par le Calcul des variations, nous nous bornerons aux deux suivans; ce qui suffira pour donner une idée de la maniere dont on peut appliquer ce Calcul aux sciences Physico-Mathématiques.

55. PROBLEME I. *Déterminer la nature de la brachystochrone ou la courbe de la plus vîte descente.* Soit AM (fig. 11) la brachystochrone, AP = x, PM = y, Mm = $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\,\sqrt{(1+pp)}$. On sait par la Méchanique élémentaire qu'un corps mis

en mouvement par l'action de la gravité, acquiert en parcourant l'arc A M, une vitesse désignée par la racine de la hauteur verticale M P de cet arc ; de plus cette vîtesse ne pouvant que varier infiniment peu le long de l'arc infiniment petit M m, on pourra la supposer uniforme le long de cet arc. Mais dans le mouvement uniforme le tems est comme le quotient de l'espace divisé par la vîtesse ; ainsi en désignant par t le tems le long de A M, l'on aura $dt = \frac{ds}{\sqrt{y}} = \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$ & $t = S.\ \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$, quantité qui doit être un *minimum*. Or en s'y prenant comme ci-dessus (46), on verra que la courbe cherchée est une cycloïde ; ainsi la brachystochrone est une cycloïde.

Si l'on veut que la courbe A M soit terminée à un plan vertical B D perpendiculaire à la ligne des abscisses, l'abscisse correspondante A B n'aura aucune variation. En faisant la partie absolue = o (voyez le n°. 15), ou $\frac{p}{\sqrt{y}.\sqrt{(1+pp)}} = 0$, l'on aura $p = \frac{dy}{dx} = 0$, c'est-à-dire, que l'angle de la courbe avec l'axe des abscisses, ou plutôt avec une parallele à cet axe, doit être nul, & la courbe doit être parallele à l'axe des abscisses, & par conséquent perpendiculaire au plan vertical dont on vient de parler. Comme la variation entiere doit = o, l'on peut faire la partie absolue = o ; & de-là il suit que A étant l'origine de la brachystochrone, A B sera la demi-circonférence du cercle générateur. A l'égard du point A que nous supposons donné, l'ordonnée correspondante ne doit subir aucune variation ; & ce n'est qu'au point correspondant à l'abscisse A B qu'on a l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$.

REMARQUE. On a supposé dans la résolution du problême précédent que la courbe de la plus vîte descente étoit à simple courbure ; mais on n'en doutera

S 2

nullement quand on aura lû la solution du problême suivant.

56. PROBLEME II. *Déterminer la courbe de la plus vîte descente, sans supposer cette courbe à simple courbure.* Comme on est censé ne pas connoître cette courbe, nous la supposerons à double courbure, x étant l'abscisse verticale, y & z les co-ordonnées horisontales. Donc $\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=ds$, sera l'élément de l'arc de cette courbe, $\frac{ds}{\sqrt{x}}$ l'élément du tems, & t sera $=$ S. $\frac{ds}{\sqrt{x}}$. Mais en faisant $p=\frac{dy}{dx}$, ou $dy=pdx$ & & $dz=p'dx$, on a $t=$ S. $dx\,\frac{\sqrt{(1+pp+p'p')}}{\sqrt{x}}$; donc en faisant $V=\frac{\sqrt{(1+pp+p'p')}}{\sqrt{x}}$, on aura dV

$$=\frac{-1.dx}{2x\sqrt{x}}\sqrt{(1+pp+p'p')}+\frac{pdp}{\sqrt{x}.\sqrt{(1+pp+p'p')}}$$

$+\frac{p'dp'}{\sqrt{x}.\sqrt{(1+pp+p'p')}}$; or (32) dV est $=$

$$\begin{array}{l} M\,dx+N\,dy+P\,dp+\&c. \\ \qquad\quad +N'dz+P'dp'+\&c. \end{array}$$

Donc ici $N=0$; $P=\frac{p}{\sqrt{x}.\sqrt{(1+pp+p'p')}}=$ $\frac{dy}{\sqrt{x}.dx.\sqrt{(1+pp+p'p')}}=\frac{dy}{\sqrt{x}.ds}$; $Q=0$; &c. On a aussi $N'=0$; $P'=\frac{dz}{\sqrt{x}.ds}$; $Q'=0$; &c. mais (par l'endroit cité) on doit avoir les deux équations $N-\frac{dP}{dx}+\&c.=0$; $N'-\frac{dP'}{dx}+\&c.=0$; donc à cause de $N=0$, $N'=0$, $Q=0$, $Q'=0$, &c. on aura (en

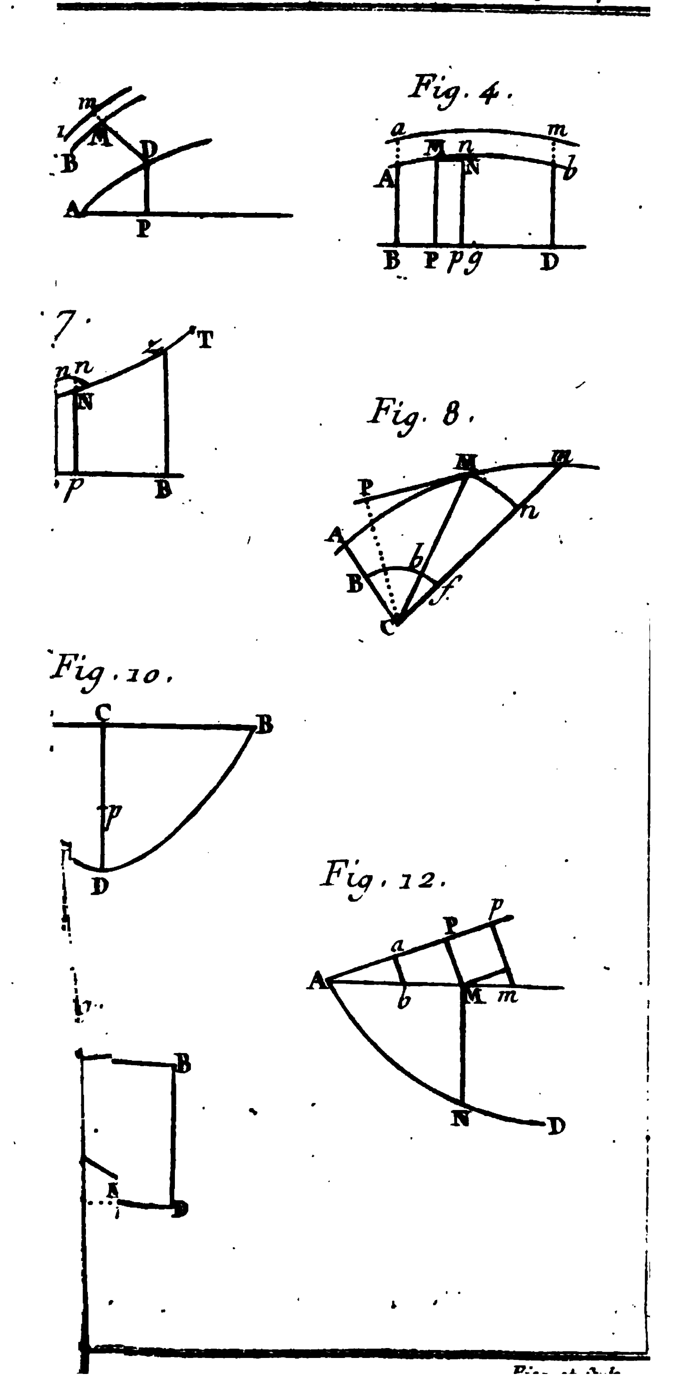
multipliant par dx) $- dP = 0$, & $- dP' = 0$, ou $- d. \frac{dy}{\sqrt{x.ds}} = 0$, & $- d. \frac{dz}{\sqrt{x.ds}} = 0$. En intégrant ces équations, après avoir changé leurs signes, il vient $\frac{dy}{\sqrt{x.ds}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; $\frac{dz}{\sqrt{x.ds}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$; a & b sont des constantes arbitraires.

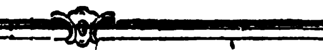
Si l'on divise la premiere intégrale par la seconde, le premier membre de la premiere par le premier de la seconde, le second par le second, l'on aura $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, équation à ligne droite (*) qui fait connoître que la courbe de projection sur le plan de la base (c'est ici le plan des z & des y), est une ligne droite, & qu'ainsi la courbe cherchée AND (fig. 12) est à simple courbure. Pour déterminer sa nature, rapportons-là à deux co-ordonnées, dont l'une soit x & l'autre u; en supposant $AP = z$, PM (perpendiculaire à AP) $= y$ & $AM = u$, nous aurons (A) $u = \sqrt{(y^2 + z^2)}$. Mais $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, ou $dy = \frac{dz\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$; donc $y = \frac{z\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. En substituant cette valeur de y dans l'équation (A), on trouvera aisément $z =$

(*) Soit (fig. 12) l'abscisse $AP = z$, l'ordonnée $PM = y$, ayant mené pm infiniment proche de PM, & la ligne Mn parallele à AP, si l'on fait $Aa = \sqrt{a}$, $ab = \sqrt{b}$, & que l'on ait toujours $Aa : ba :: dz : dy :: Mn : mn = Pp$, il est visible que l'on aura $z : y :: \sqrt{a} : \sqrt{b}$, & $y. \sqrt{a} = z. \sqrt{b}$, équation à une ligne droite. Ainsi les MN (x) qui doivent être perpendiculaires au plan des y & des z (comme nous le supposons ici), seront dans un même plan.

$\frac{u\sqrt{a}}{\sqrt{(a+b)}}$; $y = \frac{u\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}$; $dy = \frac{du\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}$. L'on a encore l'élément de l'arc $= ds = \sqrt{(du^2 + dx^2)}$; & enfin $\frac{dy}{ds.\sqrt{x}} = \frac{du\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}.\sqrt{x}.\sqrt{(dx^2+du^2)}}$ $= \frac{1}{\sqrt{a}}$; donc (en quarrant & ôtant les fractions) $abdu^2 = (ax + bx)dx^2 + (ax + bx)du^2$; $(ax + bx)dx^2 = du^2(ab - ax - bx)$; $xdx^2 = du^2\left(\frac{ab}{a+b} - x\right)$; d'où $\left(\text{en faisant } g = \frac{ab}{a+b}\right)$ il est aisé de tirer $du = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(g-x)}} = \frac{dx.x}{\sqrt{(gx-xx)}}$, équation à une cycloïde, dont le diamètre du cercle générateur est $= g$.

Si le premier point A de la brachystochrone (fig. 11) est supposé donné, & que le mobile doive arriver dans le moindre tems possible à un plan horisontal Cn, on fera les parties absolues égales à o, ce qui donnera P = o & P' = o, c'est-à-dire, $\frac{dy}{\sqrt{x}.ds} = 0 = \frac{1}{\sqrt{a}}$; & $\frac{dz}{\sqrt{x}.ds} = \frac{1}{\sqrt{b}} = 0$; donc $a = \infty$ & $b = \infty$; donc $g = \frac{ab}{a+b} = \infty$; c'est-à-dire, que le diamètre du cercle générateur doit être infini. Donc l'arc fini AM de la brachystochrone devient une ligne verticale AC; ainsi le corps A arrivera au plan Cn dans le moindre tems possible, en suivant une ligne verticale AC, ce qui est évident.


Fig. 4.
7.
Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 12.



SECTION QUATRIEME.

PROBLEMES

PHYSICO-MATHÉMATIQUES.

Nous nous proposons ici principalement de faire des applications du Calcul différenciel & du Calcul intégral aux problêmes Physico-Mathématiques ; ce qui ne nous empêchera pas d'en résoudre plusieurs sans employer ces Calculs. Mais quoique nous supposions nos Lecteurs instruits des principes généraux de la Méchanique, nous croyons devoir rapporter le fameux principe de M. d'Alembert.

1. Principe général du mouvement. *De quelque maniere que plusieurs corps viennent à changer leurs mouvemens actuels, si l'on conçoit que le mouvement que chaque corps auroit dans l'instant suivant, s'il devenoit libre, soit décomposé en deux autres, dont l'un soit celui qu'il aura réellement après le changement ; le second doit être tel, que si chacun des corps n'eût eu d'autre mouvement que ce second, tous les corps fussent demeurés en équilibre.* Ce principe est évident ; car si en vertu des seconds mouvemens les corps ne restoient pas en repos, les premiers mouvemens ne seroient pas ceux que les corps auroient après le changement, puisqu'ils seroient nécessairement altérés par les seconds.

Toute la doctrine du mouvement est appuyée sur les équations dont nous allons parler. Si x représente l'espace décrit d'un mouvement variable pendant le tems t, dx représentera l'espace infiniment petit décrit pendant le tems infini-

ment petit dt, pendant lequel la vîteſſe v du mobile eſt cenſée uniforme. Mais alors $dx = vdt$; donc $v = \frac{dx}{dt}$, premiere équation fondamentale. Dans un mouvement uniformément accéléré la vîteſſe acquiſe à la fin du tems t doit évidemment être égale au produit de la force accélératrice conſtante p par le tems t; donc $v = pt$, & $p = \frac{v}{t}$. Mais ſi cette force eſt variable, on peut néanmoins la conſidérer comme conſtante pendant le tems dt, pendant lequel elle produit la vîteſſe dv; donc $p = \frac{dx}{dt}$, ou $dv = pdt$, ſeconde équation fondamentale des mouvemens variés. De l'équation $dx = vdt$, on tire $dt = \frac{dx}{v}$. Subſtituant cette valeur dans l'équation $dv = pdt$, on a $pdx = vdv$. Il eſt évident que lorſque le mouvement eſt retardé, on doit donner le ſigne — à dv. L'équation $v = \frac{dx}{dt}$, donne $dv = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Subſtituant cette valeur dans l'équation $pdt = \pm dv$ (on met le ſigne — pour le mouvement retardé), on a $pdt = \pm d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Si on ſuppoſe dt conſtant, il vient $pdt = \pm \frac{ddx}{dt}$, ou $pdt^2 = \pm ddx$.

2. LORSQUE deux corps qu'on ſuppoſe ſans aucun reſſort viennent à ſe rencontrer en allant du même côté, la quantité de mouvement qui ſe trouve dans les deux corps, ſe diſtribue de maniere qu'il en réſulte la même vîteſſe

pour tous les deux. Car celui qui va plus vîte agit ſur l'autre, ſeulement juſqu'à ce que celui-ci, ayant acquis autant de vîteſſe qu'il en reſte au premier, ne fait plus obſtacle à ſon mouvement.

Mais ſi des corps élaſtiques ſe rencontrent, pendant qu'ils ſe choquent le choc eſt employé à plier leurs parties, à tendre leur reſſort, & ces corps ne demeurent appliqués l'un contre l'autre que juſqu'à ce que leur reſſort les ſépare en ſe débandant, & les faſſe éloigner avec autant de vîteſſe qu'ils s'approchoient : car la vîteſſe reſpective étant la ſeule cauſe qui ait bandé leur reſſort, le débandement de ce reſſort doit reproduire la même vîteſſe reſpective qui avoit lieu auparavant. M. de Maupertuis entend par *quantité d'action*, le produit de la maſſe d'un corps par ſa vîteſſe & l'eſpace parcouru, & ſelon ce Savant, on doit admettre dans la nature le principe ſuivant.

PRINCIPE. *Lorſqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action qui le produit eſt la plus petite poſſible.*

3. PROBLEME. *Soient* A & B *deux corps ſans reſſort qui vont du même côté, la vîteſſe du corps* A *étant* V, *celle du corps* B *étant* $= u < V$, *de maniere que le corps* A *aille choquer le corps* B, *on demande leur vîteſſe commune* x *après le choc.* La vîteſſe perdue par le corps A ſera $V - x$ la vîteſſe gagnée par le corps B étant $x - u$. Les eſpaces parcourus en tems égaux par ces vîteſſes, étant entr'eux comme ces vîteſſes, la quantité d'action employée par le corps A ſera comme $A. (V - x)^2$, & la quantité d'action gagnée par le corps B ſera comme $B. (x - u)^2$; la quantité totale d'action ſera comme $A. (V^2 - 2Vx$

$+ xx) + B.(xx - 2ux + uu)$. Si l'on ſuppoſe que cette quantité eſt un *minimum*, on différenciera cette ſomme, & l'on ſuppoſera la différence $= 0$; donc on aura $A.(-2Vdx + 2xdx) + B.(2xdx - 2udx) = 0$, d'où l'on tire $2Ax + 2Bx = 2AV + 2Bu$, ou $x = \frac{AV + Bu}{A + B}$, c'eſt-à-dire, que la vîteſſe commune après le choc, ſera égale à la ſomme des mouvemens diviſée par la ſomme des maſſes.

COROLLAIRE. Si le corps B alloit dans un ſens oppoſé au corps A, il ſuffiroit de conſidérer u comme une quantité négative, & dans ce cas l'on auroit $x = \frac{AV - Bu}{A + B}$, c'eſt-à-dire, que la vîteſſe commune après le choc, ſeroit égale à la différence des mouvemens diviſée par la ſomme des maſſes. Si, dans ce dernier cas, $AV = Bu$, on aura $x = 0$, c'eſt-àdire, que ſi deux corps ſuppoſés ſans reſſort vont ſe choquer directement avec des mouvemens oppoſés & égaux, ils reſteront en repos après le choc. Si $u = 0$, on aura $x = \frac{AV}{A + B}$, c'eſt-à-dire, ſi le corps B eſt ſuppoſé en repos avant le choc, la vîteſſe commune après le choc, ſera égale au mouvement du corps choquant diviſé par la ſomme des maſſes.

4. PROBLÊME. *Si le corps* A *élaſtique va choquer le corps* B *auſſi élaſtique & qui ſe meut dans le même ſens, de maniere que la vîteſſe de* A *ſoit* $=$ V *& la vîteſſe de* B $= u$, *on demande la vîteſſe de chaque corps après le choc?* Soit x la vîteſſe

de A & y la vîtesse de B après le choc, la vîtesse perdue par A sera $V - x$, & la vîtesse gagnée par B sera $y - u$. La quantité d'action employée dans le changement qui arrive dans la nature à l'occasion du choc, sera comme $A.(V^2 - 2Vx + xx) + B.(y^2 - 2yu + uu)$. En supposant que cette quantité est un *minimum*, on aura $A.(-2Vdx + 2xdx) + B.(2ydy - 2udy) = 0$ (C). Mais dans les corps à ressort parfait tels que nous les supposons ici, la vîtesse respective après le choc étant la même qu'avant le choc, on a $V - u = y - x$, ou $y = V - u + x$, & $dy = dx$.

Si on substitue ces valeurs de y & de dy dans l'équation C, on aura en transposant & divisant, $x = \frac{AV - BV + 2Bu}{A + B}$. Mais par l'équation $V - u = y - x$, on a $x = y + u - V$, & $dx = dy$; en substituant ces valeurs de x & de dx dans l'équation C, on trouve facilement $y = \frac{2AV - Au + Bu}{A + B}$. Si on supposoit $u = 0$, l'on auroit $x = \frac{AV - BV}{A + B}$ qui deviendroit $= 0$, en supposant $A = B$, c'est-à-dire, qu'alors le corps A resteroit en repos après le choc; mais on auroit $y = \frac{2AV}{A + B}$, qui deviendroit $y = \frac{2AV}{2A} = V$, en faisant $A = B$; donc dans ce cas le corps B se mouveroit avec la vîtesse V du corps A avant le choc. Si l'on avoit $A < B$, le corps

A seroit repoussé & rebrousseroit chemin. Si B alloit au-devant du corps A, on feroit u négatif, & l'on auroit par-là la valeur de x & de y pour ce cas.

REMARQUE. Si on multiplie A par x^2 & B par y^2, on aura en substituant les valeurs de x & de y trouvées ci-dessus, on aura, dis-je, $A.x^2 + B.y^2 = A.V^2 + Bu^2$; c'est ce qu'on appelle, *la conservation des forces vives* (*).

5. PROBLEME. *Si un rayon de lumiere doit passer de a en b (fig. 1) en traversant les milieux m & n séparés l'un de l'autre par la surface c g, on demande dans quel rapport seront les sinus d'incidence & de réfraction, en supposant que cet effet doive être produit par la moindre quantité d'action?* Soit désignée par m la vîtesse de la lumiere dans le milieu m, & par n la vîtesse de la même lumiere dans le milieu n, soit fait de plus $ap = x$, $pb = y$, $pc = z$, $pg = s$, $ac = f$, $bg = h$; $mx + ny$ sera un *minimum*, aussi-bien que $m\sqrt{(zz + ff)} + n\sqrt{(ss + hh)}$. Donc puisque f & h sont constans à cause que la position des points a & b est déterminée par rapport à la surface cg, on aura $\frac{mzdz}{\sqrt{(zz+ff)}} + \frac{nsds}{\sqrt{(ss+hh)}}$

(*) Il y a des Philosophes qui prétendent que *la force vive*, c'est-à-dire, la force d'un corps en mouvement, doit s'estimer par le produit de la masse multipliée par le quarré de la vîtesse, tandis que la force d'un corps qui presse un autre corps, ou un plan immobile sans lui communiquer de mouvement, & qu'on nomme *force morte*, doit s'estimer par le produit de la masse & de la simple vîtesse; mais les François & les Anglois soutiennent que les forces vives doivent se mesurer par le produit de la masse & de la vîtesse.

$= 0$. Mais à cauſe de cg conſtant, on a $dz = -ds$; donc en remettant les valeurs des radicaux & diviſant, $\frac{mz}{x} - \frac{ns}{y} = 0$, ou $\frac{mz}{x} = \frac{ns}{y}$; d'où l'on tire $\frac{z}{x} : \frac{s}{y} :: n : m$. Mais en ſuppoſant le rayon $= 1$, on a $x : z :: 1 :$ ſin. $pac = \frac{z}{x}$, & $y : s :: 1 :$ ſin. $pbg = \frac{s}{y}$. De plus en tirant la ligne MpN perpendiculaire ſur cg, l'angle pac eſt $= apM$ angle d'incidence, & l'angle pbg eſt $= bpN$ angle de réfraction; donc le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus de l'angle de réfraction en raiſon inverſe de la vîteſſe qu'a la lumiere dans chaque milieu.

6. COROLLAIRE. Si on ſuppoſe que la vîteſſe de la lumiere dans différens milieux ſuive la raiſon de leur denſité, le ſinus d'incidence ſera à celui de réfraction en raiſon inverſe des denſités des milieux, & par conſéquent en raiſon conſtante.

7. PROBLEME. *Etant donnée la poſition d'un plan horiſontal* BD, *& du plan vertical* BA (*fig.* 2) *mener par un point donné* D, *le plan* DM *par lequel un corps* M *puiſſe parvenir du plan vertical* BA, *au point donné* D *dans le moindre tems poſſible.* Il eſt évident que le tems de la deſcente dépend de l'eſpace à parcourir & de la vîteſſe du mobile. Si l'eſpace DN eſt plus petit, la vîteſſe ſera plus petite; ſi le plan DA eſt plus long, la vîteſſe ſera plus grande, mais auſſi l'eſpace ſera plus grand. Il eſt donc évident qu'il y un plan moyen DM, le long duquel le tems doit être le plus petit poſſible.

Soit $BD = a$, $BM = x$. On aura $DM = \sqrt{(aa + xx)}$; la vîtesse acquise par le corps M en venant de M en D sera comme la racine de la hauteur du plan MD, ainsi qu'on le démontre en méchanique, c'est-à-dire, sera exprimée par $\sqrt{x}$, & cette vîtesse suffiroit pour faire décrire d'un mouvement uniforme au corps M un espace double de MD dans le tems employé à parcourir MD, & de plus les espaces parcourus par un mouvement uniforme sont comme le produit de la vîtesse & du tems; c'est pourquoi le quotient de l'espace, divisé par la vîtesse, représente le tems : donc le tems employé à parcourir DM sera $= \frac{2\sqrt{(aa + xx)}}{\sqrt{x}}$. Ce tems devant être un *minimum*, son quarré $\frac{4aa + 4xx}{x}$ le sera aussi ; donc en différenciant on aura $\frac{8xxdx - 4aadx - 4xxdx}{x^2} = 0$, ou $4xx = 4aa$, ou $x = a$, ou $BM = BD$; donc le plan MD doit faire un angle de 45° avec le plan horisontal BD.

Mais si on demandoit de mener le plan MD par lequel un corps puisse parvenir du point donné M au plan horisontal BD dans le moindre tems possible. En faisant $BM = a$ & $BD = x$, le tems cherché sera $\frac{2\sqrt{(aa + xx)}}{\sqrt{a}}$, son quarré sera $= \frac{4a^2 + 4xx}{a}$, qui doit être un *minimum* ; donc on aura $8axdx = 0$, & $x = BD = 0$; donc

le point D tombera ſur le point B, & le plan de la plus prompte deſcente ſera le plan vertical MB, ce qui d'ailleurs eſt évident.

8. PROBLÊME. *Si un globe parfaitement élaſtique (on doit dire la même choſe de la lumiere) doit arriver de m en n par le chemin le plus court, après avoir été réfléchi quelque part par le plan horiſontal p*L, *déterminer l'angle de réflexion (fig. 3)*. Suppoſons que le point de réflexion eſt ſitué en D, & qu'on a tiré les lignes que l'on voit dans la figure, faiſons de plus $nh = b$, $gp = m\text{L} = a$, $\text{DL} = x$, $h\text{L} = c$. On aura $\text{D}h = c - x$; on aura encore $m\text{D} + n\text{D} = \sqrt{(aa + xx)} + \sqrt{(bb + cc - 2cx + xx)}$, qui doit être un *minimum*; donc en différenciant, diviſant par dx, égalant le réſultat à zéro, ôtant les fractions & tranſpoſant, on trouvera (A)

$x\sqrt{(bb + cc - 2cx + xx)} = \overline{c - x}.\sqrt{(aa + xx)}$, ou $\text{DL} \times n\text{D} = \text{D}h \times m\text{D}$; donc $\text{DL} : m\text{D} :: \text{D}h : n\text{D}$. Mais $\text{D}h : n\text{D} :: \text{D}p : g\text{D}$; donc les triangles $md\text{L}$, $\text{D}pg$ ſont ſemblables; ils ſont de plus égaux à cauſe de $m\text{L} = gp$; ainſi gp & $m\text{L}$ ſont ſinus d'angles égaux, en prenant $\text{D}m$ & $\text{D}g$ pour rayons; donc $m\text{D}f$ & $g\text{D}f$ compléments d'angles égaux, ſont égaux; donc pour qu'un corps élaſtique (on doit dire la même choſe de la lumiere) parvienne de m en n par le chemin le plus court, après avoir été réfléchi par le plan horiſontal $h\text{L}$, l'angle de réflexion $g\text{D}f$ doit être égal à l'angle d'incidence $m\text{D}f$.

Pour déterminer le point D, on quarrera l'équation (A), & effectuant les multiplications, réduiſant & tranſpoſant, on aura $a^2x^2 - b^2x^2 -$

$2a^2cx = -aacc$, & par conséquent $x^2 - \frac{2aacx}{aa-bb} = \frac{-aacc}{aa-bb}$. Cette équation, étant résolue par la méthode du second degré, donne $x = \frac{(a \pm b)ac}{aa-bb} = \frac{ac}{a \mp b}$. Prolongez mL jusques à ce que HL $= m$L $+ nh$, & ayant tiré Hh, menez-lui par le point m la parallele mD, le point D sera le point de réflexion ; car on aura HL : hL :: mL : LD, ou $a + b : c :: a : x$ = DL. Si on suppose $a = b$, on aura $x = \frac{c}{2}$.

9. PROBLÊME. *Etant donnée la position d'une piece d'argent* D *sur le plan horisontal* BD, *trouver sur la verticale* Bm *la situation d'un flambeau, de maniere que la piece* D *soit le plus éclairée qu'il est possible* (*fig.* 4). Du point D comme centre avec le rayon DB décrivez l'arc BM ; & supposant que le point A est le point cherché, on tirera la ligne AD, & par le point M, où cette ligne rencontre l'arc BM, on menera MN perpendiculaire sur BD ; cette ligne sera le sinus de l'angle BDA. Soit maintenant BD $= a$, BA $= x$, on aura AD $= \sqrt{(aa + xx)}$. Mais à cause des triangles semblables BAD & NMD, $\sqrt{(aa + xx)} : x :: a : \text{MN} = \frac{ax}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Supposons maintenant que la vivacité de la lumiere du flambeau, lorsque cette lumiere éclaire la piece D perpendiculairement soit $= 1$; cette force sera à la force de la lumiere qui éclaire la piece dans une situation oblique & à la même distance, comme le sinus total est au sinus de l'angle d'obliquité.

d'obliquité ADB (*) ou comme DM = BD = a: MN = $\frac{ax}{\sqrt{(aa+xx)}} :: 1 : \frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}$. De plus sous le même angle d'obliquité ADB, la force de la lumiere qui viendroit de M est à la force de la lumiere qui partiroit de A en raison inverse des quarrés des distances, ou comme $\frac{1}{\overline{MD}^2} : \frac{1}{\overline{AD}^2} :: \frac{1}{aa} : \frac{1}{a^2+x^2} :: \frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}} : \frac{aax}{(a^2+x^2)\sqrt{(aa+xx)}}$, en multipliant l'antécédent & le conséquent par $\frac{aax}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Maintenant $\frac{aax}{(a^2+xx)\sqrt{(aa+xx)}}$ doit être un *minimum*; donc en faisant $\sqrt{(aa+xx)} = y$, $\frac{aa\sqrt{(y^2-aa)}}{y^3}$ sera un *minimum*. Si on égale à o la différentielle de cette quantité, on aura (en ôtant les fractions, & faisant les opérations ordinaires) l'équation $3a^2 = 2y^2 = 2aa + 2xx$, d'où l'on tire $aa = 2xx$. C'est pourquoi, pour avoir la position du flambeau, il faut faire un angle ADB de 45°, mener la ligne AD, & par le point M où cette ligne rencontre l'arc BM, tirer Mm perpendiculaire sur AB; le point m sera le point cherché: car on aura mB = MN

(*) Car ayant mené DF perpendiculaire sur AP & infiniment petite, les triangles rectangles DPF, ADB, dont les angles en P & D sont censés égaux, donnent DP : DF :: $\sqrt{(aa+xx)} : x$. Mais DF représente la quantité de lumiere qui illumine DP; & cette quantité de lumiere est ce que nous entendons ici par la force de la lumiere.

& $\overline{MD}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{ND}^2 = 2.\overline{MN}^2 = 2xx$; donc $Bm = x$.

10. PROBLÊME. *Etant donné l'angle d'élévation* FAM *d'un mortier situé en* A, *avec la force de la poudre, déterminer la plus grande hauteur* DH *à laquelle une bombe puisse parvenir.* (*fig.* 5). L'inclinaison du mortier par rapport à l'horison AM étant connue avec la force de la poudre, on connoît la portée horisontale AM (*); donc dans le triangle FAM rectangle en M on connoît un côté MA, l'angle A & l'angle M, & par conséquent aussi l'angle F; ainsi on connoîtra aisément la ligne de chûte MF. Soit maintenant $AM = a$, $MF = b$, $AD = x$, les triangles semblables ADn, AMF donnent $a : b :: x : Dn = \frac{bx}{a}$; donc $\overline{An}^2 = xx + \frac{bbxx}{aa} = \frac{aaxx}{aa} + \frac{bbxx}{aa}$, & $An = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a}$.

Ayant mené les lignes PH, mM paralleles à AF, tangente de la parabole AM, ces lignes seront des ordonnées au diamètre Am, & par la nature de cette courbe on aura $\overline{mM}^2 = \overline{AF}^2 = (aa+bb) : \overline{PH}^2 = \overline{An}^2 = \frac{xx(aa+bb)}{aa} :: Am = FM = b : AP = nH$; donc en multipliant les termes de la premiere raison par a^2 & les divisant par $aa+bb$, on aura $aa : xx :: b : nH = \frac{bx^2}{aa}$; donc $HD = Dn - Hn = \frac{bx}{a}$

(*) Voyez ce que nous avons dit sur le jet des bombes dans la seconde édition de nos Institutions Mathématiques.

$-\frac{bx^2}{aa} = \frac{abx - bx^2}{aa}$, qui doit être un *maximum* ; donc $\frac{abdx - 2bxdx}{aa} = 0$; donc (en multipliant par aa, divisant par bdx & transposant.) $a = 2x$, & $x = \frac{a}{2}$. C'est pourquoi si on prend $AD = \frac{AM}{2}$, & qu'on mène la perpendiculaire DH jusqu'à la rencontre de la parabole ; cette ligne déterminera le point H de plus grande élévation. On ne fait pas attention ici à la résistance de l'air.

COROLLAIRE. Puisqu'on vient de trouver $HD = \frac{abx - bx^2}{aa}$, en substituant $\frac{a}{2}$ au lieu de x, on aura $HD = \frac{b}{4}$.

11. PROBLÊME. *Soit un vase* CBD (*fig.* 6), *tel qu'ayant pratiqué un orifice* B *d'un très-petit diamètre, la liqueur parcourt dans ce vase des espaces égaux en tems égaux, on demande la nature de la courbe* DMB *qui par sa révolution autour de l'axe* AB, *a produit le vase* DBC. Soit $BA = a$, $AP = x$, $Pp = dx$, si l'on conçoit la liqueur partagée en une infinité de tranches telles que $MmNn$, dont l'épaisseur soit la même, chaque tranche parcourra, en descendant l'espace dx dans le même-tems infiniment petit dt ; ainsi en appellant u la vîtesse de la descente pendant le tems dt, on aura l'espace $dx = udt$ ou $u = \frac{dx}{dt} = c$. De plus les vîtesses d'une liqueur qui

s'écoule par l'orifice B sont proportionnelles aux racines des hauteurs de cette liqueur au-dessus de l'orifice B; donc en supposant que la liqueur soit descendue de A en P, la vîtesse d'écoulement sera comme $\sqrt{(a-x)}$; donc on aura $\frac{dx}{dt} = c : \sqrt{(a-x)} :: bb : y^2$, en faisant AD $= b$ & PM$= y$. En effet les tranches de même épaisseur situées en A & P sont entre elles comme les quarrés des ordonnées correspondantes, & les vîtesses sont en raison inverse de ces quarrés. En faisant $\sqrt{(a-x)} = \sqrt{z}$ & quarrant, la proportion trouvée devient $c^2 : z :: b^4 : y^4$; donc $y^4 = \frac{b^4 z}{c^2} = \frac{1.b^4}{c^2} z = p^3 z$, en faisant $\frac{1.b^4}{c^2} = p^3$. Mais l'équation $y^4 = p^3 z$ désigne une courbe parabolique dont l'ordonnée PM est $= y$, l'abscisse BP $= z$ & le paramètre $= p$; ainsi la courbe cherchée est la premiere parabole du troisieme genre. On peut remarquer que les vîtesses des écoulemens sont d'autant plus grandes que les tranches correspondantes sont plus grandes, & que les vîtesses avec lesquelles la liqueur s'écoule peuvent varier, quoique $\frac{dx}{dt}$ qui représente la vîtesse uniforme avec laquelle la liqueur s'abaisse aussi-bien que la vîtesse d'écoulement qui répond à la premiere tranche soit constante.

12. COROLLAIRE. Supposant que la liqueur parvienne de A en f dans l'espace de vingt-quatre heures, ayant tiré CF, parallele & égale à Af, divisez-là en douze parties

égales ; ces divisions indiqueront les heures, & l'on aura ainsi une espece d'horloge.

Il faut prendre Af un peu plus grande que AB, afin d'éviter l'irrégularité qui a ordinairement lieu vers la fin de l'écoulement, & qui vient principalement d'une espece d'entonnoir qui se forme à la surface de la liqueur ; ainsi il faut prendre Bf, de maniere que le point f soit au-dessus du point de l'axe A B auquel se forme cet entonnoir, ce que l'expérience indiquera facilement.

13. PROBLEME. *Etant donnée la gravité spécifique d'un liquide de l'eau, par exemple, trouver la gravité spécifique d'un solide plus léger, tel qu'étant plongé dans le liquide & dans une situation non naturelle, la force qui le retient dans cette situation soit la plus grande possible.* Soit un cylindre homogène A B (fig. 7) plongé obliquement par sa partie MB dans l'eau DCgf; la force qui retient le cylindre dans cette situation doit vaincre le poids de la partie supérieure M A & la force avec laquelle l'eau fait effort pour repousser la partie plongée BM.

Soit la gravité spécifique de l'eau $= a$, la gravité spécifique du solide $= x$, son volume $= b$; son poids sera bx. Or le poids du solide est égal à celui du volume d'eau qui répond à la partie plongée, & lorsque les poids sont égaux, les gravités spécifiques sont en raison inverse des volumes ; donc on aura $a : x :: b : \frac{bx}{a}$, volume d'eau égal au volume de la partie plongée. Donc le volume de la partie MA sera $= b - \frac{bx}{a} = \frac{ab - bx}{a}$, & son poids sera $= \frac{abx - bxx}{a}$.

Mais la force de l'eau qui fait effort pour élever la partie plongée BM, eſt égale à la différence entre le poids du volume d'eau déplacé & celui de la partie BM, c'eſt-à-dire, eſt $= \frac{abx}{a} - \frac{bx^2}{a} = \frac{abx - bxx}{a}$; donc la ſomme de l'effort de l'eau pour déplacer la partie plongée & du poids de la partie MA hors de l'eau, ou la force qui retient le ſolide dans ſa ſituation eſt $= \frac{2abx - 2bxx}{a}$, qui doit être un *maximum*; donc $\frac{2abdx - 4bxdx}{a} = 0$. Donc en ôtant la fraction, diviſant par $2bdx$ & tranſpoſant, $a = 2x$; ainſi $x = \frac{a}{2}$, c'eſt-à-dire, que la gravité ſpécifique du ſolide doit être ſous-double de celle du liquide.

14. PROBLÊME. *Soit* AB *la ſection d'un canal fghn dans lequel on veut bâtir une écluſe* ADB, *on demande l'angle* ADB *que doivent faire les portes* AD, BD *de l'écluſe pour que leur réſiſtance à la preſſion de l'eau ſoit la plus grande poſſible* (*fig.* 8). Sur AB priſe pour diamètre je décris la demi-circonférence AMB, & je tire AM perpendiculaire au prolongement de la porte BD. Cela poſé, la preſſion contre la porte DB eſt comme la longueur DB, la hauteur de l'eau étant la même, de plus la force du bois de la même épaiſſeur eſt d'autant moindre que la longueur de la piece eſt grande; donc la force de la porte BD eſt en raiſon inverſe du quarré de

la longueur BD. Mais ayant tiré le rayon CDm perpendiculaire à AB les triangles rectangles semblables BCD, BMA donnent BD : BC :: AB : MB; donc $\overline{BD}^2 = \frac{\overline{BC}^2 . \overline{AB}^2}{\overline{MB}^2}$; & parce que BC & AB sont constantes, la force de la porte BD sera en raison directe de $\overline{BM}^2$. Or en prenant AB pour rayon, BM sera le sinus de l'angle MAC; donc la force de la porte BD croît comme le quarré du sinus de cet angle. Il faut de plus avoir égard à la grandeur de l'angle ADB qui rend la résistance d'autant plus forte que son sinus augmente. Donc AM. $\overline{BM}^2$ doit être un plus grand. Si AB $= a$, AM $= x$, on aura (par la propriété du triangle rectangle BMA) $\overline{BM}^2 = aa - xx$, & AM. $\overline{BM}^2 = aax - x^3$; donc $aadx - 3x^2dx = 0$; donc $x = \sqrt{\frac{aa}{3}}$. Mais x (sinus de l'angle MDA, en prenant DA pour rayon) est le sinus de l'angle MBA, a étant le rayon; donc si on fait $a = 1$, on aura $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Ainsi l'angle MBA = DAB doit être de 36°, 16', dont le double 72°, 32', étant retranché de 180°, donne 109°, 28' pour la valeur de l'angle ADB.

15. PROBLÊME. *Etant donnée la vîtesse d'un fluide parfait* Mm (*fig.* 9) *qui fait mouvoir une roue, on demande le plus grand effet que cette machine puisse produire dans un tems donné.* Soit p le poids à élever par la machine, f, g, &c. les palettes de la machine, u la vîtesse du fluide, a

le bras CD du poids p, qui eſt attachée à une corde qui paſſe ſur la poulie n, en même-tems qu'elle eſt roulée ſur un cylindre dont CD eſt le rayon. Soit g le point où ſe réuniſſent les forces impulſives qui agiſſent ſur la palette g, & faiſons le bras de lévier Cg (ſur lequel agit le fluide) $= b$. Cela poſé, par les régles de la Méchanique, dans le cas de l'équilibre le produit du poids p par le bras de levier a, doit être égal au produit de l'impulſion du fluide par le bras de levier b. Mais l'impulſion du fluide eſt comme le quarré de ſa vîteſſe ; donc on aura $a.p = b.uu$. Lorſque la machine eſt en mouvement, & que le point g a acquis la vîteſſe x, la force du fluide ſur la palette g eſt comme le quarré de ſa vîteſſe reſpective (par rapport à la palette) ou eſt comme $\overline{u-x}^2$. Donc cette force ſera $b.(u-x)^2$. Pour avoir le moment de cette force, on la multipliera par la vîteſſe x ; ainſi $bx.(u-x)^2$ ſera le moment de cette force, ou l'expoſant de l'effet de la machine : mais ce moment doit être un *maximum* ; donc $bdx(u-x)^2 - 2bxdx(u-x) = 0$. D'où l'on tire $uu - 4ux + 3xx = 0$, ou $(u-3x) \times (u-x) = 0$, c'eſt-à-dire, $u = 3x$, ou $x = \frac{u}{3}$, & $x = u$. L'équation $x = \frac{u}{3}$ donne un plus grand, & $x = u$ donne un moindre. En effet, ſi l'on fait $z = bx(u-x)^2$, z & x peuvent croître depuis o juſqu'à ce que $x = \frac{u}{3}$, & alors $z = \frac{4}{27}buu$; enſuite z diminue juſques à ce que x ſoit $= u$, & alors $z = 0$, ſi on ſuppoſe enſuite x négatif, la valeur de z ira en augmentant négativement juſqu'à l'infini.

REMARQUE I. On voit donc que la machine produira le plus grand effet possible, lorsque la vîtesse du centre des palettes sera égale au tiers de celle du fluide. De plus si dans l'équation $ap=buu$, on met q au lieu de p & $\frac{2}{3}u$ au lieu de u (*), on aura $\frac{4}{9}buu=aq$. Si l'on multiplie ensuite ces équations l'une par l'autre, on aura $\frac{4}{9}a.pb.uu=abquu$, ou $q=\frac{4}{9}p$; c'est-à-dire, que le plus grand poids que la machine puisse élever dans sa plus grande perfection est les $\frac{4}{9}$ de celui qui peut arrêter la machine. Maintenant le bras de levier b de la force motrice est au bras de levier du poids q (on peut concevoir q à la place de p), comme la vîtesse $\frac{u}{3}$ est à la vîtesse $\frac{au}{3b}$ du poids q; donc $\frac{auq}{3b}$, ou son égal $\frac{4aup}{27b}$ sera l'exposant de l'effet de la machine. Cependant par une autre méthode dont nous parlerons dans la suite, on trouve un résultat différent.

REMARQUE II. Un fluide parfait, tel que celui que nous avons supposé dans le problême, est celui dont les molécules frapperoient un plan donné sans s'empêcher les unes les autres. Pour cela il faudroit, qu'après qu'une molécule a donné son coup, elle fût anéantie pour permettre à la suivante de donner aussi le sien. Dans un tel fluide les impulsions perpendiculaires seroient comme

(*) $\frac{2}{3}u$ est la vîtesse respective du fluide par rapport au point g, lorsque la machine produit le plus grand effet possible.

les quarrés des vîtesses multipliés par les surfaces, & les impulsions perpendiculaires seroient aux obliques sous même vîtesse, comme le quarré du sinus total, au quarré du sinus de l'angle d'incidence (*) ; & si les surfaces étoient différentes, les impulsions seroient encore en raison des surfaces. Si les densités étoient différentes, les impulsions suivroient encore la raison des densités. De sorte que les impulsions seroient en raison composée des densités, des surfaces choquées, & des quarrés des sinus d'incidence.

Cependant l'expérience apprend que pour le même fluide la théorie dont on vient de parler est d'autant plus erronnée que l'angle d'incidence est plus petit, & que les impulsions ne suivent pas la raison des surfaces. Au reste, nous reprendrons ailleurs la théorie du choc des fluides.

Lorsqu'un fluide choque un plan dans une direction perpendiculaire, l'adhérence de ses parties entre-elles & par rapport au plan, fait qu'une plus grande masse agit sur le plan, d'où résulte un plus grand effort.

16. PROBLÊME. *Si un poids m (fig. 10) fait effort pour élever un poids x par le moyen des poulies mouflées, les cordons 1, 2, 3, 4, étant supposés paralleles, la machine sans frottement & les cordes parfaitement flexibles, déterminer le rapport de m à x pour que la machine produise le plus grand effet possible.* Nous supposerons les cordons sans pesanteur, aussi-bien

(*) On entend ici par angle d'incidence celui que fait la direction du fluide avec le plan choqué.

que les poulies f & g avec leur chappe, ou si l'on veut avoir égard au poids des poulies inférieures & de leur chappe, nous le supposerons renfermé dans le poids m, nous négligerons de plus le frottement, la roideur des cordes & la résistance de l'air. Cela posé, il est aisé de voir, que par la nature de la machine, le poids x prendra quatre fois plus de vîtesse en montant que le poids m en descendant. D'un autre côté le poids m est soutenu par quatre cordons, tandis que le poids x n'est soutenu que par un seul; donc la résistance du poids x, eu égard aux cordons, sera égale à $4x$, & ayant de plus égard à sa vîtesse, elle sera $= 16x$; ainsi la force qui doit faire descendre le poids m, doit être la même que celle qui mettroit en mouvement une masse $= m + 16x$. Or la force qui doit faire descendre m est l'excès de la pésanteur de m sur $4x$, c'est-à-dire, est $= m - 4x$. Et si l'on fait $= g$ l'espace que fait parcourir la gravité dans un tems déterminé, en faisant $m + 16x : g :: m - 4x : \left(\frac{m - 4x}{m + 16x}\right). g$, on aura la chûte du poids m. Multipliant cette quantité par 4, on aura pour l'élévation du poids x, la quantité $\frac{4g.(m - 4x)}{m + 16x}$.

Maintenant si on veut que l'effet de la machine soit le plus grand possible, il faudra qu'en multipliant la vîtesse trouvée par le poids x qu'on veut élever, le produit $\frac{4mx - 16xx}{m + 16x}. g$ soit un *maximum*. Donc en différenciant égalant à o,

divisant par $4gdx$ & multipliant par $\overline{m+16x}^2$, on aura $m^2 - 8mx - 64x^2 = 0$; donc en résolvant cette équation par la méthode du second degré, $x = m\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{16}\right)$. Ainsi x doit être à m à peu-près comme $1 : 13$, s'il y avoit $2f$ poulies & $2f$ cordons paralleles, en faisant $2f = n$, dans le cas du *maximum*, on auroit $x = m \times \frac{-1+\sqrt{(1+n)}}{n^2}$. Le cordon B$x$ n'est pas compris dans le nombre n.

17. PROBLÊME. *Si deux corps sans ressort a & p viennent à se choquer avec des directions diamétralement opposées & des vîtesses données, on demande le rapport qu'il doit y avoir entre ces corps, pour que le plus fort a communique au plus foible p le plus grand mouvement possible.* Soit V la vîtesse du corps a, u celle du corps p, selon ce que nous avons dit ci-dessus (3), la vîtesse commune après le choc sera $= \frac{aV-up}{a+p}$. Multipliant cette vîtesse par p, on aura la quantité de mouvement cherchée $= \frac{aVp-upp}{a+p}$, qui doit être un *maximum*; donc $[(aaVdp + aVpdp - 2aupdp - 2uppdp - aVpdp + uppdp)] : \overline{a+p}^2 = 0$ (*); donc $aaV - 2aup - 2up^2 + upp = 0$, ou $a^2V - 2aup - up^2 = 0$, ou $p^2 +$

(*) Les deux points indiquent une division.

$2ap = \frac{a^2 V}{u}$; donc $p + a = + \sqrt{\left(\frac{aaV + aau}{u}\right)}$, & $p = - a + a\sqrt{\left(\frac{V+u}{u}\right)}$. Si $V = 3$ & $u = 1$, on aura $p = - a + a.2 = 2a - a = a$, c'est-à-dire, que si la vîtesse du corps le plus fort, ou de celui qui a le plus de mouvement est triple de celle du plus foible, les masses des deux corps doivent être égales pour que le corps a communique au corps p le plus grand mouvement possible. Si $V = 16$ & $u = 2$, on aura $p = 2a$, c'est-à-dire, que dans ce cas p doit être double de a, &c.

18. PROBLÊME. *Etant donnée une piece de bois* AB *supportée par une autre piece verticale* AC, *on demande la position d'un arc-boutant* mn *d'une longueur donnée, pour que la piece* AB *soit la mieux soutenue qu'il est possible* (*fig.* 11). Représentons la force absolue de l'arc-boutant par la ligne mn; comme cette force est oblique à la piece AB, on la décomposera en nA & nD. Cette derniere force soutiendra la piece AB, & si l'on conçoit que cette piece fait effort pour tourner sur le point d'appui A, An = mD sera le bras de levier par le moyen duquel agit la force Dn; donc le produit Dn.An doit être un plus grand. Soit maintenant $mn = a$, Dn = mA $= x$, on aura A$n = \sqrt{(aa - xx)}$, & Dn.A$n = x\sqrt{(aa - xx)}$; donc $dx\sqrt{(aa - xx)} - \frac{xxdx}{\sqrt{(aa-xx)}} = 0$; donc en ôtant la fraction, divisant par dx & réduisant, $aa - 2xx = 0$ ou $aa = \overline{Am}^2 + \overline{An}^2 = 2xx$; donc A$m$

$= An$; ainsi l'angle Amn que doit faire l'arcboutant avec la piece verticale AC doit être demi-droit. Ce problême peut avoir son application dans l'Architecture.

19. PROBLÊME. *Déterminer l'angle* ABC *que les bras d'une ancre doivent faire avec la verge* AB *pour qu'ils puissent s'enfoncer dans le fond de la mer le plus qu'il est possible (fig. 12).* Soit fait $= a$ la force qui traîne l'ancre selon la direction AB, cette force agit obliquement sur le bras BC qui doit s'enfoncer. C'est pourquoi je la décompose en deux autres forces Bn & np, np étant perpendiculaire à BC, & Bp étant $= a$; donc la seule force Bn fait effort pour enfoncer le bras BC : or cette force Bn agit obliquement sur le fond de la mer Mh, & si l'on fait $Cm = Bn$, en décomposant Cm dans les deux forces Ch & mh, cette derniere sera la seule qui produira l'enfoncement. Soit maintenant $np = x$, on aura $Bn = Cm = \sqrt{(aa - xx)}$. Mais les triangles semblables Bpn, Chm donnent $a : x ::$

$$Cm = \sqrt{(aa - xx)} : mh = \frac{x\sqrt{(aa - xx)}}{a},$$

qui doit être un plus grand; donc en différenciant & égalant le résultat à o, $\frac{\sqrt{(aa - xx)}\,dx}{a}$

$$- \frac{x^2 dx}{a\sqrt{(aa - xx)}} = 0.$$ Otant les fractions, réduisant & divisant par dx, $aa - 2xx = 0$, ou $aa = 2xx = \overline{Bn}^2 + \overline{np}^2$; donc $Bn = np$; donc l'angle nBA doit être demi droit. Ce problême peut avoir son application dans la marine.

20. PROBLÊME. *On veut élever un poids* P *par le moyen d'une corde m*M *qui passe sur une poulie de renvoi* C, *& va se rouler sur un cabestan* AB (*fig.* 13), *& l'on demande la plus grande vîtesse possible avec laquelle des hommes appliqués aux barres ou leviers* N *du cabestan peuvent élever le poids* P. Soit $=f$ l'effort dont un homme est capable lorsqu'il ne perd aucune partie de sa force par la promptitude de sa marche, a la vîtesse qui lui fait perdre tout l'exercice de sa force, u la vîtesse actuelle avec laquelle marchent les hommes appliqués aux leviers N, & supposons (ce qui est peut-être bien éloigné de la vérité) que lorsque la marche de l'homme devient double, triple, &c. son effort devient sous-double, sous-triple, &c.(*). En faisant la vîtesse a, est à l'effort f qu'elle détruit, comme la vîtesse u, à l'effort que détruit cette vîtesse, on aura $\frac{fu}{a}$ pour cet effort détruit; donc $f - \frac{fu}{a}$ sera l'effort que feront les hommes pour élever le poids P. Multipliant cet effort par le bras de levier auquel il est appliqué, & que nous désignons par x, on aura $fx - \frac{fux}{a}$ pour le moment de cet effort; & faisant le rayon du cabestan $=b$, nous aurons $P.b = fx - \frac{fux}{a}$, lorsque le mouvement du poids P sera parvenu à

(*) Comme la solution du problême est fondée sur cette supposition, on ne doit pas la regarder comme bien rigoureuse.

l'uniformité. Suppoſons maintenant que les hommes, étant en repos, ils puiſſent ſoutenir la peſanteur du poids P au moyen d'un bras de levier c plus court, nous aurons donc $b.P = c.f = fx - \frac{fux}{a}$; donc $u = a - \frac{ca}{x}$. Faiſant maintenant le bras de levier x eſt à la vîteſſe $a - \frac{ca}{x}$ des hommes, comme le rayon b du cabeſtan eſt à la vîteſſe du poids P, on aura $\frac{ba}{x} - \frac{bca}{xx}$, qui doit être un plus grand; donc $-\frac{badx}{x^2} + \frac{2bcadx}{x^3} = 0$; donc $2c = x$, c'eſt-à-dire, qu'afin que le mouvement du poids devienne le plus grand poſſible, ſuppoſant cependant qu'il eſt uniforme, il faut que le levier x ſoit double de celui avec lequel les hommes en repos peuvent ſoutenir ce poids, & par conſéquent que la force effective employée à élever le poids P ſoit la moitié de celle qui eſt néceſſaire pour le ſoutenir avec le même levier x. Si on ſubſtitue $2c$ au lieu de x dans l'équation $u = a - \frac{ca}{x}$, on aura $u = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$, vîteſſe uniforme des hommes; ainſi leur vîteſſe doit être la moitié de celle qui épuiſeroit leur force. Nous négligerons le poids de la corde, le frottement, &c. Dans les vaiſſeaux on a ſouvent beſoin de lever des ancres d'un très-grand poids, ce qu'on fait par le moyen d'un cabeſtan : ainſi notre

notre problême peut avoir ſon application dans la Marine.

21. PROBLÊME. *Supposons que le corps P puiſſe enlever le corps x par le moyen d'une corde parfaitement flexible & ſans peſanteur qui paſſe ſur une poulie A (fig. 14), déterminer le rapport des poids x & P pour que celui-ci communique au corps x la plus grande quantité de mouvement poſſible, on ſuppoſe que la poulie & l'air ne dérangent nullement l'action du poids P ſur x.* Soit c la vîteſſe que la cauſe de la gravité, agiſſant librement, communique à un corps dans un tems déterminé, par exemple, dans une ſeconde, $c\,dt$ exprimera la vîteſſe communiquée au corps P pendant l'inſtant dt. Suppoſons que du exprime la vîteſſe effective avec laquelle P deſcend pendant le tems dt, $-du$ ſera la vîteſſe (en ſens contraire) du poids x. Maintenant par le principe dont nous avons parlé ci-deſſus (1), en concevant que la vîteſſe du corps P eſt compoſée de la vîteſſe du qu'il conſerve & de la vîteſſe $c\,dt - du$ qu'il doit perdre, $P\,c\,dt - P\,du$ ſera le mouvement que perd le corps P. De même en concevant que la vîteſſe du corps x eſt compoſée de la vîteſſe $-du$ qu'il conſerve, & de la vîteſſe $c\,dt + du$ qu'il perd, il eſt évident que le mouvement perdu par ce corps ſera $c\,x\,dt + x\,du$; or en vertu des mouvemens perdus, ces corps doivent reſter en repos ou en équilibre, par le principe cité; donc $P\,c\,dt - P\,du = c\,x\,dt + x\,du$; ou $(Pc - cx)\,dt = (P + x).\,du$, ou $du = \frac{(P-x).\,c\,dt}{P+x}$. Multipliant cette quantité par

x, on aura $\frac{(Px - xx)\,cdt}{P + x}$, qui doit être un plus grand. Différenciant cette quantité en regardant x seul comme variable, égalant le résultat à o, ôtant la fraction, divisant par $cdt.dx$, & réduisant, on aura $PP - 2Px - xx = 0$; donc $xx + 2Px = + PP$, ou $xx + 2Px + PP = 2PP$, ou $x + P = \sqrt{2PP}$, ou $x = - P + P\sqrt{2} = P.(\sqrt{(2)} - 1)$. Mais $\sqrt{2} = 1.4$, en s'en tenant aux dixiemes; donc $x = P(0.4) = \frac{4P}{10}$, c'est-à-dire, que x doit être à peu-près égal aux $\frac{4}{10}$ de P; de manière que si $P = 10$ livres, x sera à peu-près de quatre livres. Le principe duquel nous avons tiré la solution de cette question, peut être d'un grand secours dans beaucoup d'autres.

22. PROBLÊME. *Etant donné un vaisseau* BA *qui fait voile dans la direction* BA *de la quille, on demande l'angle* MBC *que doit faire le gouvernail* MB *avec le prolongement de la quille pour que sa force, pour faire tourner le vaisseau, soit la plus grande possible* (*fig.* 15). Soit $= 2b$ la largeur MB du gouvernail, $nB = b$, le centre d'effort de l'eau se réunira sur le point n. Soit g le point sur lequel le vaisseau doit tourner, ayant tiré les lignes Bm, pn perpendiculaires à BM, & gp perpendiculaire sur pn, nous aurons $mp = n$M $= b$. De plus en supposant que DnC est la direction selon laquelle l'eau frappe le gouvernail, & faisant l'angle ACD$= a$, CBM $= z$, l'angle DnB extérieur au triangle

CBn sera $= z + a$, & si l'on fait le rayon $= 1$, la longueur Bg (qu'on peut connoître par l'expérience) $= c$, le triangle rectangle Bgm donnera $1 : c :: cos.\ z : gm = c.\ cos.\ z$; parce que les angles CBM, mBg sont complémens l'un de l'autre. Donc $gp = c.\ cos.\ z + b$ sera le bras de levier par le moyen duquel l'eau fait effort pour faire tourner le vaisseau. Maintenant par la théorie ordinaire l'impulsion du fluide est comme le quarré du sinus de l'angle d'incidence DnB ; donc l'action de l'eau pour faire tourner le vaisseau sera $= \overline{sin.}^2\ BnD . gp = \overline{sin.}^2\ (z + a) \times (c.\ cos.\ z + b.)$. Si nous regardons b comme nul par rapport à c ; car en effet la demi-largeur du gouvernail est très-petite en comparaison de c, nous aurons $\overline{sin.}^2\ (z + a) . (c.\ cos.\ z)$, qui doit être un plus grand ; donc $2\,dz\, sin.\ (z + a)\ (cos.\ z + a) \times (c.\ cos.\ z) - c\,dz . sin.\ z . \overline{sin.}^2\ (z + a) = 0$; donc en divisant par $c\,dz\ sin.\ (z + a)$, on aura $2 . cos.\ z .\ cos.\ (z + a) - sin.\ z . sin.\ (z + a) = 0$, ou $cos.\ (2z + a) + cos.\ a + \frac{1}{2}\ cos.\ (2z + a) - \frac{1}{2}\ cos.\ a. = 0$ (*) ; donc $\frac{3 .\ cos.\ (2z + a)}{2} = -$

(*) Si dans la formule $cos.\ n + cos.\ m = 2 .\ cos.\ \left(\frac{m+n}{2}\right) \times cos.\ \left(\frac{m-n}{2}\right)$ (Géométr. 170), on suppose $m = 2z + a$, $n = a$, on aura en transposant les termes, $2 .\ cos.\ (z + a) \times cos.\ z = cos.\ (2z + a) + cos.\ a$. Si dans la formule suivante du numéro cité, on fait la même supposition, on aura, en transposant les termes, changeant les signes & divisant par 2, $- sin.\ (z + a) .\ sin.\ z = \frac{1}{2} .\ cos.\ (2z + a) - \frac{1}{2} .\ cos.\ a$.

$\frac{cos. a}{2}$, ou $cos. (2z + a) = -\frac{1}{3}. cos. a$. Le signe — indique qu'il faut prendre non l'angle a, mais son supplément.

23. SI la direction de l'eau est supposée parallele à la quille, l'angle a sera $= 0$, & son cosinus sera $= 1$; donc on aura alors $2z = -\frac{1}{3}$. Mais si on faisoit le rayon $= 100000$, on auroit $cos. 2z = 33333$, en négligeant la fraction, & par le moyen des tables, on trouveroit $33333 = sin. 19^{o}. 28'$, dont le cosinus $= 70^{o}. 32'$; prenant son supplément à cause du signe —, on aura l'angle $2z = 109^{o}. 28'$; ainsi l'angle z est $= 54^{o}. 44'$.

On trouvera de même que si SR désigne une voile, dont le centre soit situé en u, & que la distance du mât de cette voile au point g soit $= c$; l'angle que doit faire la voile avec la quille doit être de $54^{o}. 44'$, lorsque la direction du vent est parallele à la quille, pour que la force de la voile soit employée le plus avantageusement qu'il est possible à faire tourner le vaisseau. Quand il s'agit de la voile, la grandeur que nous avons désignée par b est censée $= 0$, parce que le centre de la voile est censé situé sur le mât.

24. REMARQUE. Les filets d'eau suivent les contours de la carenne : ainsi ils ne sont pas paralleles à la quille ; mais on peut supposer dans la pratique que leur direction moyenne fait un angle de 15° avec son prolongement ; ainsi notre formule $cos. (2z + a) = -\frac{1}{3} cos. a$ deviendra $cos. (2z + 15^{o}) = -\frac{1}{3} cos. 15^{o}. = -0. 32198$ en supposant le rayon $= 1$, d'où l'on conclura par le moyen des tables que z est $= 46^{o}. 52'$. M. Bouguer

trouve cet angle = 46°. 40'. Mais dans la pratique il n'est que d'environ 30° : cet angle est donc trop petit.

25. LEMME. *Si un fluide parfait, dont la direction est* V M, *va frapper un plan* A B *qu'on suppose ne pouvoir se mouvoir que dans la direction* M N, *je dis que l'effort effectif de ce fluide sera proportionnel au quarré du sinus d'incidence* V M B *multiplié par le sinus de l'angle* B M N *du plan & de la route* M N (*fig.* 16). Car si on décompose l'effort du fluide en deux autres, dont l'un soit parallele, & dont l'autre (M P) soit perpendiculaire à A B, le seul effort M P agira pour faire mouvoir le plan A B ; mais comme cè plan ne peut pas se mouvoir dans la direction M P, on décomposera M P en M C perpendiculaire à M N & = P N, & en M N ; la force P N sera détruite & la force M N sera effective. Or le triangle rectangle M P N donne (en désignant le sinus total par 1) 1 : P M : : *sin.* M P N : M N. Mais les angles M P N, B M N étant compléments du même angle P M N sont égaux, & de plus M P est proportionnel à l'effort absolu du fluide, lequel est comme le quarré du sinus d'incidence ; donc M N est comme $\overline{sin.}^2$ V M B. *sin.* B M N. Donc &c. Lorsque le plan est en mouvement, on prend pour l'angle V M B l'angle d'incidence apparent (*).

(*) Si V M = *u* représente la vîtesse absolue du fluide au commencement du mouvement du plan & la vîtesse apparente, lorsque le plan est en mouvement, & que l'impulsion perpendulaire sur le plan A B soit = *a*, l'on aura le quarré 1 du sinus total : $\overline{sin.}^2$ V M B. *sin.* B M N : : *a* : *b*, impulsion effective oblique.

26. PROBLÊME. CM (*fig.* 17) *exprimant la vîteſſe & la direction du vent ; le vaiſſeau* AB *faiſant ſuivant la direction* Cg, *le chemin* Cg, *tandis qu'une particule d'air fait le chemin* CM, *déterminer tous les points* g, i, *&c. auxquels le navire donné qu'on ſuppoſe n'avoir qu'une voile, parviendra dans le même tems.* Par le point g tirez gP parallelement à la voile Nn du navire, juſqu'à la rencontre de la direction du vent, tracez un cercle qui paſſe par les trois points C, g, P, ce cercle ſera le lieu de tous les points g, i, &c. auxquels le navire arrivera dans le même-tems : car ſi on conſtruit le parallelogramme fMgC, on verra aiſément que gM eſt la vîteſſe & la direction apparente du vent ; & c'eſt avec cette vîteſſe reſpective que le vent frappe la voile. Ainſi l'impulſion eſt comme le produit du quarré de cette vîteſſe par le quarré du ſinus de l'angle $uCn =$ MgP, ou eſt comme $\overline{Mg}^2 . \overline{\mathit{ſin.}}^2\, MgP$. Mais le triangle gPM donne Mg : PM : : *ſin.* gPM $=$ *ſin.* gPC : *ſin.* MgP; donc faiſant le produit des extrêmes égal à celui des moyens & quarrant, $\overline{Mg}^2 . \overline{\mathit{ſin.}}^2\, MgP = \overline{PM}^2 . \overline{\mathit{ſin.}}^2\, VPg$. Mais dans les différentes routes Cg, Ci, la voile reſtant orientée de la même manière par rapport à la quille, la dérive eſt cenſée la même ; ainſi l'impulſion de l'eau ſur la proue eſt comme le quarré de la vîteſſe du navire, & cette impulſion eſt égale à l'impulſion du navire ſuivant Cg, lorſque le mouvement du navire eſt uniforme ; donc ſi l'on fait $= x$ le ſinus de l'angle V Cn $=$ V Pg, y la vîteſſe du ſillage,

on aura $y^2 = xx.\overline{PM}^2$, ou $y = x.P$ (*) (en faiſant PM=P), c'eſt-à-dire, la vîteſſe du ſillage eſt toujours comme le produit de PM par le ſinus de l'angle V Pg = V Pn de la voile avec le vent. Les vîteſſes Cg, ou Ci, &c. ont de même un rapport conſtant avec les produits x.CP : car ces produits ſont égaux à celui de Cg par le ſinus de l'angle CgP, à cauſe du triangle CPg, & tous les angles CgP ſont ici conſtans à cauſe qu'ils ſont égaux à celui de la voile & de la route, que nous regardons comme conſtant ; donc le rapport Cg : x.PM étant conſtant & celui de Cg : x.CP étant auſſi conſtant, il y a un rapport conſtant entre PM & CP ; donc le point P diviſe toujours CM en parties qui ont le même rapport ; donc la voile étant la même, le point P eſt invariable ; donc les points g, i, &c. ſont ſitués ſur la circonférence d'un cercle : car autrement les angles CgP, ou CiP qui ſont formés par la route & par la voile, & qui ſont appuyés ſur la même corde CP ne feroient pas égaux.

COROLLAIRE. De l'équation $y = x.P$, il ſuit que ſous la même voile orientée de la même maniere, on aura y proportionnel à x, c'eſt-à-dire, que les vîteſſes du ſillage ſeront proportionnelles aux ſinus des angles du vent avec la voile, car alors P eſt conſtant : donc la vîteſſe ſera un *maximum*, lorſque le vent ſera perpendiculaire à la voile.

27. PROBLÊME. *Déterminer l'angle de la route avec une ligne, par exemple, une côte* Cm, *don-*

(*) Ces équations, ainſi que pluſieurs autres qu'on verra dans la ſuite, ne déſignent qu'un rapport conſtant, & non une égalité parfaite entre les deux membres.

née de position (fig. 17), pour que le vaisseau puisse s'en éloigner le plus qu'il est possible dans un tems donné. Faites en sorte que la route C*g* fasse avec cette ligne un angle égal à celui que forme la direction absolue du vent avec la voile, & le problême sera résolu. Car par la solution du problême précédent la circonférence C*g*P est le lieu de tous les points auxquels le navire peut parvenir en tems égaux. Or il est évident que le milieu *g* de l'arc C*m* est le point de cette arc le plus éloigné de la corde C*m*; donc c'est au point *g* que doit se rendre le navire dans le cas du présent problême. Mais alors les angles *m*C*g*, CP*g* sont appuyés sur des arcs égaux C*g*, *mg*; donc ils sont égaux : or CP*g* = VC*n*; donc *m*C*g* doit être = VC*n*; donc &c.

28. PROBLEME. *Soit* MN (*fig.* 18) *la moitie de la largeur d'une surface frappée qui ne peut se mouvoir que dans la direction* M*h*, *soit* VM *la vîtesse & la direction apparente d'un fluide parfait, on demande l'angle* VMN *que fait la direction apparente du fluide avec la surface* MN, *lorsque la vîtesse de cette surface est un* maximum. L'effort effectif du fluide est proportionnel au quarré du sinus d'incidence VMN multiplié par le sinus HN de l'angle NM*h* (*); donc il faut que $\overline{fin.}^2$ VMN. *fin.* NMH soit un plus grand. Mais une quantité devient *maximum* en augmentant jusqu'à un certain point pour diminuer en-

(*) Cela suit évidemment du Lemme précédent ; car alors la surface frappée est frappée comme si elle étoit en repos, & que la direction réelle du fluide fût VM.

ſuite (il s'agit ici comme on le voit des *maxima* ordinaires). Donc il y a néceſſairement en-deçà & en-delà du point N deux points infiniment proches m & n, qui ſont tels que menant les perpendiculaires mg, mi, nC, nh ſur les lignes MV & Mh, on a $\overline{\text{ſin.}\, VMm}^2 \times mg = \overline{\text{ſin.}\, VMn}^2 \times nh$, mg eſt le ſinus de hMm & nh celui de nMh. Ayant abaiſſé les perpendiculaires mu, nf ſur les droites nC, mg, on aura $nC = mi + nu$, & $nh = mg - fm$. Mais $\text{ſin.}\, VMn = nC$; donc on a $\overline{mi}^2 . mg = \overline{nC}^2 . nh = \overline{mi + nu}^2 . \overline{mg - fm}$, ou $\overline{mi}^2 . mg = \overline{mi}^2 . mg + 2\, mi . nu . mg + \overline{nu}^2 \times mg - \overline{mi}^2 . fm - 2 . mi . nu . fm, - \overline{nu}^2 . fm$. Si l'on néglige les termes $\overline{nu}^2 . mg, - 2 . mi . nu . fm, - \overline{nu}^2 . fm$, infiniment petits par rapport aux autres termes qui reſtent dans l'équation; après avoir effacé dans les deux membres le terme $\overline{mi}^2 . mg$, on aura $2 . mi . nu . mg - \overline{mi}^2 . fm = 0$, ou $2 . nu . mg = mi . fm$; d'où l'on tire $nu : mf :: mi : 2 . m . g$.

Maintenant les triangles Mmi, nmu ayant leurs côtés perpendiculaires, ſont ſemblables; il en eſt de même des triangles mnf, mMg; de ſorte qu'on a les deux proportions $nu : nm :: Mi : mM$
$nm : mf :: Mm : Mg$
leſquelles étant multipliées par ordre, donnent $nu : mf :: Mi : Mg$; donc $mi : 2 . mg :: Mi : Mg$, ou (en mettant à la place des lignes mi, mg, Mi, Mg les lignes NB, NH, MB, MH, qui en différent infiniment peu) NB : 2 . NH :: MB : MH; donc NB : MB :: 2 NH : MH; donc

$\frac{NB}{MB} = \frac{2.NH}{MH}$; mais en ſuppoſant le rayon = 1, $\frac{NB}{MB} = tang.\ VMN$, & $\frac{NH}{MH} = tang.\ NMH$; ainſi dans le cas du *maximum* la tangente de l'angle de la ſurface avec la direction VM du fluide doit être double de la tangente de l'angle de la ſurface avec la route M*h*.

29. PROBLEME. *Suppoſant que* MN *repréſente la moitié de la voile d'un vaiſſeau qui ſuit la direction* M*h*, *déterminer l'angle de la voile avec la direction apparente du vent, pour qu'il en réſulte la plus grande vîteſſe poſſible* (*fig.* 18). Partagez l'angle VMH que fait la route avec la direction apparente du vent en deux parties, telles que la tangente de l'angle de la voile & du vent ſoit double de la tangente de la route avec la voile, & le problême ſera réſolu. Cela ſuit de la ſolution du problême précédent.

REMARQUE Dans le problême que nous avons réſolu ci-deſſus (27), nous n'avons pas fait attention à la régle que nous fournit le dernier problême: lorſqu'on pourra obſerver les deux régles enſemble, les choſes n'iront que mieux; mais ſi on ne peut les obſerver toutes les deux, il faut obſerver celle du problême ci-deſſus (27). Au reſte, nous pourrons reprendre cette matiere ſi nous donnons un jour la manœuvre des vaiſſeaux.

30. LEMME. *Si on ſuppoſe que le ſinus de l'angle* VC*n* = CP*g de la direction réelle du vent avec la voile* N*n eſt* = *z*, *que celui de l'angle n*CA *que fait la voile avec la quille ou celui de l'angle* CgP

qui lui est égal, en supposant, comme nous le faisons ici, que le vaisseau est exempt de dérive, est $= p$, *que la vîtesse réelle du vent est* $= a$, *que dans la route directe la vîtesse du vaisseau est* $= \frac{a}{m}$, *tandis que dans la route oblique Cg cette vîtesse est* $= u$, *je dis que l'impulsion relative du vent selon la longueur du vaisseau sera* $= \left(a - \frac{zu}{a}\right)^2 \cdot \frac{p^2 z}{r}$, *r étant le sinus total; mais la vîtesse u du vaisseau sera* $= \frac{ap\sqrt{z}}{(m-1.)\, r^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}}$

(*fig.* 19). Le triangle CgP donne *sin.* $CPg = z : Cg = u :: \textit{sin.}\ CgP = p : CP = \frac{up}{z}$; donc $PM = a - \frac{up}{z}$. L'impulsion du vent, qui (26) est proportionnelle à $\overline{\textit{sin.}}^2\ VPg.\ \overline{PM}^2$ pourra être représenté par $\left(a - \frac{up}{z}\right)^2 \cdot z^2$. Mais en menant Cf perpendiculairement à Nn & fq perpendiculaire à Cg, & faisant attention qu'il n'y a qu'une partie de l'impulsion qu'on vient de trouver qui s'exerce selon la route Cg, on fera le sinus total ou r est à l'impulsion absolue qui s'exerce selon Cf, comme le sinus p de l'angle f (*) est à $\left(a - \frac{pu}{z}\right)^2 \cdot \frac{z^2 p}{r}$. Si l'on suppose que la ré-

(*) Dans le triangle Cfq, l'angle f est égal à l'angle gCn: car ces deux angles sont compléments du même angle fCg.

sistance de l'eau contre la proue est exprimée par iuu lorsque le mouvement du navire est uniforme, on aura $\left(a-\frac{pu}{z}\right)^2 \cdot \frac{z^2 p}{r} = iuu$; donc en prenant les racines, transposant & divisant par $\sqrt{i}$; $u = \frac{az\sqrt{p}}{\sqrt{(r.i)}+p^{\frac{1}{2}}}$ (D). Maintenant dans la route directe la voile est perpendiculaire à la quille & à la route; donc alors $z = p = r$; mais la vîtesse de la route directe est $\frac{a}{m}$; donc dans le cas de la route directe notre équation devient $\frac{a}{m} = \frac{ar}{\sqrt{i}+r}$; d'où l'on tire $\sqrt{i} = \overline{m-1}.r$. Substituant cette valeur de $\sqrt{i}$ dans l'équation D, on trouve $u = \frac{az\sqrt{p}}{(m-i).r^{\frac{1}{2}}+p^{\frac{1}{2}}}$.

31. PROBLÊME. *Supposant toujours que le navire est exempt de dérive, déterminer parmi les routes obliques celle qu'il faut suivre pour marcher avec la plus grande des vîtesses possibles.* Il est aisé de comprendre que dans la route directe les voiles se couvrant les unes les autres, il peut se faire que la vîtesse soit moins grande que dans certaines routes obliques dans lesquelles on peut exposer plus de surfaces à l'action du vent. Cela supposé, si dans l'expression de la vîtesse qu'on vient de trouver (30), on substitue r au lieu de z, ce qui, comme il suit du Corollaire du Problême ci-dessus (26), remplit une des conditions

du *maximum*, on aura $u = \frac{ar\sqrt{p}}{(m-1).r^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}}}$ (H). Si l'on différencie cette derniere quantité en égalant le résultat à o, divisant par dp & ôtant le diviseur commun de tous les termes, il viendra $(m-i).\frac{1}{2}ar^{\frac{1}{2}} - arp^{\frac{1}{2}} = 0$; donc $p^{\frac{1}{2}} = \frac{\overline{m-1}.r^{\frac{1}{2}}}{2}$, ou $p = \frac{(m-1).^{\frac{2}{3}}r}{(2)^{\frac{2}{3}}}$. Substituant cette valeur de p dans l'équation H, nous aurons pour le *maximum maximorum*, $u = \frac{1}{3}a.\left(\frac{2}{m-1}\right)^{\frac{2}{3}}$: ainsi lorsque l'angle de la voile & du vent est tel que son sinus $p = \left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}r$, l'angle de la voile avec le vent étant droit, la vîtesse u sera un *maximum maximorum*, & le problême est résolu. Car le sinus p nous fait connoître le cosinus de l'angle de la route avec la quille, & puisque la voile doit faire un angle droit avec la direction du vent, l'angle VCn sera droit, & l'angle nCg, dont le sinus $= p$ sera complément de l'angle gCM de la route cherchée avec la direction du vent CM.

En comparant les équations $p = \left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}r$ & $u = \frac{1}{3}a.\left(\frac{2}{m-1}\right)^{\frac{2}{3}}$, on reconnoît que plus le sinus p est petit par rapport à r, plus la vîtesse u, lorsqu'elle est parvenue au *maximum maximorum*, est grande par rapport au tiers $\frac{1}{3}a$ de la

vîteſſe du vent : car p eſt égal au ſinus total diviſé par $\left(\frac{2}{m-1}\right)^{\frac{2}{3}}$, tandis que la plus grande vîteſſe u eſt égale au produit de $\frac{1}{3}a$ par la même quantité $\left(\frac{2}{m-1}\right)^{\frac{2}{3}}$. En ſuppoſant que le navire prît la moitié de la vîteſſe du vent dans la route directe, on auroit $m = 2$, & $p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} . r = \frac{1}{(4)^{\frac{1}{3}}} r$. Donc en retranchant le $\frac{1}{3}$ du logarithme de 4 de celui du ſinus total, on auroit le ſinus p de l'angle nCA qu'on trouveroit d'environ 39°. 3′. Ainſi l'angle de la route avec le vent ſeroit de 50°. 57′, alors la vîteſſe du navire ſeroit environ $\frac{63}{100} a$, tandis qu'elle étoit ſeulement $\frac{50}{100} a$ dans la route directe ; donc alors la vîteſſe ſeroit plus grande que dans la route directe dans le rapport de 63 : 50.

REMARQUE. Si $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{m-1}\right)^{\frac{2}{3}} > 1$, ou ſi $\frac{1}{\sqrt{27}} \times \frac{2}{m-1} > 1$, ou ſi $m < \frac{2}{\sqrt{27}} + 1$, ou en prenant la valeur approchée de $\sqrt{27}$ par le moyen des décimales, ſi m eſt moindre que 1. 385, il y aura une route oblique dans laquelle le navire aura plus de vîteſſe que le vent lui-même, pourvu que dans la route directe le navire prenne une vîteſſe plus grande que 1000, en ſuppoſant celle du vent = 1385. Suppoſons que $m = \frac{5}{4}$, la vîteſſe dans la route directe ſera $= \frac{4a}{5} = 320$,

en ſuppoſant que la vîteſſe du vent eſt $= 400$, ce qui ne renferme aucune impoſſibilité, puiſque le vent pourra encore agir ſur le vaiſſeau avec une vîteſſe reſpective $= 80$. Mais alors $p = \frac{1}{4} r$, & l'angle de la voile avec la quille ſera de $14^o. 29'$; l'angle du vent & de la route ſera donc de $75^o. 31'$, la vîteſſe u ſera $= 533 \frac{1}{3} = \frac{4}{3} a$.

Si dans la route directe m ſurpaſſe 1. 385 la vîteſſe du vent étant $= a$, la propriété, dont nous parlons, n'aura pas lieu, c'eſt-à-dire, que dans la route oblique qu'on vient de déterminer, le navire ne pourra pas prendre plus de vîteſſe que le vent, & ſuppoſant même que $m > 3$, il ne prendra pas autant de vîteſſe que dans la route directe. Lorſque $m > 3$, on trouve que p eſt plus grand que le ſinus total, ce qui eſt impoſſible; donc alors il n'y a aucune route oblique qui porte au *maximum* la vîteſſe du ſillage; de ſorte donc que ſi dans la route directe la vîteſſe eſt plus grande que la 1. 385me partie de celle du vent, le navire aura plus de vîteſſe que le vent dans certaines routes obliques. Si la vîteſſe du navire dans la route droite eſt moindre, mais plus grande que $\frac{a}{3}$, le navire n'ira plus ſi vîte dans la route oblique qui lui procure la plus grande vîteſſe, mais ſa vîteſſe ſera néanmoins plus grande que dans la route directe. Enfin ſi la vîteſſe du navire dans la route directe eſt $< \frac{a}{3}$, il n'y aura point de route oblique qui rende la vîteſſe un *maximum*.

On peut encore remarquer qu'en ſuppoſant que la ſurface des voiles eſt infinie, la vîteſſe du

vaiſſeau dans la route oblique ſeroit tout au plus égale à celle du vent : car l'angle du vent avec la voile étant droit, dans ce cas le vaiſſeau obéiroit au vent en ſuivant la direction du vent, puiſque l'action du vent ſur le vaiſſeau ſeroit infinie. Et de-là on peut conclure qu'il y a un *maximum* de vîteſſe qui dépend de la ſurface des voiles au-delà, & en-deçà, du quel il y a à perdre, ſoit qu'on augmente ou qu'on diminue la ſurface des voiles, & qu'en rendant cette ſurface infinie, on fait changer de route au vaiſſeau. Il n'eſt donc pas ſurprenant qu'alors la vîteſſe du ſillage diminue.

32. PROBLÊME. *Soit une piece de bois* CH (*fig.* 20) *d'une groſſeur uniforme qui tourne autour du point* C, *& qui eſt attachée par l'extrémité* H *à une corde* HM*m* *qui paſſe ſur la poulie* M *& ſoutient un globe* *m* *par le moyen d'une courbe, de maniere que le poids* *m* *& la piece* HC *ſont toujours en équilibre ; on demande la nature de la courbe* K*um* *que décrit le centre de gravité du poids* *m*. Soit CB la poſition horiſontale de la piece CH, A le point du milieu de cette piece, K le point où ſe trouve le centre *m* du globe dans ce cas, *f* le point ou le globe *rm* touche alors la courbe *fxg* ſur laquelle ce corps gliſſe tandis que ſon centre décrit la courbe K*m*. Cela poſé, le produit du poids CH, que je fais $=a$, par la diſtance CA, doit être égal au produit du poids *m* par la perpendiculaire C*h* à la direction MB, autrement il n'y auroit point d'équilibre. Donc on aura $a.\,CA = m.\,Ch$.

Suppoſons maintenant que la piece de bois eſt dans la ſituation CH, en tirant par le point *n* milieu

de la piece C H, & du centre du globe m les lignes nz, mP perpendiculaires sur C M & D M, le produit du poids m par sa descente verticale K P est égal au produit du poids C H par sa montée verticale $=$ Cz (*), donc K P. $m = a$. Cz, multipliant cette équation par la précédente, on aura a.CA.KP.$m$$=$$mCh$.$a$.C$z$, d'où l'on tire CA.K P $=$ Ch.Cz. Maintenant pour construire la courbe Kum prenez toujours Kp $=$ K P quatrieme proportionnel aux lignes C A, Ch, Cz, tirez ensuite la perpendiculaire indéfinie p P m à D M & supposant la longueur de la corde H M m $=$ C, du sommet de la poulie M avec un rayon égal à la différence entre la longueur C & la longueur H M, décrivez un arc de cercle qui coupe la ligne pm du côté de D N, le point d'interdiction sera à la courbe cherchée. Cela étant fait par chaque point u de cette courbe on tirera des pendiculaires à la même courbe & en-dessous, prenant chaque perpendulaire ux égale au rayon rm du poids m, la courbe fxg qui passera par le sommet de ces perpendiculaires sera la courbe sur laquelle doit glisser le corps m qu'on peut faire cylindrique si l'on veut. En supposant que C H représente un pont levis, on pourra abaisser ou élever facilement ce pont par une machine semblable à celle que représente notre figure.

(*) Par les loix de la Méchanique, un corps qui descend librement par un plan incliné, ou par un plan courbe, acquiert la même vîtesse que s'il descendoit le long d'un plan vertical de même hauteur. De plus le poids de la piece C H est censé réuni au milieu A, ou n de cette piece ; & par la nature du problême, si on donne une impulsion au corps m & une impulsion égale, mais en sens contraire à la piece C H, il y aura équilibre.

Nous négligeons ici le frottement & la résistance de l'air.

Théorie du centre de Percussion.

33. *Le centre de Percussion* est un point par lequel, si un corps venoit à rencontrer un obstacle, il le frapperoit avec plus de force que par tout autre point. Lorsque le corps se meut parallelement à lui-même, le centre de percussion est le même que celui de gravité; car toutes les parties du corps ayant des vitesses égales, leurs forces sont en équilibre autour de leur centre de gravité, il suffira donc ici de rechercher le centre de percussion des corps qui se meuvent autour d'un point fixe, ou autour d'une ligne qu'on appelle *axe de balancement*.

34. PROBLÊME. *Trouver le centre de percussion d'un corps* A C *qui se meut autour d'un axe fixe* F (*fig.* 21). Multipliez tous les points solides de ce corps, que j'appellerai les élémens de ce corps par les quarrés de leurs distances à l'axe de balancement, & divisez le résultat par les élémens multipliés par leurs distances, le problême sera résolu. Car si on suppose que le corps AC soit parvenu en tournant autour de l'axe F, dans la situation AB, chaque élément de ce corps aura décrit un arc semblable à l'arc BC. La force de chaque élément sera donc comme le produit de cet élément, multiplié par l'arc qu'il a décrit, ou ce qui revient au même, sera égal au produit de cet élément par sa vîtesse; donc la somme des forces sera égale au produit des élémens multipliés par leur vîtesses. Considérant ces forces comme des poids, la distance du centre de gravité de ces poids par rapport au point F sera égal au produit de ces poids par leur distance à

F, en divisant par la somme des poids, ou sera = au produit des élémens multipliés par les distances & par les arcs qu'ils décrivent, en divisant par les élémens multipliés par ces mêmes arcs : or ces arcs sont comme les distances ; donc la distance du centre de percussion par rapport à l'axe F est égale au produit des élémens par le quarré de leurs distances (nous appellerons ces produits momens des forces, la somme de ces produits somme des momens des forces, en nommant forces la somme des produits des élémens par leurs distances à l'axe de balancement, & somme des forces la somme de ces produits), en divisant par les élémens multipliés par leur distance, ou ce qui revient au même par la somme des forces. Il est évident que ces forces des molécules du corps sont égales de part & d'autre du centre de percussion, qu'elles sont en équilibre autour de ce centre, & que si l'on oppose un obstacle invincible au mouvement du centre de percussion, tout le corps restera en repos.

Supposons que P est le centre cherché, en tirant la ligne MP tangente de l'arc P*p* que décrit le centre de percussion, le point M de la surface du corps AC sera celui par lequel, si ce corps vient à choquer un obstacle, il le frappera avec plus d'effort que par tout autre point de la surface de ce même corps : parce que le centre de percussion se trouve dans la ligne M*m*.

REMARQUE I. Le centre de percussion est aussi appellé *centre d'oscillation*, parce que la distance FP détermine la longueur d'un pendule simple qui feroit ses oscillations dans le même-tems que le corps AC fait les siennes : il y a deux mé-

thodes pour trouver le centre de percuſſion des ſolides, nous parlerons de l'une & de l'autre.

REMARQUE II. Il eſt viſible que la force d'un point de matiere qui balance autour d'un axe doit s'eſtimer par le produit du quarré de la diſtance à cet axe multiplié par ſa maſſe, c'eſt-à-dire, que la force giratoire d'un corps eſt comme la ſomme des produits de chacun de ſes élémens par les quarrés de leurs diſtances reſpectives à l'axe de balancement : c'eſt ce que M. Euler appelle *moment d'inertie*.

35. PROBLEME. *Trouver le centre de percuſſion d'une ligne droite* AB *qui oſcille autour d'un point* A (*fig.* 22). Soit $AB = a$, $AP = x$, $Pp = dx$; xdx pourra repréſenter la force de l'élément dx. Multipliant cette force par x, on aura $xxdx$ pour l'expreſſion du moment de cet élément; donc la ſomme des momens des forces ſera $= S.x^2dx = \frac{x^3}{3}$. Diviſant cette ſomme par la ſomme des forces $S.xdx = \frac{x^2}{2}$, le quotient $\frac{2}{3}x$ ſera la diſtance du centre de percuſſion de la partie AP par rapport au point A. Si l'on fait $x = a$, & qu'on prenne $AC = \frac{2}{3}a$, l'on aura la diſtance du centre de percuſſion de la ligne donnée au point A.

36. PROBLEME. *Trouver le centre de percuſſion d'un rectangle* AB *qui fait ſes oſcillations autour de la ligne* TAT (*fig.* 23). Ayant tiré les lignes MN, mn paralleles à la baſe du rectangle, ſoit $AP = x$, $Pp = dx$, $MN = b$, bdx ſera l'élément MNmn du rectangle, $bxxdx$ le moment de cet élément, $bxdx$, la force du même élément;

donc $\frac{S.\, bxxdx}{S.\, bxdx} = \frac{2}{3}x$ sera la distance du centre de percussion de la partie AP; & si l'on fait $x = AB = a$, $\frac{2}{3}a$ sera la distance AC du centre de percussion du rectangle par rapport au point A.

37. PROBLEME. *Trouver le centre de perçussion d'un triangle* BAR *qui fait ses oscillations autour d'une ligne* CAT *parallele à sa base, & qui passe par son sommet* A (*fig.* 24). Il est facile de voir que le centre de percussion se trouve dans la ligne Ag qui divise la base, & chaque élément du triangle en deux également. Soit AD perpendiculaire à la base BR & faisons $AD = a$, $BR = b$, $Am = x$, $MF = y$, l'on aura l'élément $MFfN = ydx$; mais à cause des triangles semblables ABR, AMF, on a $b : y :: a : x$ (parce que dans les triangles semblables les bases sont proportionnelles aux hauteurs); donc $y = \frac{bx}{a}$, & $ydx = \frac{bxdx}{a}$; donc l'élément des forces du triangle AMF est $\frac{bxxdx}{a}$, l'élément des momens des forces étant $\frac{bx^3dx}{a}$; donc en divisant $S.\frac{bx^3dx}{a} = \frac{bx^4}{4a}$ par $S.\frac{bx^2dx}{a} = \frac{bx^3}{3a}$, le quotient $\frac{3}{4}x$ sera la distance du centre de percussion du triangle AMF à l'axe CT, & si l'on fait $x = a$, la distance du triangle entier ABR par rapport au même axe sera $= \frac{3}{4}a$. Donc si on suppose que $An = \frac{3}{4}a$, & qu'on mène la parallele Nnf à l'axe CT, le point P sera le centre cherché.

COROLLAIRE. Si le triangle dont il s'agit de trouver le centre de gravité étoit isocèle, comme le triangle gAB (*fig.* 25), le centre de percussion se trouveroit en menant la perpendiculaire AD sur la base gB & faisant $An = \frac{3}{4}AD$.

38. PROBLEME. *Trouver le centre de percussion d'un triangle isocèle* gAR *qui tourne autour de la base* gR (*fig.* 24). Soit $AD = a$, $gR = b$, $Am = x$, $qF = y$, on aura l'élément $qPfF = y\,dx = \frac{bx\,dx}{a}$. Multipliant cet élément par sa distance à l'axe d'oscillation gR, on aura $\frac{bx\,dx}{a} \times \overline{a-x} = bx\,dx - \frac{bxx\,dx}{a}$ qui sera l'élément des forces. Multipliant ce dernier élément par $a - x$, on aura l'élément des momens des forces $= abx\,dx - 2bxx\,dx + \frac{bx^3\,dx}{a}$. En divisant la somme des momens des forces par la somme des forces, on aura $\frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x}$ qui sera la distance du centre de percussion du triangle AqF par rapport à la base gR. Si l'on fait $x = a$ on aura $\frac{a}{2}$ pour l'expression de la distance du centre de percussion du triangle proposé par rapport à la ligne gR. Donc si on fait $Dm = \frac{1}{2}a$ le point m sera le centre cherché.

39. PROBLEME. *m & n étant deux nombres entiers impairs & positifs, trouver la distance du centre de percussion d'une courbe du genre parabolique désignée par l'équation* $y^{m+n} = x^n g^m =$

x^n, *en faisant le paramètre* $= 1$, *qui balance autour de la tangente* CAD (*fig.* 26). Soit AB $= a$, PM $= y$, M$m = 2y$, AP $= x$, $2y\,dx$ sera l'élément MmnN; $2yx\,dx$ l'élément des forces, & $2yxx\,dx$ l'élément des momens des forces.

Mais $y = x^{\frac{n}{m+n}}$; donc en substituant cette valeur dans l'élément des momens des forces & dans celui des forces, & divisant l'intégrale des momens des forces par la somme des forces, on aura $\left(\frac{2mm + 5mn + 3nn}{3mm + 7mn + 4nn}\right) x$ pour la distance du centre de percussion du segment MAm à la ligne CD. Si dans cette expréssion on suppose $x = a =$ AB, on aura la distance du centre de percussion de la parabole FAf au point A. Si $m = n = 1$ comme dans la parabole ordinaire, cette distance sera $= \frac{10}{14}a = \frac{5}{7}a$. Si $m = 3$ & $n = 1$, cette distance sera $= \frac{36}{52}.a = \frac{9}{13}.a$, & ainsi des autres.

40. PROBLÊME. *Soit* fAF *une parabole ordinaire qui fait ses oscillations autour de la base* Ff, *on demande la distance de son centre de percussion à la ligne* Ff (*fig.* 26). Soit l'équation de la parabole $y^2 = gx = x$, en faisant $g = 1$; nommant les mêmes grandeurs des mêmes noms que dans le problême précédent, l'élément MmnN sera $= 2y\,dx = 2x^{\frac{1}{2}}dx$. Multipliant cet élément par $a - x$, on aura l'élément des forces, & multipliant encore par $a - x$, on aura l'élément des momens des forces, divisant la somme des momens par celle des forces, il vient $\frac{35.aa - 42ax + 15x^2}{35a - 21x} = \frac{8a}{14} = \frac{4}{7}a$, lorsque $x =$

a ; donc ſi on fait $BP = \frac{4}{7}a$, le point P ſera le centre de percuſſion cherché.

REMARQUE. Nous allons réſoudre huit problêmes ſur le centre de percuſſion dès ſolides par une méthode aiſée, mais erronée, dont ſe ſervent pluſieurs Auteurs : nous ne la rapportons que pour faire comprendre à nos Lecteurs qu'il ne faut pas toujours en croire les Géomètres ſur leur parole. Mais nous donnerons enſuite une autre méthode plus exacte & plus rigoureuſe.

41. PROBLEME. *Trouver le centre de percuſſion d'un cylindre qui tourne autour d'un axe qui paſſe par le point g pris ſur le prolongement* Ag *de ſon axe* AB (*fig.* 27) *& perpendiculaire à cet axe.* Soit $AB = a$, $Ag = b$, $AP = x$, $Pp = dx$, $gP = b + x$, $MP = r$, c la circonférence de ce rayon; donc $\frac{rc}{2}$ ſera le cercle de la baſe du cylindre, & $\frac{rcdx}{2}$ ſera l'élément $MmnN$ du cylindre. Multipliant cet élément par $b + x$, on aura l'élément des forces $= \frac{brcdx}{2} + \frac{rcxdx}{2}$. Multipliant cet élément par $b + x$, on a la différence des momens des forces $= \frac{bbrcdx}{2} + brcxdx + \frac{rcxxdx}{2}$, dont l'intégrale $\frac{bbrcx}{2} + \frac{brcxx}{2} + \frac{rcx^3}{6}$ étant diviſée par la ſomme des forces $\frac{brcx}{2} + \frac{rcxx}{4}$, donne $\frac{6bb + 6bx + 2xx}{6b + 3x}$ pour la diſtance du centre de percuſſion de la partie

AP au point g. Si on fait $x = a$, on trouvera $\frac{6bb + 6ba + 2aa}{6b + 3a}$ pour la distance cherchée du centre de percussion du cylindre entier par rapport au point g.

Si on suppose que le cylindre balance autour du point A, on aura $b = 0$ & la distance du centre de percussion du cylindre par rapport au point A sera $= \frac{2}{3} a$.

42. PROBLEME. *Trouver le centre de percussion d'un cône droit qui fait ses oscillations autour d'un axe A qui passe par son sommet parallèlement à la base* (*fig.* 28). Soit l'axe AD $= a$, AP $= x$, MP $= y$, c la circonférence du rayon r, $\frac{yc}{r}$ sera la circonférence du rayon y, $\frac{yyc}{2r}$ la surface du cercle de ce rayon, & $\frac{cyydx}{2r}$ l'élément du cône. Soit maintenant BC $= 2r$, BD $= r$; les triangles semblables ABD, AMP donneront $a : r :: x :$ PM $= y = \frac{rx}{a}$; donc notre élément sera $= \frac{rcxxdx}{2aa}$. Cela posé, $\frac{rcxxxdx}{2a^2}$ sera l'élément des forces, & $\frac{rcx^4dx}{2aa}$ celui des momens des forces. Divisant la somme des momens des forces $\frac{rcx^5}{10aa}$ par la somme des forces $\frac{rcx^4}{8a^2}$, le quotient $\frac{8}{10} x = \frac{4}{5} x$ sera la distance du centre de percussion du cône indéterminé AMm au point A, & si l'on

fait $x = a$, $\frac{4}{5}a$ sera la diſtance du centre de percuſſion du cône entier au point A. Ainſi en ſuppoſant Ap $= \frac{4}{5}a$, le point p ſera le centre cherché..

43. PROBLEME. *Suppoſons maintenant que le cône* BAC *faſſe ſes oſcillations autour du diamètre* BC *de la baſe, on demande le centre de percuſſion.* Dans cette hypothèſe, en multipliant l'élément $\frac{rcxxdx}{2a^2}$ par $a - x$, on aura l'élément des forces. Si l'on multiplie le même élément par le quarré de $a - x$, on aura l'élément des momens des forces. En diviſant la ſomme des momens des forces par celle des forces, on aura (après les opérations ordinaires) $\frac{20aa - 30ax + 12xx}{20a - 15x}$ (A), valeur de la diſtance du centre de percuſſion du cône AMm à la ligne BC; donc en faiſant $x = a$, on aura $\frac{2}{5}a$, & ſuppoſant D$p = \frac{2}{5}a$, le point p ſera le centre de percuſſion du cône entier.

REMARQUE. Selon quelques Auteurs l'expreſſion A, que nous venons de trouver, déſigne la diſtance du centre de percuſſion du cône tronqué BMmC à la droite BC. Mais il eſt aiſé de voir qu'ils ſe trompent; car en ſuppoſant $x = \frac{1}{2}a$ cette expreſſion devient $= \frac{16.a}{25}$; donc le centre de percuſſion d'un cône tronqué dont la hauteur ſeroit $= \frac{a}{2}$ ſeroit éloigné de la baſe de $\frac{16.a}{25}$; donc il ſeroit ſitué hors de ce cône, ce qui eſt abſurde.

44. PROBLEME. *Trouver le centre de percussion d'un conoïde elliptique qui fait ses oscillations autour d'un axe* TAD *perpendiculaire au premier axe* AB (*fig.* 29). Il est évident que le centre de percussion cherché est situé dans l'axe AB. Soit l'axe AB $= a$, le paramètre $= p$, le rapport du rayon à la circonférence $r : c$, le demi petit axe C$f = r$, AP $= x$, MP $= y$. La circonférence du rayon y sera $= \frac{cy}{r}$, le cercle de ce même rayon sera $\frac{cyy}{2r}$, & l'élément MmnN $= \frac{cyydx}{2r}$. Mais par la nature de l'ellipse, $yy = px - \frac{pxx}{a}$; donc notre élément est $= \frac{cpxdx}{2r} - \frac{cpxxdx}{2a.r}$. Multipliant cet élément par x & intégrant, on aura $\frac{cpx^3}{6r} - \frac{cpx^4}{8ar}$ pour la somme des forces. Multipliant le même élément par xx & intégrant, on aura la somme des momens des forces $= \frac{cpx^4}{8r} - \frac{cpx^5}{10.ar}$. Divisant cette quantité par la somme des forces, on trouve après les opérations ordinaires $\frac{15ax - 12xx}{20.a - 15.x}$, quantité que j'appelle B, & qui désigne la distance du centre de percussion du segment MAm au point A. Si on fait $x = a$, on aura $\frac{3.a}{5}$ pour la distance du centre de percussion du conoïde entier au sommet A. Si au

lieu de faire AB $= a$, on fait AB$= 2a$, cette diſtance ſera $= \frac{6.a}{5}$.

45. PROBLÊME. *Trouver le centre de percuſſion d'une ſphère* ABA, *dont le diamètre* $= 2a$ (*fig.* 30). En ſubſtituant $2a$ au lieu de a, dans l'expreſſion B qu'on vient de trouver (44), on aura $\frac{30ax - 12xx}{40.a - 15.x}$ pour la diſtançe du centre de percuſſion du ſegment AMm, & ſi l'on fait $x = 2a$, on trouve $\frac{12aa}{10a} = \frac{6a}{5}$ pour la diſtance du centre de percuſſion de la ſphère entiere à la ligne TAD ; or en ſuppoſant le diamètre du cercle $= a$, l'on a $p = a$, & l'équation du cercle eſt $yy = px - \frac{pxx}{a}$; donc &c.

COROLLAIRE. Il ſuit de-là & de ce qu'on a dit dans le problême précédent, que ſi une ſphère & une éllipſoïde ont le même axe $2a$, & que ces ſolides faſſent leurs oſcillations autour d'une même tangente TAD perpendiculaire à l'axe AB, ces ſolides auront le même centre de percuſſion n qu'on trouvera en faiſant A$n = \frac{6.a}{5}$.

46. PROBLÊME. *Suppoſant que* FAf (*fig.* 26) *repréſente un conoïde parabolique ordinaire dont l'axe* AB $= a$, *déterminer le centre de percuſſion de ce ſolide.* Soit l'ordonnée PM perpendiculaire à l'axe $= y$ l'abſciſſe AP $= x$, $r : c$ le rapport du rayon à la circonférence; $\frac{cyydx}{2r}$ ſera l'élément MmnN du conoïde. Soit l'équation de la

courbe génératrice, $yy = px$; cet élément deviendra $\frac{cpxdx}{2r}$. Multipliant cet élément par x & intégrant, on aura $\frac{cpx^3}{6r}$ pour la somme des forces. Multipliant le même élément par x^2 & intégrant, l'on a la somme des momens des forces $= \frac{cpx^4}{8r}$. En divisant cette quantité par la somme des forces, le quotient $\frac{6x}{8} = \frac{3}{4}x$ sera la distance du centre de percussion du segment MAm à la tangente CAD; donc si on fait $x = a$, & qu'on suppose A$p = \frac{3}{4}a$, le point p sera le centre de percussion du conoïde FAf.

Nous avons promis dans la remarque du n°. (40) de donner une méthode plus exacte que celle que nous venons d'employer dans les huit derniers problêmes. Avec un peu d'attention il est aisé de voir que cette méthode, dont se sert l'Abbé Deidier, suppose que tous les points des élémens d'un solide sont également distans de l'axe de balancement, ou ce qui revient au même que chaque élément du solide est concentré dans un point qui se trouve dans l'axe du solide, ce qui n'est pas; ainsi cette méthode n'est pas fort exacte; mais elle est fort simple & fort aisée. Dans la méthode que nous allons employer on estime les forces de la même maniere que ci-dessus, mais le moment des forces s'estime différemment.

Autre méthode pour trouver le centre de percussion des solides qui font leurs oscillations autour d'un axe.

47. Il faut considérer l'élément d'un solide comme composé d'autres élémens dont chacun soit parallèle à l'axe de balancement. Avant d'en faire l'application, nous allons établir le Lemme suivant.

48. LEMME. *La somme des produits de tous les quarrés* $\overline{AP}^2$ (*fig.* 31), *chacun multiplié par l'élément* PM*mp de l'espace* CPMD *qui fait partie d'un quart de cercle* BDC *dont le rayon est* $= a$, *la ligne* CA *étant* $= b$, *sera* $= bbf + \frac{1}{4}aaf$, *en supposant que f soit égal à l'espace* BDC.
Soit l'élément $pmMP = dz$, $PC = y$, on aura $dz = dy\sqrt{(aa - yy)} = Pp.PM$, $\overline{AP}^2.dz = bbdz + yydz$; dont l'intégrale $= bbz +$ S.$yydz$. Pour intégrer $yydz$ je substitue la valeur de dz, pour avoir $yydz = yydy(aa - yy)^{\frac{1}{2}}$. J'ajoute & je retranche $\frac{1}{4}aa(aa - yy)^{\frac{1}{2}}$, & je donne à notre différentielle la forme $\frac{1}{4}aa(aa - yy)^{\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{4}(aa - yy)^{\frac{1}{2}}dy(aa - yy) + \frac{3}{4}yydy(aa - yy)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}aa(aa - yy)^{\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{4}dy(aa - yy)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}yydy(aa - yy)^{\frac{1}{2}}$, dont l'intégrale $\frac{1}{4}aa.$S.$dy(aa - yy)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}y(aa - yy)^{\frac{3}{2}}$ est $= \frac{1}{4}aaf$, lorsque CP est $=$ CB $= a$; donc &c.

49. PROBLÊME. *Soit* D m B M *une ſphere qui balance autour d'une ligne* T A T *perpendiculaire au prolongement* D A *de l'axe de la ſphere ; on demande le centre de percuſſion de cette ſphere* (*fig.* 32). Soit $DB = 2a$, $PM = y$, $DP = x$, c la circonférence du rayon a, $\frac{c}{2a}yy$ ſera le cercle du rayon y. Mais $yy = 2ax - x^2$; donc ce cercle ſera $= \frac{2acx - cxx}{2a}$. Soit maintenant $DA = b$, on aura $AP = b + x$; donc en ſuppoſant $f = \frac{2acx - xx}{2a}$, écrivant y la place de a, & $b + x$, au lieu de b, on aura $(\overline{b + x}^2 + \frac{1}{4}yy) \times \frac{2acx - cxx}{2a}$ pour le produit de tous les élémens du cercle Mm, chacun multiplié par le quarré de ſa diſtance à l'axe de balancement ; cela ſuit du Lemme précédent. Subſtituant la valeur de yy, & multipliant par dx, on aura $(bb + 2bx + \frac{1}{2}ax + \frac{3}{4}xx)\left(\frac{2acx\,dx - cx^2\,dx}{2a}\right)$ pour la différence du moment des forces, dont l'intégrale $\frac{1}{2}cbbxx + \frac{2}{3}cbx^3 + \frac{1}{8}cx^4 - \frac{cbbx^3}{6a} - \frac{cbx^4}{4a} - \frac{3cx^8}{40.a}$ (A) exprime la ſomme des momens des forces. Si dans la formule A on fait $x = 2a$, & qu'on diviſe le réſultat par la ſomme des forces, qui dans ce cas eſt égale au produit de la ſphere $\frac{2}{3}aac$ par la diſtance $a + b$ au point

de suspension, on aura $\frac{5bb + 10ab + 7aa}{5a + 5b}$, expression de la distance du centre de percussion de la sphere entiere au point de suspension. Si dans cette expression on suppose $b = 0$, cette distance sera $\frac{7a}{5}$, & le centre de gravité de la sphere sera éloigné du centre de percussion de la quantité $\frac{2}{5}a$.

50. PROBLEME. *Soit* AB *un cylindre droit qui balance autour de la ligne* CD *perpendiculaire au prolongement de son axe, on demande le centre de percussion du cylindre* (*fig.* 27). Soit le rayon PM $= r$, c la circonférence de ce rayon, AP $= x$, AB $= a$, A$g = b$; la différence des forces sera $= \frac{crdx}{2}.(b + x)$, & celle des momens des forces sera $= (\overline{b + x}^2 + \frac{1}{4}rr)\frac{crdx}{2}$; donc en divisant la somme des momens des forces par la somme des forces & supposant $x = a$, l'on aura $\frac{12bb + 12ab + 4aa + 3rr}{12b + 6a}$ pour la distance du centre de percussion du cylindre au point g. Si on suppose $b = 0$, la distance du centre de percussion du cylindre par rapport au point A sera $= \frac{4aa + 3rr}{6a} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}\frac{rr}{a}$.

REMARQUE. Il est aisé de voir que les résultats que donne la seconde méthode ne sont pas les mêmes que ceux de la premiere. Pour que les

les commençans puissent se décider plus aisément entre ces deux méthodes, nous allons résoudre le problême suivant.

51. PROBLEME. *Soit* AET (*fig.* 33) *un corps de figure quelconque qui oscille librement autour d'un axe* T, *on demande la distance du centre d'oscillation de ce corps par rapport à l'axe* T. Ayant mené la verticale TN, & la droite TC au centre de gravité C du corps, je suppose que l'action de la gravité sur ce corps soit représentée par CD parallèle à TN. Comme ce corps ne peut pas suivre la direction CD, je décompose cette action en deux autres, l'une représentée par CB détruite par la résistance de l'axe T, l'autre CF perpendiculaire sur TCB & qui produit le mouvement d'oscillation du corps autour de l'axe. Soit le sinus total $= 1$ & $CD = P$; dans le triangle CDF l'on a $1 : P :: \textit{sin.}\, CDF : CF = P \times \textit{sin.}\, CDF = P.\textit{sin.}\, CTN$: puisque l'angle $CDF = DCB$ (son alterne interne); or $DCB = CTN$ son correspondant, à cause des parallèles TN, CD. Donc en multipliant par CT, on aura le moment de la force de la gravité par rapport à l'axe T, on aura, dis-je, ce moment $= P.CT.\textit{sin.}\, CTN$. Soit mn l'arc décrit dans un tems infiniment petit par une particule quelconque m du corps proposé, QR un arc semblable décrit avec un rayon constant TQ. Le moment de la quantité de mouvement imprimé à la particule m est $= m.\,mn.\,Tm = m.\overline{Tm}^2.\frac{QR}{TQ}$; parce que l'on a $mn : QR :: Tm : TQ$, ou mn

$= \frac{Tm.QR}{TQ}$; donc puiſque la fraction $\frac{QR}{TQ}$ eſt là même pour toutes les molécules m, ſi on prend les produits de chaque molécule par le quarré de ſa diſtance à l'axe T & qu'on nomme M leur ſomme, le moment du mouvement de la maſſe entiere ſera $= M. \frac{QR}{TQ}$. Egalant ce moment à celui de la force CF qui le produit, on aura $P.CT \times$ *ſin.* $CTN = M \frac{QR}{QT}$, & $\frac{QR}{QT} = \frac{P.CT.\text{ſin}.CTN}{M}$.

Suppoſons maintenant un corps p qui oſcille autour de l'axe t, & déſignant par p, ct, ctn, M', qr, qt les quantités analogues à P, CT, &c. on aura $\frac{qr}{qt} = \frac{p.ct.\text{ſin}.ctn}{M'}$; donc ſi l'on a $ctn = CTN$, $tq = TQ$, $\frac{P.CT}{M} = \frac{p.ct}{M'}$, on aura $qr = QR$, ce qui fait voir que les deux points q & Q décriront des eſpaces égaux en tems égaux, & le centre de gravité de deux corps arrivera en même-tems à la verticale. Si le corps p eſt aſſez petit pour qu'on puiſſe regarder ſa maſſe comme concentrée dans ſon centre de gravité, on aura un pendule ſimple ordinaire, & dans ce cas $M' = p.\overline{ct}^2$; car ici M' repréſente ce que nous avons appellé ci-devant *la ſomme des momens des forces*; ainſi par la premiere méthode (qui réuſſit dans ce cas) on a $M' = p.\overline{ct}^2$, & alors l'on a l'équation $\frac{P.CT}{M} = \frac{p.ct}{p.\overline{ct}^2}$, qui donne $tc = \frac{M}{P.CT}$. Mais P.CT eſt le produit

de la masse, ou poids P par la distance de son centre de gravité à l'axe T, & ce produit est toujours égal à ce qu'on a appellé *la somme des forces*, comme il est aisé de le voir (voyez ce que nous avons dit dans la seconde Section touchant le centre de gravité en faisant attention qu'on a désigné par somme des momens, ce qu'on désigne ici par somme des forces), tandis que M. désigne la somme des momens des forces.

Si l'on prend donc sur la ligne TCB une longueur égale à ct, on aura le centre d'oscillation du corps donné & ct sera le pendule simple qui fera ses oscillations de même amplitude dans le même-tems que le corps donné fera les siennes.

Si l'arc ca est fort petit, de sorte qu'il soit censé se confondre avec l'ordonnée cn, on a le sinus total, ou $1 : ct : \text{sin.}\ ctn : cn = ca$, ou $\text{sin.}\ ctn = \frac{ca}{ct}$, on a de plus $\frac{qr}{tq} = \frac{cb}{ct}$; mais dans le pendule simple, $M' = p.\overline{ct}^2$; donc en substituant ces valeurs dans l'équation $\frac{qr}{tq} = \frac{p.ct.\text{sin}.ctn}{M'}$, on aura $\frac{cb}{ct} = \frac{p.ca}{p.\overline{ct}^2}$; donc $p.cb = \frac{p.ca}{ct}$. De même si on suppose que le pendule parte du point b toujours fort proche de la verticale tn & qu'il décrive dans un tems infiniment petit l'arc bf, on aura $p.bf = \frac{p.ba}{ct}$; donc $\frac{p.ca}{ct} : \frac{p.ba}{ct} :: p.cb : p.bf :: cb : bf$; or $\frac{p.ca}{ct}$ &

$\frac{p.ba}{ct}$ désignent les forces qui font parcourir au corps p, les espaces cb, bf, & ces forces sont évidemment proportionnelles à ces espaces; donc ces espaces sont parcourus en tems égaux. Il en est de même pour tous les autres élémens correspondans des arcs totaux ca, ba; *donc les oscillations d'un même pendule qui décrit des arcs ca, ba fort petits, quoique inégaux, se font en tems égaux.*

REMARQUE I. Le centre d'oscillation étant le même que celui de percussion, il est visible que la seconde méthode qu'on a employée pour trouver le centre de percussion est la seule exacte.

52. REMARQUE II. Nous venons de dire que le centre d'oscillation étoit le même que celui de percussion, afin que les commençans ne soient pas obligés d'en aller chercher ailleurs la démonstration; soient supposés deux corps A & B (fig. 34) assez petits pour qu'on puisse les considérer comme des points placés dans le plan BMA qui fait ses oscillations autour d'un axe t qui lui est perpendiculaire. Soit supposée une ligne tCm qui passe par le centre de percussion cherchée C, je tire les lignes Ag, Bm respectivement perpendiculaires aux lignes tA & tB, les lignes Ap & Bx perpendiculaires sur tm, & du point C les lignes Cg, CM respectivement perpendiculaires sur Ag, Bm. Cela posé, Ag étant la direction du mouvement du corps A, mB celle du mouvement du corps B, il est visible que si les forces des corps, c'est-à-dire, les produits de leurs masses par leurs distances à l'axe t, sont en raison inverse des distances Cg, CM du point C à leurs direc-

tions, les forces par rapport au point C seront égales, & on pourra les considérer comme réunis dans ce point qui sera le centre de percussion. Soit $tA = a$, $tp = b$, $tB = c$, $tx = D$, $tC = n$. Les triangles tAp & tAf, Cgf & tBx, tBm & CMm donneront 1°. $tp : tA :: tA : tf = \frac{a^2}{b}$. 2°. $tx : tB :: tB : tm = \frac{cc}{D}$; donc $fC = n - \frac{aa}{b}$, & $mC = \frac{cc}{D} - n$. 3°. $tA : tp :: Cf : Cg = \frac{b.n - aa}{a}$. 4°. $tB : tx :: Cm : CM = \frac{cc - D.n}{c}$; donc si p & q représentent les masses des corps A & B, on aura $tA.p = a.p$ & $Bt.\ q = c.q$, & parce que les forces de ces corps, par rapport au point C, doivent être en raison inverse des lignes Cg, CM, on a la proportion $a.p : c.q :: CM = \frac{cc - D.n}{c} : Cg = \frac{b.n - aa}{a}$; donc $p.nb - aap = q.cc - Dnq$, ou $p.b.n + D.q.n = aap + q.cc$; donc $n = \frac{aap + cc.q}{b.p + D.q}$, c'est-à-dire, que la distance tc du centre de percussion à l'axe de balancement t se trouve en divisant la somme des produits de la masse de chaque corps multipliée par le quarré de sa distance par rapport à l'axe de balancement, par la somme des forces, ou par la somme des produits des masses multipliées par la distance comprise entre l'axe de balancement & la perpendiculaire menée du centre de chaque corpus-

cule A & B à la ligne tC qui dans les corps réguliers passe par le milieu de tous les élémens.

On voit donc que le centre de percussion est le même que celui d'oscillation. Si les points A & B n'étoient pas supposés dans le même plan, on supposeroit que la ligne tm représente un plan qui passe par le point C de percussion, que les lignes Ap, Bx représentent les distances des points A & B par rapport à ce plan, & l'on auroit évidemment la même formule; mais les lignes désignées par b & D seroient dans le plan dont on vient de parler. Si on conçoit maintenant que le point C représente la projection d'une ligne perpendiculaire à la ligne tm perpendiculaire à l'axe t de balancement, & qui passe par le point C, & que de plus cette ligne soit située dans le plan dont on vient de parler, il est visible que les momens des forces des corps A & B seront égaux par rapport à cette ligne, & qu'il seront les mêmes que si la position de cette ligne restant la même, tous ces corps étoient transportés sur le plan dont on vient de parler, chacun dans le point déterminé par une perpendiculaire tirée de chaque corps ou point (car on considere ici ces corps comme des points) à ce plan: or alors le centre de percussion se trouveroit évidemment sur une ligne tm qui passeroit par le centre de gravité de ces corps; donc il s'y trouvera de même que les corps oscillans soient réguliers ou irréguliers; donc dans la recherche des centres de percussion ou d'oscillation on doit employer la seconde méthode & non la premiere.

53. LEMME. *Si un corps* A (*fig.* 35) *reçoit à la fois deux impulsions représentées par les droites* AB *&* AD,

il parcourra la diagonale A C *du parallelogramme* A B C D, *dans le même tems qu'il auroit parcouru l'un des deux côtés* A B, A D, *s'il n'avoit reçu qu'une des deux impulsions dont on vient de parler.* En effet par l'impulsion A B, si elle agissoit seule, le mobile A parcourroit en s'éloignant de AD selon une direction parallèle à D C une ligne = D C; mais par la seule impulsion AD il s'éloigneroit de AB dans le même-tems, en parcourant dans une direction parallèle à B C une ligne égale à B C; donc par l'action combinée des deux impulsions, il doit parvenir en C: car de cette maniere il aura satisfait aux deux impulsions en même-tems autant que cela se peut. Mais aussi-tôt que le mobile A a reçu les deux impulsions simultanées dont on vient de parler, il doit se mouvoir dans une ligne droite; donc il doit décrire la diagonale A C dans le tems qu'il auroit parcouru l'un des côtés A D ou A B, s'il eût reçu une seule impulsion. Cette proposition est d'ailleurs une vérité d'expérience connue depuis long tems.

COROLLAIRE. Donc la force composée qui résulte des deux forces composantes A B, A D, peut être exprimée par la diagonale d'un parallelogramme, dont A B & A D sont deux côtés contigus; & réciproquement la force composée A C peut se décomposer en A B & A D; de maniere que si le corps A, après avoir reçu la force A C, vient à rencontrer aussi-tôt un obstacle selon la direction A B qui lui ôte la force A B, il se mouvera dans la direction & avec la force A D.

54. PROBLEME. *Dans quel cas doit-il y avoir équilibre dans le levier?* Soient deux lignes ou rayons inflexibles d'égale longueur C B, C F (fig. 36) mobiles autour du centre C, & poussées par des forces égales B E, F H dans des directions perpendiculaires à ces rayons, afin qu'il y ait équilibre entre ces forces. Qu'on mène la ligne D F K perpendiculaire sur B C prolongée, & qu'on acheve le parallelogramme F O H K; la force F H pourra se décomposer en deux autres F O, F K, dont la premiere agissant dans la direction F C, ne sauroit contribuer au mouvement du rayon autour du point C. Mais les triangles rectangles

semblables FKH, DFC donnent DC : FC :: FH : $FK = \frac{FC.FH}{DC} = \frac{BC.BE}{DC}$. Ainsi les forces parallèles BE, FK seront en équilibre si l'on a BE : FK :: DC : BC.

COROLLAIRE I. Si l'on prolonge la ligne KFD de maniere qu'elle aille rencontrer en A un rayon CA, il est évident que la même force FK agira avec le même avantage pour faire tourner le plan FACB autour du point fixe C dans quelque point de la droite FA qu'elle soit appliquée. Si donc on imprime aux rayons inflexibles inégaux CB, CA qu'on suppose joints ensemble & mobiles autour du centre C, des forces BE, AL en raison inverse des distances DC, BC au centre C de mouvement; ces forces seront en équilibre.

COROLLAIRE II. Ainsi toute l'action que la force AL exerce pour faire tourner autour du centre C, la verge inflexible ACB sera exprimée par AL.DC, & BE.BC sera l'effort de la force BE; & si A & B sont des corpuscules (dont les pesanteurs soient proportionnelles aux masses), les actions dont on vient de parler seront exprimées par A.DC & B.BC. Ainsi ces actions seront en général en raison composée des masses & des distances à l'axe du mouvement qui est une ligne passant par le centre C & perpendiculaire au plan FAB.

COROLLAIRE III. Si la puissance BE est à la puissance AL dans un plus grand rapport que DC : BC, le point B commencera à se mouvoir dans la direction de la puissance BE, & le point A sera mu dans un sens opposé. Ceci sert à expliquer l'artifice du *levier* & de *l'axe dans le tour* : car dans ces machines la puissance motrice est appliquée à une distance de l'axe du mouvement d'autant plus grande que la résistance qu'il faut vaincre est plus grande. La théorie du *coin* peut aussi se déduire de ce qu'on vient de dire : car la force que le marteau exerce selon la longueur du coin AC (fig. 37) est à la force perpendiculaire à la surface

CB qu'on veut diviser comme AC : AD, ou comme BC : AB, c'est-à-dire, comme le côté du coin est à la base. La *vis* n'étant autre chose qu'une espece de coin mis en mouvement par un levier, ses effets s'expliquent par les mêmes principes ; mais les poulies peuvent se rapporter à l'axe dans le tour.

COROLLAIRE IV. Toute la force effective qui agit pour faire tourner la verge inflexible ACB (fig. 36) autour du centre C, sera évidemment exprimée par BE. BC — AL. DC ; & si cette verge commence à se mouvoir, le mouvement angulaire de chacun de ses points sera le même, & leur vîtesse sera proportionnelle à leur distance au point C, c'est-à-dire, que le point A aura d'autant moins de vitesse que la distance DC sera plus petite, ou (ce qui revient au même) que la force AL sera plus grande. Ainsi dans toutes les machines on perd du côté du tems ce qu'on gagne du côté des forces & réciproquement ; de sorte que plus la force est petite, plus long-tems elle doit agir pour produire un certain effet par le moyen d'une machine.

Du mouvement de rotation & de projection.

55. SI un corps est divisé par un plan BTZ (fig. 38) en parties égales, semblables & semblablement situées de chaque côté, & qu'on imprime à ce corps une force dont la direction soit dans ce plan, sans cependant passer par son centre de gravité G ; ce corps recevra deux mouvemens, l'un de projection & l'autre de rotation, autour d'un axe perpendiculaire au plan, & passant par le point G. Il est en effet évident que si l'on imprime au corps dont il s'agit une force qui passe par le point H toutes les particules du corps, choqué ne pourront pas acquérir des mouvemens parallèles à la ligne selon laquelle s'est faite l'impulsion. Car le mouvement produit par le choc peut évidemment être détruit par une force égale & contraire qui agiroit sur le point H. Mais si tous les élémens du corps avoient des mouvemens parallèles, & que par une force imprimée au point H ce point restât en repos, à cause des forces inégales qui agiroient du côté de HT & de

HB, le mouvement de toutes les particules ne sauroit être anéanti, & de-là on tire le théorême suivant.

THÉOREME. *Si la direction d'une force imprimée à un corps ou à un système de corps ne passe pas par son centre de gravité, tous les élémens qui composent le corps ou le système des corps ne pourront pas recevoir des mouvemens parallèles.*

Maintenant si l'impulsion se fait selon la direction du plan BTZ, il est visible que ce plan & toutes les lignes BGT situées dans ce plan seront toujours dans un même plan immobile; & parce que la ligne BGT ne reçoit pas un mouvement parallèle, elle doit converger vers un point C situé dans ce plan immobile, ou ce qui revient au même, le corps doit commencer à tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan immobile & passant par le point C. Qu'on divise donc ce corps en élémens prismatiques parallèles à cet axe de rotation, il est évident que les particules de chacun de ces élémens auront une vîtesse commune proportionnelle à leur distance à l'axe de mouvement, de maniere que la vîtesse du centre de gravité G étant supposée $= u$, la vîtesse d'un autre point quelconque P sera $= \frac{CP.u}{CG}$, & sa direction PF sera perpendiculaire à CP.

Décomposons maintenant cette vîtesse en deux autres, dont l'une $\frac{CP.u}{CG} \cdot \frac{HF}{PF} = \frac{PH.u}{CG}$ ait une direction parallèle à l'axe TB qui passe par le centre de gravité & l'axe de rotation, la seconde $\frac{CH.u}{CG} = u + \frac{GH.u}{CG}$ dans la direction PH perpendiculaire au même axe. Si l'on mène PK perpendiculaire à PG, les deux vîtesses $\frac{PH.u}{CG}$, & $\frac{GH.u}{CG}$, ou $\frac{GP.u}{CG} \cdot \frac{HK}{PK}$, & $\frac{GP.u}{CG} \cdot \frac{PH}{PK}$ donne-

ront une vîteſſe compoſée $\frac{GP.u}{CG}$ dans la direction PK. C'eſt pourquoi lorſque les parties du corps commenceront à tourner autour de l'axe de rotation dont nous venons de parler, elles recevront un mouvement double $u + \frac{GP.u}{CG}$, l'un commun au centre de gravité, & l'autre proportionnel à la diſtance de chaque particule P a ce même centre de gravité. Ce ſecond mouvement qui tend à faire tourner autour du point G les parties également diſtantes de ce centre avec des vîteſſes égales, ne ſauroit affecter le mouvement commun, & c'eſt pourquoi tout le corps avancera en ligne droite avec le mouvement commun, tandis qu'il tournera en même-tems autour d'un axe perpendiculaire au plan BTZ, & paſſant par le centre de gravité G. De ſorte que le point C dont la vîteſſe circulaire eſt la même que la vîteſſe progreſſive du centre de gravité G, décrira la cycloïde vulgaire à chaque révolution du corps autour du centre G, & l'eſpace parcouru par G à chaque révolution ſera égal à la circonférence du rayon CG.

COROLLAIRE I. Le point O auquel il faut appliquer la force impulſive néceſſaire pour commencer à faire tourner le mobile autour du point C eſt évidemment le centre de percuſſion du corps conſidéré comme ſuſpendu en C: car ſi l'on imprimoit en O une force égale & oppoſée, le mobile reſteroit en repos; ainſi ſelon ce que nous avons dit ci-deſſus (52) le point O ſera auſſi le centre d'oſcillation. Dans un corps ſphérique dont le rayon eſt $= a$ ſuſpendu à la diſtance $a + b$ de ſon centre de gravité, le centre de percuſſion eſt (49) $= \frac{7aa + 10ab + 5bb}{5a + 5b} = a + b + \frac{2}{5} \cdot \frac{aa}{CG}$, en faiſant $a + b = CG$; donc $OG = \frac{2}{5} \cdot \frac{aa}{CG}$.

COROLLAIRE II. Si nous déſignons le rapport du rayon à la circonférence par $1 : p$, le tems périodique de la révolution d'une planète par T, le tems d'une révolution ſur ſon axe par t, & que R & r repréſen-

tent les rayons de l'orbite & de la planète, le centre de gravité de la planète que je suppose sphérique & homogène, parcourra pendant une révolution diurne l'espace $\frac{ptR}{T}$; car l'on a $1 : p :: R$: à la circonférence de l'orbite $= pR$. Mais $T : pR :: t : \frac{pRt}{T}$, espace parcouru pendant une révolution diurne. De plus CG est le rayon d'un cercle dont la circonférence est égale à l'espace que le centre de gravité G parcourt tandis que le mobile fait une révolution autour du point G; donc on aura $1 : p :: CG$: à l'espace $\frac{ptR}{T}$; ainsi $CG = \frac{tR}{T}$; & enfin $OG = \frac{2}{5} \cdot \frac{rr}{CG}$ sera $= \frac{2Trr}{5tR}$.

COROLLAIRE III. Puisque par rapport à la Terre l'on a à très-peu près $t : T :: 1 : 365\frac{1}{4}$; si on suppose la parallaxe moyenne du Soleil de 9″, ce qui donne le rayon r de la Terre est à la distance moyenne R de la Terre au Soleil comme le sinus de 9″ est au sinus total, ou $r : R :: fin.\ 9'' : 1 :: 1 : 22918$, on aura $CG = \frac{22918.r}{365\frac{1}{4}}$, c'est-à-dire, environ $62\frac{3}{4}$ demi-diamètres terrestres. Donc $OG = \frac{1.r}{157}$; ainsi en appliquant l'impulsion primitive à cette distance du centre de la Terre, il en auroit résulté le rapport actuel du mouvement diurne & annuel. A l'égard de la Lune son mouvement diurne autour de son axe s'achevant dans le même tems que son mouvement périodique autour de la Terre, l'on aura $CG = \frac{tR}{T} = R$ (*); mais le

(*) Environ 60 demi-diamètres terrestres.

rayon r de la Lune est à celui de la Terre comme 100 : 365 ; donc CG = 219. r, & OG = $\frac{2.r}{1095}$. De même si les rayons de Jupiter & de la Terre sont entr'eux comme 10 : 1, les distances au Soleil comme 52 : 10, les tems périodiques autour du Soleil comme 12 : 1, le tems des révolutions autour des axes comme 10 : 24, & qu'on fasse le rayon de Jupiter = r, on aura CG = $\frac{9.r}{8}$ à peu-près, & OG = $\frac{16}{45}.r$. Et parce que les rayons de la Terre & de Mars sont dans le rapport de 5 : 3, leurs distances au Soleil comme 2 : 3, les tems des révolutions périodiques comme 1 : 2, & les tems des révolutions autour de leurs axes à peu-près égaux, si on fait le rayon de Mars = r, on aura CG = 78. r, & OG = $\frac{r}{195}$.

56. PROBLÊME. *Si on imprime à un corps quelconque une force qui commence à le faire tourner autour d'un point donné, trouver la somme des momens de toutes les particules de ce corps, ayant égard à leur masse, leur vîtesse, & leur distance à l'axe de rotation.* Concevons qu'un corps M avec la vîtesse U & la quantité de mouvement MU agisse contre un autre corps O (fig. 39), de maniere que le corps choqué commence à tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan PCO, & passant par le point C ; il est visible que si on imprimoit au point O une force contraire & = MU, tout le mouvement de rotation seroit détruit. Mais supposons que le mouvement de rotation est déja commencé, & appellons P un élément prismatique situé en P & parallèle à l'axe de rotation ; si nous faisons = u la vîtesse d'un élément situé à la distance 1 de l'axe de rotation, PC. u sera la vîtesse de rotation & P. PC. u sera le mouvement de l'élément P dans la direction PK perpendiculaire à PC. Supposons que du centre C on ait décrit avec le rayon CO un arc circulaire OF qui coupe PK en F, la force P. PC. u pourra être supposée appliquée en F, & décomposée en deux autres,

dont l'une agira dans la direction du rayon FC, la direction de l'autre étant perpendiculaire au même rayon. Cela posé, la force totale sera à la force perpendiculaire au rayon comme FK : FH :: FC : PC, ou ce qui revient au même, la force perpendiculaire sera $= \frac{P.\overline{PC}^2.u}{OC}$. Or selon ce qu'on a dit ci-dessus, cette force agira de la même maniere pour faire tourner le mobile, soit qu'on l'applique en F ou en O à la même distance du centre C dans des directions perpendiculaires aux rayons FC, OC. Ainsi le mouvement de rotation ne pourra être détruit qu'en appliquant au point O une force contraire & égale à la somme de tous les $\frac{P.\overline{PC}^2.u}{OC}$; or cette somme est $= \frac{S.P.\overline{PC}^2.u}{OC}$; ainsi MU doit être $= \frac{S.P.\overline{PC}^2.u}{OC}$. Donc $M.OC.U = S.P.\overline{PC}^2.u$; & le moment de toute la force imprimée doit être égal à la somme des produits de chaque élément par la distance PC & la vîtesse PC.u.

CorolLaire. Les points O & P ne changeant pas, si l'on conçoit que le point C s'éloigne continuellement, la raison de PC : OC approchera de celle de 1 : 1 plus près qu'aucune quantité donnée, & lorsqu'à la fin on supposera PC = OC, les mouvemens des points O & P auront des directions parellèles, & le mouvement de rotation se changera en mouvement de progression. Si l'on suppose CP = 1, la vîtesse du point P sera $= u$, & l'on aura M.U = S.P u; de sorte que comme dans les corps qui se choqent sans obstacle, il y a la même quantité de mouvement avant & après le choc, de même dans les corps qui ont un mouvement de rotation il y a toujours la même quantité des momens dans le sens que l'on prend ici ce terme.

57. Probleme. *Déterminer le mouvement de projection & celui de rotation lorsqu'un corps est mis en mouvement par une force* F *qui agit sur le point* O (*fig.* 38). Soit

u la vîtesse avec laquelle le centre de gravité G commence à tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan BTZ & passant par le point C ; $\frac{CP.u}{CG}$ sera la vîtesse de rotation d'un élément prismatique situé en P, & son moment sera $\frac{P.\overline{CP}^2.u}{CG}$, & par le problême précédent, F.OC sera $= \frac{S.P.\overline{PC}^2.u}{CG}$. Mais parce que selon ce qu'on a dit ci-dessus (55), le point O est le centre de percussion du corps supposé suspendu en C, on aura $OC = \frac{S.P.\overline{CP}^2}{CG.M}$, M désignant la masse du mobile. Donc $\frac{F}{M} = u$, & $F = M.u$. Mais u étant la vîtesse avec laquelle le centre de gravité commence à tourner autour du point C, est évidemment la vîtesse avec laquelle ce centre & toutes les particules du mobile se meuvent en droite ligne ; donc la vîtesse avec laquelle le centre de gravité d'un corps frappé dans un point O se meut dans la direction de la force impulsive sera la même que si toute la force F avoit été appliquée en G dans une direction parallèle à celle qui agit en O.

Maintenant si l'on appliquoit en même-tems aux points O & G deux forces égales F & — F avec des directions contraires, mais parallèles ; par la premiere force toutes les particules du mobile acquerroient la vîtesse commune u de projection, & de plus la vîtesse $\frac{GP.u}{CG}$ de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan BTZ & passant par le centre G de gravité (55) : mais la force — F produiroit la vîtesse commune — u qui détruiroit la vîtesse de projection. Ainsi le centre de gravité demeureroit fixe, & il ne resteroit que la vîtesse

de rotation $\frac{GP.u}{CG}$ proportionnelle à la distance au centre de gravité, & tendant de part & d'autre en sens contraires. De maniere que le mouvement de rotation sera le même que si le centre de gravité restant fixe, toute la force étoit employée à faire tourner le corps, & les forces centrifuges des élémens du corps seront proportionnelles à leurs distances à l'axe de rotation (*).

58. PROBLEME. *Trouver la vîtesse de rotation d'une sphère autour d'un diamètre perpendiculaire à un autre diamètre à l'extrémité duquel ou imprimeroit une force* (*fig.* 40). Si le plan d'un cercle perpendiculaire à l'axe & passant

(*) Quoique nous ayons parlé assez au long des forces centripètes & centrifuges dans la seconde édition de nos institutions, je crois devoir expliquer ici ce que c'est que la force centrifuge dans un cercle. Si un mobile A (fig. 41) parcourt un arc infiniment petit AM d'un cercle AMF, il est visible que la force tangentielle, c'est-à-dire, qui tend à lui faire parcourir la tangente AB fait effort pour l'éloigner du centre C de la quantité BM = B*t*. Car à cause de BM que je suppose parallèle à AC & de l'arc AM infiniment petit, les angles ACB, *t*BM sont égaux & infiniment petits; ainsi les angles B*t*M, BM*t* ne différant que d'une quantité inassignable sont égaux, aussi-bien que les côtés B*t* & BM qui leur sont opposés. Mais B*t* est la quantité dont la force tangentielle tend à éloigner le mobile du centre C du cercle; donc pendant que le mobile parcourt l'arc AM, il fait pour s'éloigner du centre C un effort exprimé par BM : c'est cet effort que j'appelle *force centrifuge*. La force centripète au contraire est un effort qui ramène le mobile vers la circonférence, & qui l'empêche de suivre la tangente AB. Cela posé, il est visible que si deux mobiles A & *a* parcourent deux cercles différens, & deux arcs semblables dans le même tems, les forces centrifuges BM, *bm*, ou AP & *ap* seront dans les rapports des rayons AC & *a*C, puisqu'elles sont représentées par les sinus verses des arcs infiniment petits & semblables AM & *am*.

par

par le centre, est supposé tourner de maniere qu'à la distance 1 du centre la vîtesse soit $= u$, le point b situé à une distance x, aura une vîtesse de rotation désignée par x. Si p exprime la circonférence du rayon 1, px sera la circonférence du rayon x, multipliant cette circonférence par le quarré xx de la vîtesse du point b, px^3 sera le moment de cette circonférence, $dx.p.x^3$ la différence des momens de l'aire du cercle dont le rayon est x, & $\frac{px^4}{4}$ le moment de cette aire. Si donc on conçoit que le demi-cercle TCB (fig. 40) engendre en tournant autour de TB, une sphère au point L de laquelle on imprime la force F, & qu'on fasse le rayon de cette sphère $= r$, $GP = z$, $Pp = dz$, le moment de l'élément correspondant à Pp sera $= \frac{1}{4} p. \overline{PM}^4. Pp = \frac{p}{4} . dz (r^4 - 2r^2 zz + z^4)$, & le moment de l'hémisphère $= \frac{2}{15} p.r^5$. Ainsi le moment de la sphère entiere sera $= \frac{4}{15} . p.r^5$. Si l'on fait $= u$ la vîtesse de rotation du point L situé sur l'équateur, afin que la vîtesse d'un point situé à la distance 1 du centre soit $= \frac{u}{r}$, & qu'on substitue cette quantité à la place de l'unité de vîtesse, le moment de la sphère deviendra $\frac{4pr^4u}{15}$, quantité à laquelle on doit égaler le moment $F.r$ de la force imprimée, pour avoir $u = \frac{15.F}{4.p.r^3} = \frac{5.F}{2.m.}$, en écrivant m au lieu de $\frac{4}{3} p.r^3$ qui désigne la solidité de la sphère.

COROLLAIRE I. Si un sphéroïde applati vers les pôles T & B, dont le demi-diamètre de l'équateur soit $= a$, tourne autour de l'axe TB, les momens des cercles parallèles qu'on peut décrire dans la sphère & dans le sphéroïde avec les rayons PM, PN seront entr'eux comme $\overline{PM}^4 : \overline{PN}^4 :: \overline{GL}^4 : \overline{GQ}^4 :: r^4 : a^4$.

Ce rapport étant le même pour toutes les sections correspondantes perpendiculaires à l'axe, le moment du sphéroïde sera $= \frac{4}{15}. p. a^4. u$; & si le point Q de l'équateur a une vîtesse $= v$, en écrivant $\frac{r. v}{a}$ au lieu de u, le moment du sphéroïde deviendra $\frac{4}{15} p. a.^3. r. v$.

COROLLAIRE II. Si nous concevons que la force F est imprimée au point Q de l'équateur du sphéroïde au lieu d'être appliquée au point L de l'équateur de la sphère, on aura de même $F. a = \frac{4}{15} p. a^3. r. v$, & $v = \frac{15. F}{4 p. a^2. r}$: ainsi les vîtesses angulaires que la même force peut produire dans le sphéroïde applati & dans la sphère, en la supposant appliquée successivement à l'équateur de ces solides, seront entr'elles comme $\frac{15. F}{4. p. r^3}$: $\frac{15. F}{4. p. a^2 r}$ :: $a^2 : r^2$; c'est-à-dire, en raison doublée du grand axe du sphéroïde au petit.

Du moment d'Inertie.

LE *moment d'inertie* n'est autre chose que la somme des élémens d'un corps multipliés chacun par le quarré de sa distance à un axe. Comme la recherche de ces momens peut être très-utile dans les Sciences Physico-Mathématiques, nous croyons devoir en dire quelque chose.

59. PROBLÊME. *Si une ligne droite inflexible qui peut tourner autour d'un point* C (*fig.* 42) *porte un corps* B *qui a de l'inertie, mais que nous supposons sans gravité, & que cette droite par l'action d'une puissance que nous appellerons* M *appliquée en* A, *tourne autour du point* C, *on demande la force accélératrice que reçoit le corps* B *en décrivant l'arc* B*b*. Si la force M étoit appliquée au corps B, sa force accélératrice seroit $= \frac{M}{B}$; mais parce

que la force M eſt appliquée en A, on trouvera la force motrice du corps B en faiſant BC : AC :: M : $\frac{CA.M}{BC}$. C'eſt pourquoi la force accélératrice du corps B ſera $= \frac{CA.M}{BC.B}$. Mais CA.M eſt le moment de la puiſſance ; ainſi la force accélératrice avec laquelle le corps B tourne autour du point C eſt comme le moment de la force motrice diviſée par le produit de la maſſe B & de ſa diſtance au centre C du mouvement.

60. PROBLEME. *Trouver une maſſe* A *qui ſubſtituée à la place de la maſſe* B *à la diſtance* AC *fait décrire à la ligne* AC *le même angle* ACa *que lui peut faire décrire le corps* B. Si la force motrice à la diſtance AC eſt ſuppoſée $=$ M, la force accélératrice du corps A ſera $= \frac{M}{A}$, celle du corps B étant $= \frac{CA.M}{B.CB}$.

Mais afin que le corps A décrive le même angle que le corps B, leurs forces accélératrices doivent être entre elles comme les arcs A*a*, B*b*. L'on aura donc $\frac{M}{A} : \frac{CA.M}{B.CB} :: Aa : Bb :: AC : BC$; donc $A.\overline{AC}^2 = B.\overline{BC}^2$, & $A = \frac{B.\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}$, *c'eſt-à-dire, que cela arrivera lorſque les maſſes des deux corps* A, B *multipliées par le quarré de leur diſtance au point* C *donneront des produits égaux.*

Lorſque à la diſtance AC on ſubſtituera la maſſe $A = \frac{B.\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}$, cette maſſe ſera accélérée par la force motrice M, de la même maniere que la maſſe B a la diſtance CB.

LEMME. *La force qui fait décrire un arc* A*a* *à un*

corps A *dans un tems donné, est comme la puissance motrice divisée par la masse* A *multipliée par la distance* C A. Si nous supposons que le corps A sollicité par la puissance p décrit un arc infiniment petit A a dans le tems dt, l'on aura $Aa = \frac{p}{A} \cdot dt$. Mais la force giratoire lui fait décrire l'angle A C a ou plutôt l'arc A a qui mesure cet angle, & cet angle mesuré par un arc de cercle dont le rayon soit supposé $= 1$, est $= \frac{Aa}{CA}$. Mais $\frac{Aa}{CA} = \frac{p}{A.CA} \cdot dt$; ainsi pendant le tems dt la force giratoire est comme la puissance motrice divisée par le moment de la masse.

61. PROBLÊME. *Déterminer le moment d'inertie d'un corps respectivement à un axe qui passe par son centre de gravité.* Supposons que la ligne $AB = M$ (*fig.* 43) inflexible tourne autour de l'axe b D situé au milieu de la ligne A B. Soit $AC = \frac{a}{2} = CB$, $CP = x$; chaque particule de cette ligne ou dM peut être désignée par $Pp = dx$, dont le moment d'inertie est $= x^2 dx$. Donc le moment d'inertie de la ligne PC est $= Sx^2 dx$; & le moment d'inertie de la ligne PP sera $= 2Sx^2 dx = \frac{2x^3}{3}$. Donc le moment d'inertie de la ligne AB est $= \frac{a^3}{12}$, à cause de $x = \frac{a}{2}$. Mais la masse M de la ligne ou du fil inflexible AB est $= a$; donc le moment d'inertie de la ligne AB sera représentée par $\frac{Ma^2}{12}$.

Supposons que la figure ou la lame MARB tourne autour de l'axe AB, qui passant par le centre de gravité G, divise cette lame en deux parties égales. Soit $AP = x$, $PM = y$, $Pp = dx$, $n'm = dy$, $PQ = z$, $Qq = dz$, & $QqnN = dx\,dz$, le moment d'inertie de l'élément QQNN sera $= 2Sz^2 dz\,dx$.

En supposant dx constant, parce que AP ne change pas par rapport à l'élément QQNN, l'on a $2 S z^2 dz dx = \frac{2 z^3 dx}{3}$; dont l'intégrale prise de maniere que l'on ait PQ = PM, ou $z = y$, donnera le moment d'inertie de toute la partie MAR $= \frac{2 S y^3 dx}{3}$. On trouvera de même que le moment d'inertie de la partie TBZ est $= \frac{2 S. \overline{TI}^3. Ii}{3}$, en faisant $Ii = d. GI$.

Si l'axe de balancement DC est perpendiculaire au premier & passe par le centre de gravité G de la lame, cet axe ne divisera pas la lame de la même maniere & en parties égales & semblables, du moins dans tous les cas; c'est pourquoi il n'est pas permis de supposer $Ls = LS$, parce que la partie CAD peut n'être pas égale & semblable à la partie CBD. Soit $AG = a$, on aura $GP = a - x$. Mais le moment d'inertie de l'élément $qQNn$ respectivement à l'axe CD sera $= (a - x)^2. dz dx$. C'est pourquoi le moment d'inertie de l'élément $MmrR$ sera $= (a - x)^2 z dx$, en regardant z seul comme variable. Donc ayant fait $z = MP = PR = y$, le moment d'inertie de la partie CAD sera $= 2 S. (a - x)^2 y dx = 2 S. \overline{GP}^2. MP. d. GP$. On trouvera de même que le moment d'inertie de la partie CBD est $2 S. \overline{GI}^2. IT. d. GI$, & de-là le moment d'inertie de toute la lame CADB sera $= 2 (S. \overline{GP}^2. MP. d. GP + S. \overline{GI}^2. IT. d. GI)$.

Soit enfin l'axe de balancement gGa perpendiculaire au plan de la lame, le moment d'inertie de la particule $qQNn$ par rapport à cet axe sera $= \overline{GQ}^2. qQnN = (\overline{GP}^2 + \overline{QP}^2). QNnq = [(x - a)^2 + z^2] dz dx$. Donc en supposant z seul variable, le moment de l'élément

QNNQ est $= 2\left(\frac{z^3}{3} + \overline{x-a}^2 . z\right) dx$, & supposant $z = MP$, le moment d'inertie de l'élément $Mmr R$ sera $= 2\left(\frac{y^3}{3} + \overline{x-a}^2 . y\right) dx = \left(\frac{\overline{MP}^2}{3} + \overline{GP}^2 . MP\right) dx$.
Donc le moment d'inertie de la partie de la lame CAD est $= 2S\left(\frac{\overline{MP}^2}{3} + \overline{GP}^2 . MP\right) dx$.

S'il s'agit de la partie CBD, son moment d'inertie sera $= 2S\left(\frac{\overline{TI}^3}{3} + TI.\overline{GI}^2\right) d.GI$. C'est pourquoi le moment d'inertie de toute la lame est $= 2S\left(\frac{\overline{MP}^2}{3} + \overline{GP}^2 . MP\right) dx + 2S\left(\frac{\overline{TI}^3}{3} + \overline{GI}^2 . TI\right) d.GI$.

Il est donc aisé de voir que les momens d'inertie par rapport aux axes AB & CD, savoir $2S. \frac{\overline{PM}^3}{3} dx + 2S.\overline{GP}^2 . PM dx + 2S. \frac{\overline{TI}^3}{3} d.IG + 2S.\overline{IG}^2 . TI.d.IG$ sont égaux au moment d'inertie de la lame par rapport à l'axe perpendiculaire à son plan.

Si on demandoit le moment d'inertie d'un solide engendré par la révolution de la figure ACB autour de l'axe AGB, on remarqueroit que pendant la révolution du plan ACB, la particule $QqnN$ décrit une espèce d'anneau dont la solidité est $= 2cz.dzdx$, en faisant $1 : c$ le rapport du rayon à la demi-circonférence. Multipliant cette quantité par $z^2 = \overline{PQ}^2$, $S. 2cz^3 dz. dx = \frac{cz^4 dx}{2}$ (en supposant dx con-

ſtant) ſeroit le moment de tous les anneaux décrits par l'élément $PMmp$ par rapport à l'axe AB, & le moment d'inertie du ſolide ſeroit $= S. \frac{cz^4 dx}{2}$ (en ſuppoſant $z = PM = y) = S. \frac{c.\overline{PM}^4}{2} d.AP$.

62. PROBLÊME. *Trouver le moment d'inertie d'un rectangle* AEF (*fig.* 45) *dont le centre de gravité* G *eſt au milieu de la figure.* Soit l'axe $AB = a$, l'axe $CD = EN = b$; donc $AG = \frac{a}{2}$, $EB = \frac{b}{2} = MP = y$. Le moment d'inertie par rapport à l'axe AB ſera $= 2S. \frac{y^3 dx}{3} = 2S. \frac{b^3 dx}{24} = \frac{b^3 x}{12} = \frac{b^3 a}{12}$, en faiſant $x = a$. Le moment d'inertie, par rapport à l'axe CD, ſera (par le problême précédent) $= 2S. \overline{GP}^2 . PM.d.PG + 2S.\overline{GT}^2 . IT.d.IG = 4S.\overline{GP}^2 . PM.d.PG$, parce que la partie de la gauche eſt égale & ſemblable à celle de la droite. Soit $GP = x$, le moment cherché ſera $= 4S \frac{bx^2 dx}{2} = \frac{2bx^3}{3} = \frac{ba^3}{12}$, en ſuppoſant $x = \frac{a}{2}$. Mais le moment d'inertie par rapport à l'axe aGg perpendiculaire au plan du rectangle doit être égal (voyez le problême précédent) à la ſomme des momens dont nous venons de parler, c'eſt-à-dire, doit être $= \frac{b^3 a + ba^3}{12}$. D'ailleurs la maſſe M du rectangle eſt $= ab$; ainſi ce moment ſera $= \frac{M}{12} . (b^2 + a^2)$.

63. PROBLEME. *Déterminer le moment d'inertie d'une lame* ACBR *ſuppoſée circulaire* (*fig.* 44). Puiſque les axes AB, CD ſont alors des diamètres égaux, & que la lame eſt

circulaire, les momens d'inertie par rapport à ces diamètres seront égaux. Soit $GP = x$, $GD = a$, $PM = y = \sqrt{(aa - xx)}$. Le moment d'inertie par rapport au diamètre AB, sera $= 4 S. \overline{GP}^2 . PM. d. GP$ (parce que le diamètre CD divise le cercle en parties égales) $= 4 S. xx dx \sqrt{(aa - xx)} = 4 S. \frac{a^2 xx dx}{\sqrt{(aa - xx)}} - \frac{4 S. x^4 dx}{\sqrt{(aa - xx)}} = 2 a^4 . dA\, fin. \frac{x}{a} - 2 a^2 x \sqrt{(aa - xx)} - \frac{1}{2} a^4 A\, fin. \frac{x}{a} + \frac{1}{2} a^2 x \sqrt{(aa - xx)}$. Si $x = a$, l'arc A dont le finus eft $\frac{x}{a}$ deviendra l'arc dont le finus eft $1 =$ rayon, & le moment d'inertie par rapport à l'axe AB fera $= \frac{ca^4}{4}$, c étant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon eft $= 1$. Mais les momens d'inertie par rapport à l'axe CD & à l'axe AB doivent être égaux; donc leur fomme $\frac{ca^4}{2}$ fera le moment d'inertie par rapport à l'axe aGg perpendiculaire au plan de la lame. Mais $a^2 . c$ eft $=$ M, maffe de la lame; donc $\frac{Maa}{2}$ exprime le moment d'une lame circulaire d'une épaiffeur $= 1$, par rapport à un axe perpendiculaire à fon plan, & qui paffe par fon centre de gravité.

Parce qu'un cylindre eft compofé de pareilles lames pofées les unes à côté des autres, le moment d'inertie d'un cylindre droit par rapport à fon axe eft $= \frac{Maa}{2}$, a étant le rayon & M la maffe de ce cylindre.

64. PROBLEME. *Trouver le moment d'inertie d'un globe engendré par la révolution d'un demi-cercle autour de fon axe que je fup-*

pose être AB. La formule $S. \frac{c.\overline{PM}^4}{2} \cdot d. AP = \frac{c}{2} S. y^4 dx$ donne $\frac{c}{2} S. (4aaxxdx - 4ax^3dx + x^4dx)$, à cause de $PM = 2ax - xx$ & de $AB = 2a$, ou $c\left(\frac{2aax^3}{3} - \frac{ax^4}{2} + \frac{x^5}{10}\right) = \frac{8ca^5}{15}$, en supposant $x = 2a$. Mais la masse M de la sphère est $= \frac{4}{3} ca^3$. Donc le moment de la sphère respectivement à l'axe AB est $= \frac{2Ma^2}{5}$.

Il est maintenant facile d'avoir le moment d'inertie d'un globe creux HMFDBnN (fig. 46). Soit $GH = a$, $GB = b$, le moment d'inertie du globe supposé plein sera $= \frac{8ca^5}{15}$, celui du globe dont le rayon est $= b$, étant $= \frac{8cb^5}{15}$. Ainsi le moment d'inertie du globe creux est $= \frac{8ca^5 - 8cb^5}{15}$.

On ne doit pas confondre la gravité avec l'inertie ; car le moment d'inertie d'un cylindre droit dont le rayon est $= a$, la masse $= M$, & qui tourne autour de son axe est $= \frac{Maa}{2}$. Si donc on appliquoit à l'extrémité de son rayon GD (fig. 45) (*) une masse N capable de vaincre l'inertie par rapport à l'axe AB, cette masse devroit être $= \frac{Maa}{2aa} = \frac{M}{2}$. L'inertie n'est donc

(*) Cette figure représente la coupe du cylindre faite par un plan qui passe par son axe & par conséquent par son centre de gravité.

pas égale à la masse du corps (qu'on peut néanmoins estimer par son poids), quoiqu'elle soit toujours dans un rapport constant avec le poids des corps. De plus les directions de la gravité des particules des corps terrestres sont toujours supposées parallèles; mais s'il s'agit d'un grand corps comme la Lune, par exemple, les directions de la gravité de ses parties formeront différens angles au centre de la Terre.

De l'Attraction.

65. PROBLÊME. *Supposant l'existence d'une loi universelle d'attraction en raison inverse des quarrés des distances & en raison des masses, trouver la quantité d'attraction qu'une ligne homogène* AB *considérée comme matérielle, exerce sur un corpuscule* F *placé sur son prolongement* (*fig.* 47). Prenant la ligne FB pour assymptote, je décris l'hyperbole NC du troisieme ordre désignée par l'équation $yx^2 = a^3 = 1$ (en faisant $a = 1$), d'où l'on tire $y = \frac{1}{x^2}$. Cela posé, soit $FM = x$, $Mm = dx$, $NM = y = \frac{1}{x^2}$. L'attraction de l'élément $nNMm$ sera $= y.\, dx = \frac{dx}{x^2}$, dont l'intégrale est $-\frac{1}{x} = \frac{-a^3}{x}$, en remettant la valeur de 1, ou l'aire $fNMFD$ désigne l'attraction de la ligne MF. Et si $x = FA$, cette attraction sera $= faAFD$. Si $x = FB$ la quantité d'attraction sera $= fCBFD$; donc l'attraction de la droite AB sera $= fCBFD - faAFD = CBaA = \frac{-a^3}{FB} + \frac{a^3}{FA} = \frac{-1}{FB} + \frac{1}{FA}$, en faisant $a = 1$.

66. PROBLÊME. *Suppoſant la même loi d'attraction, trouver la force avec laquelle une ſphère* M A B (*fig.* 48) *attire un corpuſcule b placé ſur le prolongement de ſon axe.* Tirez les lignes qu'on voit dans la figure, & ſuppoſons que C eſt le centre de la ſection A a B M de la ſphère. Soit $bC = a$, $bP = x$, $PM = y$, $MC = r$, on aura $Pp = dx = Mn$, $\overline{bM}^2 = x^2 + y^2$. L'attraction de l'arc infiniment petit Mm ſera égale au produit de cet arc par $\frac{1}{\overline{bM}^2}$, ou par $\frac{1}{xx+yy}$, & la quantité d'attraction ſur le corpuſcule b étant de plus en raiſon de ſa maſſe ſera $= \frac{b.Mm}{xx+yy}$. Nous dirons en paſſant que cette expreſſion déſigne auſſi la force attractive du corpuſcule b par rapport au petit arc Mm. Maintenant le corpuſcule b étant également attiré par l'arc correſpondant NQ, il eſt viſible que la force avec laquelle l'arc M m attire le corpuſcule b doit être decompoſée en deux, l'une ſelon P M, qui eſt détruite par une force ſemblable ſelon PN de l'arc NQ, & l'autre Pb qui eſt la ſeule efficace. Donc en déſignant la force totale de l'arc M m par la ligne Mb, on aura Mb:

$$Pb :: \frac{b.Mm}{xx+yy} : \frac{Pb.Mm.b}{Mb(x^2+y^2)} = \frac{x.b.Mm.}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}.$$

Maintenant tandis que le cercle A M B N en tournant autour de l'axe A B engendre la ſphère, l'arc M m engendre une petite zone, qui (par les élémens de Géométrie) eſt égale au produit de cet arc par la circonférence décrite avec le

rayon it qui passe par le milieu de cet arc: or on peut supposer $it = PM = y$. Et par ce que les circonférences des cercles sont comme les rayons, en substituant $Mm \times y$ au lieu de Mm, on aura $\frac{x.b.y.mM}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$, quantité proportionnelle à l'attraction de la zone $MmNQ$ sur le corpuscule b. Mais les triangles MCP, Mnm ayant leurs côtés perpendiculaires sont semblables & donnent $y : r :: dx = Mn : Mm = \frac{r.dx}{y}$; donc l'expression précédente devient $= \frac{r.b.x.dx}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. De plus $AP = bP + AC - bC = x + r - a$, & $BP = bB - bP = a + r - x$, & par la nature du cercle $y^2 = AP.BP = r^2 + 2ax - xx - aa$; donc l'attraction de la zone élémentaire $MmNQ$ sera comme $\frac{b.rxdx}{(r^2+2ax-aa)^{\frac{3}{2}}}$. Supposons $r^2 + 2ax - aa = u^2$, pour avoir $x = \frac{uu+aa-rr}{2a}$, & $dx = \frac{udu}{a}$. Substituant ces valeurs de x & de dx dans l'expression précédente, on trouvera (en faisant attention que $(u^2)^{\frac{3}{2}} = u^3$) que $\frac{xdx}{(rr+2ax-aa)^{\frac{3}{2}}} = \frac{du}{2aa} + \frac{aadu}{2aauu} - \frac{r2\,du}{2aauu}$, dont l'intégrale est

$= \frac{u}{2aa} - \frac{aa}{2aa.u} + \frac{rr}{2aa.u} + C$, qui en substituant la valeur de u devient après les opérations ordinaires, $\frac{r^2 + ax - aa}{aa\sqrt{(rr + ax - aa)}} + C$. Donc $S.\left(\frac{b.r.x\,dx}{(rr + 2ax - aa)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{b.r.(r^2 + ax - aa)}{aa\sqrt{(rr + 2ax - aa)}}$, $+ C$. pour déterminer la constante C je remarque que l'attraction de la calotte sphérique MAN est $= 0$ lorsque $AP = 0$, ou lorsque $r + x - a = 0$, ou lorsque $x = a - r$. Substituant cette valeur dans l'intégrale qu'on vient de trouver on doit avoir $\frac{b.r(r^2 - ar)}{aa\sqrt{(rr - 2ar + aa)}} + C = 0$; donc $C = -\frac{br}{aa}.\frac{(rr - ar)}{a - r} = \frac{b.r(ar - rr)}{aa(a - r)}$ $= \frac{br^2}{aa}$; donc l'intégrale complette sera $= \frac{b.r^2}{aa} + \frac{b.r.(rr + ax - aa)}{aa.\sqrt{(rr + 2ax - aa)}}$. Et si l'on fait $bP = bB$, ou si l'on fait $x = a + r$ l'attraction de la surface entiere sera proportionnelle a $\frac{2br^2}{aa}$. Si l'on conçoit que la sphère soit composée d'une infinité de surfaces concentriques dont l'épaisseur soit infiniment petite & qu'on fasse le rayon d'une de ces surfaces $= z$, $\frac{2.b.z^2}{aa}$ pourra exprimer l'attraction de cette surface; & multipliant cette valeur par dz épaisseur de cette surface, $\frac{2b.z^2dz}{aa}$ pourra

exprimer l'attraction que l'élément de la ſphère exerce ſur le corpuſcule b, & l'intégrale $\frac{2bz^3}{3aa}$ ſera proportionnelle à la force attractive que la ſphère du rayon z exerce ſur le corpuſcule b. Et parce que $\frac{2}{3}.b$ & r^3 ſont des quantités conſtantes, on peut dire que l'attraction d'une ſphère dont le rayon eſt r ſur un corpuſcule b placé hors de cette ſphère, eſt comme $\frac{2br^3}{3aa}$, ou comme $\frac{1}{aa}$, ou en raiſon inverſe du quarré de la diſtance du corpuſcule au centre C de la ſphère; de ſorte qu'une ſphère attire un corpuſcule ſitué hors de cette ſphère, comme ſi toute ſa matiere étoit réunie dans ſon centre.

COROLLAIRE. donc ſi on ſuppoſe $a=r$ l'attraction de la ſphère ſera comme $\frac{1}{rr}$. Mais la maſſe de la ſphère eſt comme r^3, donc l'attraction d'un corpuſcule placé à la ſurface d'une ſphère eſt comme $\frac{r^3}{r^2}=r$ ou comme le rayon de la ſphère; donc le poids de deux corpuſcules de même maſſe, ſitués ſur la ſurface de deux ſphères homogènes & de même denſité, ſont comme les rayons de ces ſphères.

67. PROBLÊME. *Trouver l'attraction qu'un corpuſcule b placé hors d'une ſphère exerce ſur cette ſphère, en ſuppoſant la même loi d'attraction que dans le Problême précédent.* L'action du corpuſcule b ſur l'élément Mm eſt évidemment exprimé par $\frac{b.\mathrm{M}m}{xx+yy}$, & parce que le corpuſcule b attire également & obliquement l'arc correſpon-

dant N Q, la force du corpuscule b, que nous désignerons par la ligne b M, doit se décomposer en deux forces b P, MP, celle-ci est détruite par la force opposée NP qui vient de l'action que le corpuscule b exerce sur l'arc N Q; donc b P est la seule force effective avec laquelle le corpuscule b agit sur l'arc Mm. en cherchant la valeur de $\frac{b.Mn}{xx+yy}$ comme dans le problême précédent, on trouvera que l'action du corpuscule b sur un élément de la sphère est comme $\frac{2bz^2dz}{aa}$; d'où on conclura que par rapport à la sphère entiere on doit avoir $\frac{2br^3}{3aa}$. Donc le corpuscule b attire la sphère, comme si toute la matiere de celle-ci étoit rassemblée à son centre, & réciproquement. On voit de plus que la sphère & le corpuscule s'attirent de maniere que la vîtesse de la sphère pour s'approcher du corpuscule est à la vîtesse avec laquelle le corpuscule tend vers la sphère, comme le corpuscule est à la sphère, ce qui s'accorde avec ce principe que la *réaction est contraire & égale à l'action.*

COROLLAIRE. Donc les vîtesses avec lesquelles la sphère & le corpuscule tendent l'un vers l'autre sont en raison inverse des masses; donc ils parcourront des espaces qui sont dans le même rapport; donc ils se joindront à leur commun centre de gravité.

68. PROBLEME. *Déterminer la quantité d'attraction que deux sphères* AaBM, fg *exercent l'une sur l'autre.* Soit b le centre de la sphère fg; cette sphère attire toutes les parties de l'autre,

de la même maniere que si toute sa matiere étoit pénétrée à son centre *b* (66) ; & réciproquement la sphère ABM attire chaque partie de la sphète *fg*, comme si toute la matiere de la premiere étoit rassemblée au centre C; donc ces sphères s'attirent comme si elles étoient des corpuscules placés en *b* & en C ; c'est-à-dire, en raison directe des masses & en raison inverse des quarrés des distances au centre de ces sphères.

REMARQUE. Un corpuscule P (fig. 49) placé dans l'intérieur d'une sphère creuse demeureroit en repos & n'auroit aucune pesanteur : car ayant tiré les lignes que représente la figure, les triangles *a*PA, BPM ont les angles en P opposés au sommet, & les angles *a* & M appuyés sur le même arc AB ; donc ces triangles sont semblables, & donnent la proportion A*a* : BM :: *a*P : PM. Maintenant si nous supposons les arcs A*a*, BM infiniment petits, ils se confondront avec leurs cordes ; & si l'on regarde ces arcs comme les diagonales de deux figures semblables infiniment petites qui forment une des portions infiniment petites de la surface intérieure de la sphère, ces figures seront en raison doublée de ces arcs, & $\frac{(Aa)^2}{(aP)^2}$, $\frac{(BM)^2}{(PM)^2}$ exprimeront l'attraction que ces figures exercent sur le point P. Mais parce que A*a* : BM :: *a*P : PM, $\frac{Aa}{aP} = \frac{BM}{PM}$; donc ces figures exercent des attractions égales & opposées sur les corpuscules P ; donc la surface annulaire A*a*BM attirera également & de toute part le

le corpuſcule P : il en ſera de même de toute la ſurface creuſe ADMmaA; donc le corpuſcule reſtera en repos.

Mais ſi le corpuſcule P eſt placé dans une ſphère pleine (fig. 50), il ne ſera nullement attiré par les parties qui ſont auſſi éloignées ou plus éloignées du centre que le corpuſcule; il ne ſera donc attiré que comme ſi la ſphère avoit un rayon $=$ CP; c'eſt-à-dire que l'attraction ſera proportionnelle au rayon PC.

69. PROBLEME. *Déterminer le mouvement d'un corpuſcule* A *attiré vers* C *par une force qui ſuit la raiſon de la puiſſance m des diſtances* CA (*fig.* 51). Soit AC $= a$, AP $= x$, la vîteſſe au point P $= v$. Suppoſons que CE $= b$ ſoit la diſtance à laquelle la force centripete eſt égale à la force de la gravité qui dans une ſeconde peut communiquer aux corps expoſés à ſon action une vîteſſe $2g$. En faiſant $b^m : \overline{CP}^m :: 2g$ (vîteſſe que l'action de la gravité peut communiquer dans une ſeconde) : $\frac{\overline{CP}^m}{b^m} \cdot 2g = \frac{(a-x)^m \, 2g}{b^m}$, on aura la force accélératrice au point P. Mais (1) par la formule $v\,dv = p\,dx$, on a $v\,dv = \frac{(a-x)^m}{b^m} \cdot 2g.dx$. D'où l'on tire $v^2 = -\frac{4g.(a-x)^{m+1}}{(m+1)b^m} + C$. Lorſque AP $= x$ devient $= 0$, on a $v = 0$; donc $C = \frac{4g.a^{m+1}}{(m+1)b^m}$. Donc $v^2 = \frac{4g.[a^{m+1} - (a-x)^{m+1}]}{(m+1)b^m}$.

Si l'on veut trouver le tems employé à parcourir AP, on se servira de l'équation $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx.\sqrt{[(m+1)b^m]}}{2\sqrt{g}.\sqrt{[a^{m+1}-(a-x)^{m+1}]}}$. Donc $t = S.\frac{dx.\sqrt{[(m+1)b^m]}}{2\sqrt{g}.\sqrt{[a^{m+1}-(a-x)^{m+1}]}}$. Si la force centripete suit la raison renversée des quarrés des distances, c'est-à-dire, si elle est comme $\frac{1}{CP^2}$, on aura $m=-2$, $v=\sqrt{4g}.\sqrt{\left(\frac{a^{-1}-(a-x)^{-1}}{-b^{-2}}\right)}$, & le tems t sera $=S.\,dx.\frac{\sqrt{[a(a-x)]}}{2b\sqrt{gx}}$. Soit $a-x=z$, ou $z+x=a$, l'on aura $dz-dx=0$ (*), ou $dz=dx$; & $t=\frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{g}}.\,S.\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(a-z)}} = \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{g}}.\,S.\frac{zdz}{\sqrt{(az-zz)}} = \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{g}}.$ [A *sin. vers.* $z - \sqrt{(az-zz)}$] (**). Sur la ligne AC prise pour diamètre, décrivons le demi-cercle AMC, pour avoir $PM=\sqrt{(az-zz)}$, & l'arc CM

(*) On met $-dx$ & non pas plus dx, parce que z croissant, x diminue.

(**) Car A étant un arc de cercle dont le sinus verse $=x$ & le rayon $=\frac{1}{2}a$, on aura la différentielle de cet arc $=\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ (voyez Section précédente n° 30). Si de cette différentielle on retranche celle de $\sqrt{(ax-xx)}$, il viendra $\frac{xdx}{\sqrt{(ax-xx)}}$. Donc &c.

$= A$ *fin. verf.* $\frac{x}{z}$. Le tems le long de PC fera $\frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{g}} \cdot (CM - PM)$; &, parce qu'au point A, PM eft $= 0$, le tems long de AC fera $= \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{g}} \cdot CMA$. Mais le tems le long de AP étant égal au tems le long de AC moins le tems le long de PC, fera $= \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{g}} (AM + PM)$.

Soit CE le rayon de la Terre $= 19625732$ pieds, CA la diftance de la Lune à la Terre $= 60. CE$. Puifque les corps céleftes s'attirent en raifon renverfée des quarrés des diftances, il fera aifé de trouver le tems qu'un corps fitué à la diftance de la Lune employera à arriver au centre de la Terre, en fuppofant que la force centrale fuive toujours la raifon renverfée des quarrés des diftances. Car $b = CE$, le demi-cercle décrit fur $CA = 1848769000$ pieds, & $g = 15$. Donc le tems de la defcente le long de CA feroit $\frac{CMA. \sqrt{a}}{2b\sqrt{g}} = \frac{AMC. \sqrt{60b}}{2b\sqrt{15}} = \frac{AMC}{\sqrt{b}} = \frac{1848769000''}{4430} = 208664'' = 4$ jours 19 heures à peu-près (*).

(*) Cela auroit lieu en fuppofant que la force centrale fuivît la raifon renverfée des quarrés des diftances & la raifon directe des maffes attirantes ; mais dans l'intérieur de la terre cette force fuit la raifon des diftances au centre, comme il fuit de ce qu'on a dit ci-deffus. Ainfi la folu-

Il eſt aiſé de voir comment il faudroit s'y prendre pour trouver le tems qu'un corps ſitué à une diſtance donnée de la Terre mettroit à tomber ſur ſa ſurface.

70. PROBLÊME. *Suppoſant que l'on connoît exactement la diſtance de la Lune à la Terre, les maſſes de ces Planètes; que l'attraction ſuit la raiſon renverſée des quarrés des diſtances & la raiſon des maſſes attirantes; on demande un point ſitué entre la Lune & la Terre dans lequel un corps ſeroit également attiré par ces Planètes.* Soit a la diſtance du centre de la Terre à celui de la Lune, m la maſſe de la Terre, p celle de la Lune, x la diſtance du centre de la Terre au point cherché, & $a-x$ la diſtance du centre de la Lune au même point. Puiſque l'attraction ſuit la raiſon renverſée des quarrés des diſtances & la raiſon directe des maſſes attirantes, l'on aura par hypothèſe $\frac{m}{x^2} = \frac{p}{(a-x)^2}$, & $m(a-x)^2 = px^2$, ou $m.aa - 2amx + mx^2 = px^2$, ou $(m-p)x^2 - 2amx = -maa$, ou en faiſant $m-p = n$, diviſant enſuite par n, completant, prenant les racines & tranſpoſant, $x = \frac{am \pm a(\sqrt{mm-mn})}{n}$. des deux valeurs de x, celle dont le radical a le ſigne $-$ réſout le problême, dans le ſens qu'il eſt propoſé, la ſeconde indique un point pris au-delà de la Lune ſur le prolongement de

tion qu'on vient de donner ne peut être exacte qu'autant que la maſſe de notre globe ſeroit conçue comme concentrée à ſon centre.

la ligne tirée du centre de la Terre à celui de la Lune, dans lequel l'attraction des deux Planètes est la même.

Si *m* représentoit la masse du Soleil, *p* celle de Saturne & *a* la distance du centre du Soleil à celui de Saturne, les deux valeurs de *x* indiqueroient deux points situés, l'un sur la ligne *a* qu'on suppose tirée du centre du Soleil à celui de Saturne & l'autre sur le prolongement de cette même ligne & situé au-delà de Saturne, dans lesquels les forces attirantes de ces astres seroient égales.

Si on supposoit que deux luminaires *m* & *p* éclairent un corps situé sur la ligne qui passe par leurs centres ; comme la force de la lumiere suit la raison renversée des quarrés des distances & la raison directe des forces des luminaires, si l'on suppose qu'à la même distance la force pour éclairer dans le luminaire *m* est à celle du luminaire *p* comme $m : p$, les points cherchés se trouveront par la même formule que ci-dessus, & l'une des valeurs de *x* indiquera un point situé entre *m* & *p*, tandis que l'autre désignera un point situé au-delà du luminaire *p* que je suppose le plus foible.

De la courbure des cordes.

71. PROBLÊME. BAC *étant une corde parfaitement flexible & sans extension, dont les bouts sont attachés à la ligne horisontale* BC, *trouver la courbe que la pesanteur fait prendre à cette corde* (fig. 52). Il est visible que A étant le point le plus bas de la courbe, les parties BA, CA seront égales & que chacune sera égale à la moitié de la longueur de la corde, il n'est pas

moins évident qu'en suppofant que l'extrémité A de la partie B A est attachée en A la courbure de l'arc B A restera la même en suppofant qu'on détruise la partie A C. Cela posé, soit A P $= z$, P D $= dz$, P $b = y$, B $e = dy = nb$; tirant de plus la verticale B g & la tangente b M, nous pourrons suppofer que M g est la force qui éloigne la corde A B de la verticale B g, & br ou B g la force qui tire un point quelconque b selon cette verticale, laquelle force est égale au poids de l'arc A b que nous suppoferons $= u$. La composition de ces deux forces fait que l'élément B b prend la situation B b. Soit la force M $g = a$ (*), les triangles semblables B bn, B g M donnent n B $= dx : bn = dy :: g$ B ou rb (ou le poids u) : M $g = a$. Donc $a dx = u dy$, ou $dy = \frac{a dx}{u}$ (A). Mais la corde étant suppofée homogène dans toutes ses parties, sa pesanteur est comme sa longueur, donc alors u pourra exprimer la longueur de l'arc A b, & l'on aura $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx}{u} \times \sqrt{(uu + aa)}$, en substituant la valeur de dy prise de l'équation A. Donc $u du = dx \sqrt{(uu + aa)}$, $dx = \frac{u du}{\sqrt{(uu + aa)}}$, $x = \sqrt{(uu + aa)}$, ou $xx = uu + aa$, $u =$

(*) En attachant l'extrémité A de la corde B A à un fil qui pafferoit fur une poulie de renvoi, & qui porteroit un baffin de balance à fon autre extrémité, on pourra connoître le poids qui peut retenir la corde A B dans la fituation A B.

$\sqrt{(xx - aa)}$. Subſtituant cette valeur de u dans l'équation A, on aura $dy = \frac{adx}{\sqrt{(xx - aa)}}$ équation de la courbe cherchée.

Si dans l'équation $u = \sqrt{(xx - aa)}$, on ſuppoſe l'arc indéterminé $Af = u = o$, on aura $x = a$; donc l'origine des abſciſſes eſt ſituée au point N auquel on a $AN = a$. pour conſtruire l'équation qu'on vient de trouver, je la multiplie par la quantité a afin d'avoir $ady = \frac{aadx}{\sqrt{(xx - aa)}}$. Mais ſelon ce qu'on dit ci-deſſus (Section 11, n°. 21) $\frac{aadx}{2\sqrt{(xx - aa)}}$ déſigne un ſecteur d'une hyperbole équilaterre dont la moitié du premier axe $= a$. C'eſt pourquoi je décris ſur AN priſe pour demi-premier axe l'hyperbole équilaterre FA tirant la droite NF, j'ai le double du ſecteur NAF égal $S.ady = ay$. Menant l'indéfinie Nm parallèle à Ag & faiſant le rectangle AgmN égal au double du ſecteur NAF, $Ag = Nm$ ſera $= y$ & le rectangle ſera $= ay$. Prolongeant chaque ordonnée iP de l'hyperbole juſqu'à ce qu'elle rencontre en b chaque ordonnée correſpondante Rr du rectangle, le point b ſera à la courbe cherchée. En effet, en partageant le ſecteur & le rectangle en un même nombre d'élémens, on aura chaque élément mgRr; ou $gm.m\mathrm{R} = gm.nb = gm.dy = ady$ toujours double de l'élément correſpondant NiF du ſecteur hyperbolique dans l'élément duquel on fait $PD = dx$ & $NA = a$. Donc on aura toujours

Aa 4

$a\,dy = \frac{2\,aa\,dx}{2\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{aa\,dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$, & $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$, équation qu'on vouloit construire (*).

REMARQUE. De l'équation $xx = uu + aa$, on tire $uu = xx - aa$; donc en supposant que BA moitié de la corde donnée soit $= c$, on aura $cc = xx - aa$, ce qui fera connoître la valeur DN de l'abcisse correspondante, & par conséquent l'origine N des abcisses.

De quelques mouvemens dans les lignes courbes & de la figure de la Terre.

72. PROBLEME. *Trouver le tems de la descente d'un corps mis en mouvement par l'action de la gravité le long d'un arc quelconque* hA *de cycloïde* (*fig.* 53). Ayant tiré la ligne hD perpendicu-

(*) Si l'on fait $dx = 0$, on aura le point le plus bas de la courbe, & alors $xx - aa = 0$ & $x = a$.

Si l'on fait attention que $xx - aa$ est le produit des abscisses comptées du centre d'une hyperbole dont l'axe des $x = 2a$, on pourra substituer $xx + 2ax$ à la place de $xx - aa$, puisque c'est la même chose que si on prenoit l'origine des x au sommet, & alors $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(xx+2ax)}}$ & $y = \pm a\,\text{L.}\left(\frac{a + x + \sqrt{(xx+2ax)}}{a}\right)$. C'est pourquoi dans ce cas l'axe des x coupe les doubles ordonnées en parties égales; & alors $\text{S.}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \text{S.}\frac{(a+x)dx}{\sqrt{(2ax+xx)}} = \sqrt{(2ax+xx)}$; ainsi la *chaînette* ou la *caténaire* est rectifiable. Avec un peu d'attention il est aisé de voir que la chaînette est la même que la ligne des cosinus hyperboliques.

laire au diamètre B A du cercle générateur, on décrira sur D A prise pour diamètre la demi-circonférence A N D, & ayant mené les lignes qu'on voit dans la figure, je fais le diamètre $AB = 2a$, $DA = 2r$, $DP = x$ & par conséquent $AP = 2r - x$, $Pp = fm = dx$, le tems que le mobile employe à parcourir l'arc indéfini M A $= t$, le tems employé à parcourir l'arc $Mm = dt$. De plus la vîtesse acquise en parcourant l'arc hM sera comme la racine de la hauteur DP, ou sera $= \sqrt{x}$. Or la tangente M T de la cycloïde est parallèle à la corde A F (section premiere, n°. 13); donc les triangles Mfm, P F A sont semblables & donnent $Mm : mf :: FA : PA$. Mais par la nature du cercle $AB : AF :: AF : AP$; donc $AB : FA$ ou $FA : AP :: \sqrt{AB} : \sqrt{AP}$; donc $Mm : mf :: \sqrt{2a} : \sqrt{(2r - x)}$; donc $Mm = \frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{(2r-x)}}$, en substituant la valeur de mf. Mais le tems le long de Mm étant exprimé par dt & la vîtesse par $\sqrt{x}$, on aura $Mm = dt.\sqrt{x}$, ou $dt = \frac{mM}{\sqrt{x}}$; donc en substituant la valeur de Mm, $dt = \frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{(2rx - xx)}} = \frac{2r.dx\sqrt{2a}}{2r.\sqrt{(2rx-xx)}}$. Mais la différentielle Nn de l'arc D N est $= \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$; donc $dt = \frac{d.DN.2\sqrt{2a}}{2r}$, & en intégrant, $t = \frac{DN.2\sqrt{2a}}{2r}$. Expression du tems cherché le long de l'arc hM.

Si t désigne le tems de la descente le long de

de l'arc h A, l'arc DN deviendra la demi-circonférence DNA, & l'on aura alors $t = \frac{DNA.2.\sqrt{2a}}{2r}$. Donc puiſque $2.\sqrt{2a}$ eſt une quantité conſtante le tems t ſera proportionnel à $\frac{DNA}{2r} = \frac{DNA}{DA}$; de même le tems le long de la demi-cycloïde CA ſera comme $\frac{BFA}{BA}$. Ainſi les tems le long de différens arcs cycloïdaux ſont toujours comme le rapport de la demi-circonférence d'un cercle à ſon diamètre; donc ces tems ſont égaux, c'eſt-à-dire qu'un corps quelconque qui ſe meut le long d'une cycloïde par l'action de la gravité dans un milieu ſans réſiſtance parvient au point le plus bas A dans le même tems, ſoit qu'il parte de C ou de M.

COROLLAIRE. Puiſque le tems de la deſcente le long de l'arc h A eſt $t = \frac{DNA.2.\sqrt{2a}}{2r}$, on aura $2r : DNA :: 2.\sqrt{2a} : t$; mais $2.\sqrt{2a} = \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}}$; donc $2r :: DNA :: \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}} : t$. De plus $\frac{1}{2}\sqrt{2a}$ repréſente la moitié de la vîteſſe qu'un corps acquéreroit en tombant le long du diamètre BA; donc en ſuppoſant ce tems $=$ T, on aura $2a = T.\frac{1}{2}\sqrt{2a}$, ou $T = \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}}$; donc en ſubſtituant, la derniere proportion devient $2r : DNA :: T : t$. C'eſt pourquoi le tems le long d'un arc quelconque de cycloïde eſt au tems de la chûte

libre d'un corps le long du diamètre du cercle générateur comme la demi-circonférence d'un cercle est à son diamètre ; ainsi ces deux tems sont en raison constante, ce qui nous apprendroit si nous ne le sçavions déja, que tous les arcs d'un cycloïde comptés depuis le point A sont parcourus en tems égaux.

On appelle *courbes tautochrones* celles dont les arcs grands ou petits sont parcourus dans le même tems; ainsi la cycloïde est une courbe tautochrone, en supposant que le milieu est sans résistance.

REMARQUE. Si A C (fig. 54) est supposée une demi-cycloïde égale à la demi-cycloïde A V = V B = C B, qu'on suspende au point C un pendule P avec un fil dont la longueur soit = A T C, le poids P séparera peu à-peu le fil P T C de la cycloïde A C, étant parvenu dans la situation C V, il lui fera envelopper la demi-cycloïde C B, & le poids P oscillera de cette maniere dans la cycloïde A V B, par le moyen de deux lames cycloïdales C A & C B, qui doivent être fort polies & sans ressort, afin de ne point troubler l'hysocronisme des vibrations du pendule par le frottement ou par l'élasticité. Ayant tiré les lignes qu'on voit dans la figure ; par la propriété de la cycloïde, la demi-cycloïde A C est = 2. A E = C V, & l'arc A T est égal à la longueur T P du fil qui enveloppoit cet arc lorsque le corps P étoit en A ; or A T est égal au double de la corde A f ; (Section seconde, n°. 32) ; donc P T = 2. A f = 2. h T ; car h T est parallèle à A f (Section premiere, n°. 13) & la figure f T h A est un parallelogramme. Donc h P =

h T. De plus l'arc circulaire Af eſt égal à l'ordonnée fT = Ah, & à cauſe de A D = AfE, on doit avoir Dh = Ef = M V : car les arcs A F, D M appartenans à des cercles égaux & étant compris entre les parallèles Tf & Ah, A D & P M également éloignées, ſont néceſſairement égaux ; donc fE = M V. Mais les angles f A h, M D h ont pour meſure, le premier la moitié de l'arc Af, & le ſecond la moitié de l'arc M D ; donc ces angles ſont égaux & les lignes fA ; D M ſont parallèles ; ainſi la figure h D M P eſt un parallelogramme, & l'on a P M = h D = M V, c'eſt-à-dire que l'ordonnée P M eſt égale à l'arc circulaire V M correſpondant. Donc la courbe A P V eſt une demi-cycloïde produite par le développement de la demi-cycloïde = C A ; donc la développée d'une cycloïde eſt encore une cycloïde, ce que nous avons démontré d'une autre maniere (Section premiere, n°. 106). Donc 2°. un pendule qui oſcille entre deux lames cycloïdales A C, C B, dont chacune eſt égale à la longueur du fil de ce pendule fait ſes oſcillations dans une cycloïde ; donc 3°. les vibrations d'un tel pendule ſont d'égale durée.

COROLLAIRE. Puiſque la demi-cycloïde A V eſt produite par le développement de la demi-cycloïde A C, & que par la même raiſon la demi-cycloïde V B, eſt produite par le développement de la demi-cycloïde B C, il eſt évident que C V eſt le rayon de la développée au point V de la cycloïde A V B. ; donc ſi du point C comme centre avec un rayon C V, on décrit un petit arc circulaire V N, il ſe confondra avec l'arc correſpondant de la cycloïde, & puiſque les arcs

cycloïdaux ſont parcourus en tems égaux, un pendule qui décrira des petits arcs circulaires les décrira en tems égaux, ce que nous avons démontré ci-deſſus d'une autre maniere. De plus nous avons dit que le tems de la deſcente le long d'un arc de cycloïde étoit au tems de la deſcente le long du diamètre du cercle générateur comme la demi-circonférence d'un cercle eſt à ſon diamètre; donc puiſque le diamètre D V eſt la moitié du rayon C V, que le tems le long de D V eſt la moitié de celui qu'il faut pour parcourir 2. C V ou le diamètre du cercle dont le rayon eſt C V, & que le tems le long d'une corde V N d'un arc V N ſuppoſé circulaire eſt égal au tems le long du diamètre du cercle auquel appartient cet arc, il s'en ſuit 1°. que le tems d'une vibration entiere dans un arc de cercle fort petit eſt au tems de la chûte le long du demi-rayon de ce cercle, comme la circonférence eſt au diamètre, & le tems de la chûte le long d'un petit arc circulaire N V eſt au tems de la chûte oblique le long de la petite corde V N, comme la demi-circonférence eſt au double du diamètre.

REMARQUE. Par le méchanique élémentaire on ſait que le tems de la chûte le long des plans inclinés de même hauteur, ſont en raiſon des longueurs de ces plans; cela poſé, ſuppoſons que l'arc V N eſt un arc circulaire infiniment petit, les tangentes V g & g N pourront être conſidérées comme égales à la corde N V. De plus ces tangentes ſont égales; donc on aura V N = 2. N g, & parce que V g eſt horiſontale, en conſidérant N V & N g comme des plans de même hauteur, le tems le long de N V ſera double du tems le

long de Ng. Maintenant le corps étant supposé parvenu en g, il décrira la ligne horisontale g V $= g$ N avec un mouvement uniforme & dans un tems sous-double de celui qu'il a employé à parcourir gN. Si donc on fait ce dernier tems $=$ T, le tems employé à parcourir Ng sera $= 2$ T ; donc le tems employé à parcourir Ng $+ g$ V sera $= 3$ T. Mais le tems le long de N V doit être double de celui que le corps employe à parcourir N g ; donc ce tems $= 4$ T, ainsi le tems employé à parcourir les deux tangentes est au tems employé à parcourir la corde N V, comme $3 : 4$; ce n'est donc pas la même chose de supposer qu'un corps parcourt la corde, ou l'arc, ou les tangentes, lorsque l'arc est infiniment petit, ce qui fait voir l'erreur de ceux qui concluent qu'un arc circulaire fort petit, est décrit dans le même tems que la corde, à cause qu'il se confond avec sa corde (*).

Nous avons vu que le tems t de la descente d'un corps le long d'un arc cycloïdal est au tems de la chûte libre le long du diamètre du cercle générateur, comme la demi circonférence est à son diamètre. Si donc on suppose $= c$ la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$, b le diamètre du cercle générateur, z le tems le long de ce diamètre, on aura $2 : c :: z : t =$

(*) On sait par la méchanique élémentaire que toutes les cordes d'un cercle qui aboutissent aux extrémités du diamètre vertical sont parcourues dans le même-tems que le diamètre, & par conséquent en tems égaux. Keil, Parent & d'autres ont conclu que les petits arcs d'un cercle devoient être parcourus dans des tems égaux, parce que la corde devient à la fin égale à l'arc ; mais quelque petit que soit l'arc, sa position n'est jamais la même que celle de la corde : car l'arc s'écarte toujours de la corde vers son milieu.

$\frac{cz}{2}$. Mais si g représente l'espace que la gravité peut faire parcourir dans une seconde dans un certain lieu de la terre ; comme les espaces que cette cause fait parcourir sont comme les quarrés des tems, on aura $g : 1''$ (quarré d'une $1''$ que nous regarderons comme l'unité de tems) :: z^2 (quarré du tems employé à parcourir le diamètre b) : b. Ainsi $z^2 1'' = z^2$ (à cause de $1''$ supposé $= 1$) est $= \frac{b}{g}$, & $z = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Mais b est la moitié de la longueur d'un pendule circulaire qui feroit de petites oscillations isochrones ou de même durée que celles du pendule cycloïdal ; donc en appellant a la longueur d'un tel pendule, on aura $b = \frac{a}{2}$, & $z = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2.g}}$; d'où lon tire $t = \frac{c}{2} . \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2.g}}$. Tel est le tems de la demi-vibration d'un pendule dont la longueur est $= a$. Si donc t représente le tems d'une vibration entiere d'un pareil pendule, on aura $t = c . \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2.g}}$.

COROLLAIRE. De-là il suit que les tems des petites vibrations des pendules sont en raison directe des racines des longueurs, & en raison inverse des racines des forces accélératrices qui les font mouvoir. Si donc on suppose cette force constante, les tems des vibrations seront comme les racines des longueurs des pendules.

Si dans un certain lieu de la terre les corps descendent dans une seconde de la hauteur de 15.1 pieds dans une seconde, car la force de la gravité n'est pas la même par-tout, comme tout le monde le sait, on aura $g = 15.1$. Mais en supposant le rayon $= 1$, l'on a $c = 3.141$. Cela posé, il sera facile de trouver la longueur d'un pendule qui feroit ses vibrations dans une seconde : car l'équation $t = c \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2.g}}$, deviendra $1 = c \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2.g}}$; d'où l'on tire $a = \frac{2g}{c^2} = 3.061$.

Réciproquement si l'on connoît la longueur d'un pendule qui fait ses vibrations dans une seconde, on trouvera facilement l'espace g que la gravité fait parcourir aux corps dans le même-tems; car $g = \frac{ac^2}{2}$.

De ce que $t = c\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}$, il suit que plus la force g est petite plus le tems est long, de maniere que le tems est en raison inverse soudoublée de la force accélératrice, lorsque a est constant. Soit t le tems d'une vibration du pendule dont la longueur $= a$, T celui du pendule dont la longueur $= b$, N le nombre de vibrations du premier pendule dans un tems donné dans une heure, par exemple, n le nombre des vibrations du second pendule dans le même tems, il est clair que plus le nombre des vibrations d'un pendule sera grand dans un tems donné, plus le tems de chacune sera court. Donc les nombres N & n seront en raison inverse de t & T; mais en supposant g constant (comme on le fait ici) $t : T :: \sqrt{a} : \sqrt{b}$. Donc on aura $N : n :: \frac{1}{t} : \frac{1}{T} :: \frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{b}} : \sqrt{b} : \sqrt{a}$. D'où l'on tire $N^2 : n^2 :: b : a$, & $b = \frac{N^2 a}{n^2}$. Donc si on connoît la longueur a d'un pendule qui fait un certain nombre N de vibrations dans un tems donné, on aura par cette équation la longueur du pendule b qui doit faire le nombre n de vibrations dans le même tems.

Si $T = t$, l'on aura $N : n :: \sqrt{b} : \sqrt{a}$; c'est-à-dire, que le nombre des vibrations de deux pendules sont en raison inverse soudoublée de leurs longueurs, ou sont en raison inverse des racines de leurs longueurs.

Nous avons dit ci-devant que la gravité n'étoit pas la même par-tout. Un Physicien qui demeure dans les montagnes du Valais a trouvé qu'une excellente pendule à secondes placée à 514 toises de hauteur s'est accélérée en 90 jours de 20′ 22″; que la même pendule à 210 toises de hauteur

teur s'est accélérée de 15′ 4″ en 175 jours ; & qu'enfin à 847 toises elle s'est accélérée en 61 jours de 21′ 5″ (voyez le Journal des Beaux-Arts, Décembre 1771). Il suivroit de-là que la pesanteur est augmentée à peu-près en raison de l'élévation, tandis que selon la théorie ordinaire elle doit être en raison inverse du quarré de la distance au centre. Mais ne peut on pas soupçonner que la densité de ces montagnes est plus grande que celle des couches placées à la surface de la terre, & que c'est cet excès qui a produit l'accélération dont on vient de parler ?

Si nous en croyons M. Bouguer le pendule à secondes doit être pour la latitude de Paris de 440.67 lignes, & sous l'équateur au niveau de la mer de 439.21. Mais à Quitto, ville située au dessus du niveau de la mer d'environ 1466 toises, ce pendule doit avoir 438.88, tandis que sur le mont Pichincha élevé de 2434 toises au-dessus du niveau de l'Océan, cette longueur n'est que de 439.69 lignes. A Rome, selon les déterminations des Peres Leseur & Jacquier la longueur du même pendule a 440.3888 lignes.

La pesanteur n'est donc pas la même dans tous les lieux de notre globe : ce qui vient principalement de ce que la terre en tournant sur son axe comunique aux corps placés sur sa surface une force centrifuge qui diminue leur tendence vers son centre, & cette force va en décroissant de l'équateur aux poles où elle est nulle.

73. La rotation de la terre sur son axe doit non-seulement diminuer la gravité des corps situés sur sa surface entre les poles & l'équateur, elle doit encore (en supposant notre globe fluide) lui donner la figure d'un ellipsoïde : car si un amas de matiere homogène & fluide est animé d'une force d'attraction qui pousse les parties les unes vers les autres, les particules les plus proches du centre s'approcheront les unes des autres, en s'arrangeant selon une forme sphérique, puisque les attractions de ces parties sont égales entr'elles. Les autres parties les plus proches doivent aussi évidemment s'arranger autour des premieres en formant une couche sphérique & ainsi de suite ; de sorte qu'il en résultera une sphère. Mais si cette sphère vient

à tourner autour de l'axe A*a* (fig. 55) avec une certaine vîtesse, je dis qu'elle s'allongera vers l'équateur, & formera un ellipsoïde; car ayant tiré NP perpendiculaire à l'axe A*a*, & décomposant la force CM qui pousse la particule M vers le centre C, en MP & M*p*, l'une perpendiculaire à l'axe A*a*, & l'autre parallèle au même axe, la force PM (du point M) selon MP sera à la force centrifuge du point D comme PM : CD (voyez ce que nous avons dit sur les forces centrales dans nos Institutions Mathématiques, seconde édition). Ainsi l'allongement de PM sera à l'allongement de CD comme PM : CD, & l'on aura PM : CD :: PM + MN = PN : CD + DB = CB. Mais si sur un même axe on décrit un cercle & une ellipse, les ordonnées du cercle sont proportionnelles à celles de l'ellipse (Sections coniques); donc la courbe AB*a* est elliptique & le solide qu'elle engendre est un ellipsoïde.

Si l'on conçoit que lorsque la sphère fluide commence à tourner, on lui ajoute de la nouvelle matiere MN, BD, &c. de maniere que la matiere ajoutée puisse par son poids respectif compenser la force centrifuge des particules M, D, &c. Il est visible que la sphère se changera de même en un ellipsoïde dont toutes les parties seront en équilibre les unes par rapport aux autres, & dans ce cas on n'aura pas besoin de supposer que les colonnes PM, CD &c. s'allongent par l'action de la force centrifuge,

Dans un sphéroïde fluide & elliptique la direction de la gravité doit nécessairement être par-tout perpendiculaire à sa surface; car sans cela les parties fluides ne sauroient être en équilibre, & un corps situé sur la surface ne sauroit rester en repos, mais il descendroit vers les parties les plus basses. On doit donc conclure que la direction de la gravité sur les surfaces des planètes est perpendiculaire à leur surface; & que si la terre a été originairement fluide, elle a dû prendre en tournant sur elle-même la figure d'un sphéroïde renflé vers l'équateur & applati vers les poles.

En supposant que la terre est un sphéroïde elliptique qui differe très-peu d'une sphère, les degrés du méri-

dien, en allant de l'équateur vers les pôles, seroient en raison triplée des perpendiculaires QR (fig. 56); en effet les arcs semblables, c'est-à-dire, d'un même nombre de degrés sont proportionnels à leurs rayons. On peut donc supposer que des arcs d'un seul degré dans un sphéroïde très-peu différent d'une véritable sphère sont proportionnels à leurs rayons osculateurs : or selon ce que nous avons dit (Sections Coniques n°. 57) dans l'ellipse & l'hyperbole les rayons osculateurs sont entr'eux comme les $\frac{M^3 a^2}{b^4}$, M étant la normale, a le premier & b le second demi-axe ; donc puisque a & b sont des constantes, il est visible que les rayons osculateurs sont comme les M^3. Mais $\overline{VC}^2$ ou $xx = \frac{aa}{bb}(bb - yy)$, la sous-normale RV étant $= \frac{bbx}{aa}$; donc $RV^2 = \frac{b^4 x^2}{a^4} = \frac{b^4}{a^2} - \frac{bb}{aa} yy$, & $RQ^2 = RV^2 + VQ^2 = \frac{b^4}{aa} - \frac{bb}{aa} yy + y^2$. Mais au sommet A du grand axe l'on a $y = 0$, tandis qu'au sommet D du petit axe y est $= b$; donc au sommet du grand axe, $QR^2 = \frac{b^4}{aa}$; mais au sommet du petit $\overline{QR}^2$ est $= bb$; donc au sommet du grand axe le rayon osculateur sera représenté par $\frac{bb}{a}$, & au sommet du petit par $\frac{aa}{b}$. Or $\frac{bb}{a} : a :: b : \frac{aa}{b}$; c'est-à-dire, que dans un tel sphéroïde le rayon osculateur au sommet du grand axe, le demi-grand axe, le demi-petit axe, & le rayon de courbure au sommet du petit axe sont en proportion géométrique. Il est visible encore que les longeurs de l'arc d'un degré du méridien à l'équateur, & de l'arc d'un degré au pôle sont entr'elles

comme $\frac{bb}{a} : \frac{aa}{b} :: b^3 : a^3$, c'est-à-dire, comme les cubes du petit demi-petit axe au cube du demi-grand axe. De même la longueur de l'arc d'un degré du méridien sous l'équateur sera à la longueur d'un arc semblable de l'équateur comme $\frac{bb}{a} : a :: bb : aa$, c'est-à-dire, comme le quarré du petit demi-axe à celui du demi-grand axe du sphéroïde.

Cela posé, par des mesures assez exactes le degré du méridien sous l'équateur est d'environ 56753 toises, & si l'on suppose que le degré de l'équateur est d'environ 57247 toises, & qu'on fasse le demi-axe de 230, dont le quarré est 52900, pour avoir la proportion 56753 : 57287 :: 52900 : x, on trouvera x égal au quarré de 231. Ainsi dans cette supposition l'axe de la terre est à celui de l'équateur, comme 230 : 231. Voici une table qui fera connoître le fonds que l'on peut faire sur cette théorie.

Degrés du méridien.	*Latitude.*	*Degrés calculés.*	*Degrés mesurés*	*Différences.*
Au Pérou,	0	56753	56753	
En Afrique,	33°. 18′	56976	57037	— 61.
En Italie,	43°. 1′	57097	56979	+ 118.
En France,	43°. 31′	57104	57048	+ 56.
En Italie,	44°. 44′	57120	57069	+ 51.
En Allemagne,	47°. 40′	57157	57091	+ 66.
En France,	49°. 23′	57179	57074½	+ 104½.
En Angleterre,	53°. 0′	57225	57300	— 75.
En Laponie,	66°. 20′	57374	57400	— 26.

En supposant cette table exacte, on en conclura facilement que la différence du degré du méridien au pôle & à l'équateur est de 74 toises, le demi-diamètre ou le rayon de l'équateur de 3280108 toises, le demi-axe de la terre de 3265909 toises; la différence de hauteur de la terre au pôle & à l'équateur étant de 14199 toises.

Si l'on suppose que le demi-grand axe differe du demi-petit axe de la petite quantité p, on aura $a = b + p$, $a^2 = b^2 + 2bp$, en négligeant p^2 qui est une quantité très petite par rapport à b. Donc la valeur de $\overline{QR}^2$ trouvée ci-dessus deviendra $\overline{QR}^2 = \frac{b^4 - b^2yy}{b^2 + 2bp} + y^2 = b^2 - 2bp + \frac{2py^2}{b}$. Mais dans un sphéroïde très-approchant d'un globe on peut supposer que la normale QR passe par le centre; donc en faisant le sinus de l'angle QRA $= t$, & le sinus total $= 1$, on aura $1 : QR :: t : QV = y$; & $y^2 = t^2 QR^2$. Donc $QR^2 - \frac{2p}{b} \cdot \overline{QR}^2 t^2 = b^2 - 2bp$, ou $\overline{QR}^2 = \frac{bb - 2bp}{1 - 2pb^{-1}t^2} = b^2 - 2bp + 2bpt^2$; & en prenant la racine, on aura $QR = b - p + p.t^2$ à peu-près. Si l'on substitue cette valeur dans $\frac{M^3.aa}{b^4}$, en faisant $aa = b^2 + 2bp$, & qu'on néglige tous les termes dans lesquels p a un exposant plus grand que l'unité, on trouvera le rayon osculateur $QK = b - p + 3pt^2$. Ainsi les différences $3pt^2$ des rayons osculateurs, & par conséquent celles des longueurs des degrés du méridien seront proportionnelles aux quarrés des sinus des angles ARQ, ou au quarrés des sinus des latitudes.

Mais la différence entre les degrés calculés & les degrés mesurés ne permet gueres d'admettre cette hypothèse dans toute la rigueur géométrique Il est vrai que sans faire tort à ces mesures prises par de très-habiles gens, on peut supposer une erreur géographique d'environ 15 ou 18 toises, & une erreur d'environ 4″ dans l'observation; en effet on sait que le frottement du fil à plomb contre l'instrument peut le tenir écarté d'environ 3″ ou 4″ de la verticale, sans parler des imperfections des instrumens que toute l'industrie humaine ne sauroit éviter. Or une erreur d'une seconde dans l'observation doit en donner une d'environ 16 toises

Bb 3

dans la mesure. Car si l'on divise la longueur du degré sous l'équateur ou 56753 par 3600″, on trouvera à peu-près 16 pour quotient. Ainsi il est très-facile qu'il se soit glissé une erreur d'environ 80 toises dans les mesures que nous avons rapportées. D'un autre côté l'attraction des montagnes voisines peut détourner le fil à plomb (des instrumens dont on se sert dans les observations) de la verticale en lui faisant faire un petit angle avec cette ligne : ainsi que cela est arrivé au Pérou par rapport à la montagne Chimboraco ; & peut-être l'attraction de l'Appenin en Italie, celle des Pyrenées en France ont produit un effet semblable. On ne doit donc pas regarder les mesures rapportées dans notre table comme très-exactes. J'ajouterai encore qu'il peut très-bien se faire qu'il y ait de l'irrégularité dans les densités des couches de la terre ; de maniere que la direction de la gravité ne soit pas par tout exactement perpendiculaire à sa surface, ce qui doit nécessairement influer sur la justesse des observations.

Si l'on vouloit trouver la différence du rayon de l'équateur avec le demi-axe de la terre par le moyen des longueurs supposées connues de deux degrés du méridien, on feroit attention que $y^2 = QR^2 . t^2$, comme on l'a déja dit ; de sorte que l'équation $QR^2 = \frac{b^4}{aa} - \frac{bb}{aa} . yy + y^2$ donneroit $QR^2 = \frac{b^4}{aa.(1 - t^2) + b^2 t^2}$. Ainsi le rayon osculateur au point Q sera en raison inverse sesquiplée de $aa(1 - t^2) + bbtt$, c'est-à-dire, comme le cube de la racine de cette quantité. Si on suppose donc deux degrés du méridien dont l'un soit $= B$, & l'autre $= C$; & que les sinus de latitude correspondans soient désignés par t & z, nous aurons $B : C :: [aa - (aa - bb)zz]^{\frac{3}{2}} : [aa - (aa - bb)tt]^{\frac{3}{2}}$, ou $B^{\frac{2}{3}} : C^{\frac{2}{3}} :: [aa - (aa - bb)zz] : [aa - (aa - bb)tt]$. Si l'on égale le produit des extrêmes de cette proportion à celui des moyens, pour en tirer ensuite une autre analogie, on trouvera facilement que a est à b en raison sous-doublée de $B^{\frac{2}{3}} t^2$

$- C^{\frac{2}{3}} \cdot z^2 : C^{\frac{2}{3}} \cdot (1 - zz) - B^{\frac{2}{3}} \cdot (1 - t^2)$.

Si on ſuppoſe de nouveau $a = b + p$, de maniere qu'on puiſſe négliger les puiſſances ſupérieures de p, on aura $B : C :: a - 3p. zz :: a - 3p. t^2$, & $\frac{p}{a} = \frac{B - C}{3Bt^2 - 3Cz^2}$.

Comme M. de Maupertuis ne meſura en Laponie qu'un arc de 57′ 28. 67″, & qu'en meſurant tout l'arc il auroit pu commettre de plus une erreur de $1\frac{1}{2}$″ dans l'obſervation, on peut peut-être ſoupçonner une erreur d'environ 24 toiſes, & cet arc étant ſuppoſé de 57422 toiſes : ſi on le compare avec celui d'Afrique par le moyen de la formule précédente, la différence des demi-axes terreſtres ſera $= \frac{1}{1181}$. Mais en comparant de même le degré Africain avec le Péruvien, cette même différence ſera d'un $\frac{1}{10}$. Le degré Romain étant comparé avec le degré Africain donneroit plutôt la terre allongée vers les Pôles. Il n'eſt donc pas étonnant que les Géomètres ne s'accordent pas ſur le rapport des axes de la terre. M. Muller prétend que ces axes ſont entr'eux comme 215 : 216. M. Bouguer dans ſa figure de la terre donne le rapport entre l'axe & l'équateur comme 178 : 179. Il ſemble même rejetter la figure elliptique, puiſqu'il aſſure que les accroiſſemens des degrés du méridien ſont comme les quatriemes puiſſances des ſinus de latitude. M. Newton prétend que ce rapport eſt le même que celui de 229 : 230. Ainſi l'on voit que les meſures priſes à ſi grands frais, & avec tant d'éclat dans différentes parties du monde & par des Savans célèbres, n'ont pas abouti à grand'choſe ; & que la vraie figure de la terre ſera long-tems, & peut-être toujours inconnue. Mais peut-être auſſi les méridiens de notre globe ne ſont pas égaux entr'eux, la terre étant plus denſe & plus baſſe d'un côté que d'un autre ſous la même latitude.

74. PROBLEME. *Trouver la courbe de la plus vîte deſcente ou la brachyſtocrone* AM, *par le*

moyen de laquelle un corps A *parvienne de* A *en* M *dans le moindre tems possible en supposant le milieu sans résistance* (*fig.* 57). Ayant mené les ordonnées infiniment proches PM, pm, Nn, & les autres lignes que représente la figure, soit $AP = x$, $PM = y$, on aura $Pp = Mr = mf = nF = dx$, $mr = dy$, $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Soit $rF = b$, on aura $mF = b - dy$, $mn = \sqrt{(b - dy)^2 + dx^2}$. La vîtesse le long de l'arc infiniment petit M m pouvant être regardée comme uniforme & comme égale à celle que le corps acquiert en tombant de la hauteur AP, supposons cette vîtesse $= c$ & faisons $=$ C la vîtesse acquise le long Ap, ou la vîtesse avec laquelle l'arc mn est parcouru. Soit enfin t le tems employé à parcourir l'arc AM, le tems le long de Mm sera $= dt$; & parce que dans le mouvement uniforme les espaces sont en raison composée des tems & des vîtesses, on aura $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = c\,dt$, de même $mn = \sqrt{[(b - dy)^2 + dx^2]} = C\,dt$; donc le tems employé à parcourir l'arc Mn sera $= 2\,dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{c} + \frac{\sqrt{(bb - 2bdy + dy^2 + dx^2)}}{C}$; mais la courbe A$n$ doit être telle que si le corps descendoit de M en n, il devroit employer le moins de tems possible; donc le tems $2\,dt$ est un *minimum*; donc $2\,ddt = \frac{dyddy}{c\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} + \frac{dyddy - bddy}{C\sqrt{(bb - 2bdy + dy^2 + dx^2)}} = 0$, en suppo-

ſant dx conſtant ; donc en diviſant par ddy & tranſpoſant, $\frac{dy}{c\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = \frac{b-dy}{C\sqrt{(bb-2bdy+dy^2+dy^2)}}$, c'eſt-à-dire, $\frac{rm}{c.Mm} = \frac{mF}{C.mn}$, ou $\frac{c.Mm}{rm} = \frac{C.mn}{mF} = \frac{C.mn}{fn}$; donc parce que la vîteſſe c eſt comme $\sqrt{AP}$, & la vîteſſe C comme $\sqrt{Ap}$, le produit de la racine de l'abſciſſe par l'élément de l'arc correſpondant étant diviſé par la différentielle de l'ordonnée, donne toujours une quantité conſtante que je ferai $= \sqrt{a}$, pour avoir $\frac{\sqrt{AP}.Mn}{rm}$, ou $\frac{\sqrt{x}.Mn}{dy} = \sqrt{a}$, ou $\frac{\sqrt{x}.\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy} = \sqrt{a}$, ou $x.(dx^2+dy^2) = ady^2$, d'où l'on tire $dy^2 = \frac{xdx^2}{a-x}$, $dy = \frac{\sqrt{x}.dx}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{xdx}{\sqrt{(ax-xx)}} = \frac{adx}{2\sqrt{(ax-xx)}} - \left[\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{(ax-xx)}}\right]$; donc en intégrant & ajoutant une conſtante, $y + C = S.\frac{adx}{2\sqrt{(ax-xx)}} - \sqrt{(ax-xx)}$. Suppoſant que $AB = a$ ſoit le diamètre du demi-cercle AQB, l'ordonnée QP ſera $= \sqrt{(ax-xx)}$, & $S.\frac{adx}{2\sqrt{(ax-xx)}} = S.\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ ſera l'arc AQ ; donc $y + C = AQ - QP$. Mais lorſque $y = 0$, l'arc AQ, & l'ordonnée QP deviennent $= 0$; donc $C = 0$, & $y = AQ -$

QP; c'est-à-dire, l'ordonnée de la courbe cherchée est égale à l'arc de cercle correspondant dont le diamètre est $= a$, moins le sinus de cet arc.

Maintenant dans la demi-cycloïde AV (fig. 54) l'ordonnée MP est égale à l'arc MV; mais en comptant les ordonnées depuis le diamètre AV, l'ordonnée RP est égale à l'arc MV plus le sinus de cet arc, & l'on a $FP + PM + MR = AD = VM + MD$. Donc en retranchant d'un côté PM & de l'autre l'arc VM, on aura $FP + MR = MaD$; donc FP est égale à l'arc MD moins le sinus de cet arc. C'est pourquoi si DV est supposée $= a$, que AF soit la ligne AP de la figure 57, le point M de notre figure sera représenté par le point P de la figure 54; donc la courbe cherchée est une cycloïde dont le diamètre du cercle générateur est $= a$.

Pour déterminer le diamètre a du cercle générateur, on remarquera que les cycloïdes étant produites par des cercles générateurs (qui sont des courbes semblables) par une loi constante, sont nécessairement des courbes semblables. Cela posé, soit A (fig. 58) le point d'où part le corps A, M celui où il doit arriver dans le moindre tems possible. Pour déterminer le diamètre $BC = a$ du cercle générateur de la demi-cycloïde AMB, je tire la ligne AM & la ligne horisontale indéfinie AmC à laquelle je mène par le point M la perpendiculaire Mm. sur Am prise pour demi-base, je décris la demi-cycloïde Anb dans laquelle je connois la demi-circonférence Am du cercle générateur, & par conséquent je puis avoir, du moins à très-peu près le diamètre mb du cercle générateur. Par le point n je mene la ligne

mn, & par le point M sa parallèle MC, AC sera la demi-base de la cycloïde cherchée AMB : car les lignes A*n*, AM également inclinés à la ligne A*m*C sont des lignes homologues par rapport aux demi-cycloïdes A*b*, AB; or à cause des triangles semblables A*nm*, AMC on a A*n* : AM : : A*m* : AC; donc A*m* & AC sont aussi des lignes homologues. Mais A*m* est la base de la demi-cycloïde A*b*; donc AC est la base de la demi-cycloïde cherchée AMB, & CB le diamètre *a* du cercle dont la demi-circonférence = AC.

75. PROBLEME. *Déterminer la nature de la courbe* BN *le long de laquelle un corps* B *parcourera en s'approchant de l'horison* FN *des hauteurs égales en tems égaux, ou le long de laquelle le corps s'aprochera également de l'horison en tems égaux* (*fig.* 59). Soit $BP = x$, $Pp = dx$, $PM = y$, le tems le long de M*m* étant $= dt$, la vîtesse au point $M = \sqrt{x}$, on aura $\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{x}} = dt = dx$, parce que par la nature du problême les hauteurs verticales P*p* sont comme les tems le long de M*m*; donc ôtant la fraction, quarrant & transposant, $dy^2 = xdx^2 - dx^2 = (x - 1) dx^2$, $dy = dx\sqrt{(x - 1)}$, $y + c = S. dx (x - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{3}{2}}$, en ajoutant une constante. En faisant $x - 1 = z$, on aura $y + c = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$, ou $\frac{9}{4}(y + c)^2 = z^3$, équation à une parabole cubique dont le paramètre $= \frac{9}{4}$, l'ordonnée $= y + c$ & l'abscisse $= z$. Mais en supposant $c = 0$, comme cela est évidemment permis ici, ou ce qui revient au même en n'ajoutant point

de constante : car elle est inutile, l'on aura $\frac{9}{4}.y^2 = z^3$; donc la courbe cherchée BMN est une parabole cubique dont l'abscisse AP $= z$, l'ordonnée PM $= y$, & le paramètre $= \frac{9}{4}$. Mais lorsque AP $= z$ est $= 0$, on a $x = 1$; donc l'origine des x n'est pas en B, comme nous l'avons supposé d'abord, mais en A, en faisant AB $= 1$, & le paramètre de la parabole sera $\frac{9}{4}$. AB $= \frac{9}{4}.a$, en faisant AB $= 1 = a$, & alors la vîtesse en M sera $= \sqrt{x} = \sqrt{AP} = \sqrt{(AB + BP)}$. Donc au point B cette vîtesse sera $= \sqrt{AB} = \sqrt{a}$. Ainsi pour que le mobile descende selon la loi qu'exige le problême, avant d'atteindre le sommet B de la courbe, il doit avoir acquis une vîtesse égale à celle qu'un corps acquéreroit en tombant librement de la hauteur AB. Mais en faisant $1 = a$, le paramètre est $= \frac{9}{4}a$; donc la vîtesse à l'origine B de la courbe doit être égale à celle qu'un corps acquéreroit en tombant librement d'une hauteur égale aux $\frac{4}{9}$ du paramètre.

Du mouvement des pilons dans les moulins à poudre.

76. LEMME. 1°. *Le cosinus d'un angle m est à son sinus, comme le rayon (que je suppose $= 1$) est à sa tangente ;* donc *cos. m. tang. m.* $=$ *sin. m.* 2°. Le cosinus est au rayon comme le rayon à la sécante ; donc *sec. m* $= \frac{1}{cos.\ m}$. Ce Lemme ne peut avoir aucune difficulté pour ceux qui ont lu notre Géométrie.

77. PROBLÊME. *La ligne horisontale* CA *tangente de la courbe* AKM (*fig.* 60) *doit se mouvoir dans le plan vertical* ZAC, *& autour du point* C, *de maniere qu'un des points de la courbe doit se trouver continuellement dans la verticale* AZ, *la tangente à ce point étant toujours horisontale, on demande la nature de la courbe* AM. Supposons que la courbe AMK soit parvenue dans la

ſituation akm, le point k de cette courbe (qui eſt le même que le point K) étant ſitué dans la verticale AZ; par la nature du problême la tangente kt doit être horiſontale, & l'angle Ckt ſera $= kCA = aCA - aCk = aCA - ACK = a - p$, en faiſant l'angle variable $aCA = a$, & $ACK = p$. Soit $AC = r$, la ſécante de l'angle $a - p$ priſe dans le cercle dont le rayon $= 1$, eſt à la ſécante du même angle lorſque le rayon eſt r, comme $1 : r$; donc $CK = Ck = r. ſec. (a - p) = \frac{r}{coſ. (a - p)}$, par le Lemme précédent. Ainſi en faiſant $CK = x$, nous aurons $x = \frac{r}{coſ. (a - p)}$. Du centre C avec le rayon x je décris l'arc infiniment petit KN, & je tire la ligne CNM, pour avoir $MN = dx$, & $KN = xdp$, dp étant un angle, ou un arc pris dans un cercle dont le rayon $= 1$. Maintenant $dx : x.dp :: 1 : tang.\ NMT = tang.\ Ckt = tang.\ (a - p)$; c'eſt pourquoi $\frac{x.dp}{dx} = tang.\ (a - p)$, $\frac{r.dp}{dx\, coſ. (a - p)} = tang.\ (a - p)$, ou $\frac{r.dp}{dx} = tang.\ (a - p). coſ.\ (a - p) = ſin.\ (a - p)$, par le Lemme précédent.

Pour éliminer l'indéterminée a, on remarquera que l'équation $x = \frac{r}{coſ. (a - p)}$ donne $coſ.\ (a - p) = \frac{r}{x}$. Mais en retranchant le quarré du coſinus de celui du rayon, il reſte le quarré du ſinus; donc $ſin.\ (a - p) = \frac{\sqrt{(xx - rr)}}{x} = \frac{r.dp}{dx}$; & partant $r.dp = \frac{dx \sqrt{(xx - rr)}}{x}$.

Soit $\sqrt{(xx - rr)} = y$, ou $xx = yy + rr$, l'on

aura $x\,dx = y\,dy$, $\frac{dx}{x} = \frac{y\,dy}{y^2 + r^2}$, $\frac{dx\sqrt{(xx - rr)}}{x}$ $= \frac{yy\,dy}{yy + rr} = dy - \frac{rr.\,dy}{yy + rr}$. Mais la tangente d'un angle z étant supposée $= \frac{y}{r}$, l'on aura $\frac{rr\,dy}{yy + rr} =$ $r\,dz$. De plus $\frac{dy}{r} = d.\,tang.\,z$; donc $dp = r.\,d\,tang.\,z$ $- r.\,dz$, $dp = d.\,tang.\,z - dz$, & $p = tang.\,z - z =$ $\frac{y}{r} - A.\,tang.\,\frac{y}{r} = \frac{\sqrt{(xx - rr)}}{r} - A.\,tang.\,\frac{\sqrt{(xx - rr)}}{r}$ $= \sqrt{\left(\frac{xx}{rr} - 1\right)} - A.\,tang.\sqrt{\left(\frac{xx}{rr} - 1\right)}$; A désignant un angle, ou si l'on veut encore un arc pris dans un cercle dont le rayon $= 1$.

Puisque $\frac{x\,dp}{dx} = tang.\,(a - p)$, & que $r\,dp =$ $\frac{dx\sqrt{(xx - rr)}}{x}$, l'on a $\frac{x\,dp}{dx} = \frac{\sqrt{(xx - rr)}}{r} =$ $tang.\,(a - p) = tang.\,z$; donc $a - p = z$, & $a =$ $z + p$.

Maintenant r étant donné, on prendra x à volonté, & l'on cherchera $y = \sqrt{(xx - rr)}$, ce qui fera connoître $tang.\,z = \sqrt{\left(\frac{xx}{rr} - 1\right)}$, & $p = tang.\,z - z$: il est visible qu'on ne doit pas prendre $x < r$, autrement y seroit imaginaire. Il sera donc facile de construire la courbe A K M.

Soit A K (fig. 61) la développante d'un cercle dont le rayon C A $= r$, D K sera égal à l'arc A B D. Supposons l'angle B C D $= z$, l'angle A C B $= p$, C K $= x$; il est évident que l'arc A B D sera $= r\,(p + z)$. Mais par la nature de la courbe A K, l'arc A B D est $=$ D K; donc D K $= r\,(p + z)$. D'un autre côté le triangle rectangle C D K, donne D K $= \sqrt{(xx - rr)}$,

en faisant $CK = x$; ainsi la tangente de l'angle BCD prise dans le cercle dont le rayon est r, est $= r.(p + z)$; donc $\frac{DK}{r} = (p + z)$. Or $\frac{DK}{r}$ est la tangente de l'angle z en prenant cet angle dans le cercle dont le rayon $= 1$; ainsi $\frac{DK}{r} = tang.\ z = p + z$, & $p = tang.\ z - z$. De-là il suit que la courbe cherchée n'est autre chose que la développante d'un cercle dont le rayon $= r$, le rayon osculateur de la courbe AK étant toujours $= r(p + z) = r.a$.

78. POUR faire l'application de ce problême à la méchanique, soit P (fig. 62) un de ces pilons dont on se sert dans les moulins à poudre ou à papier, portant une piece transversale H qu'on nomme le *mentoné* ou la *dent* du pilon, & qui doit lui être perpendiculaire. La *levée ak* qui se meut avec le rayon aC autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical ZACa par l'action d'une roue que l'eau met en mouvement, éleve la piece H & avec elle le pilon P, de maniere que l'extrémité de la dent H doit toujours se trouver dans la verticale AZ. C'est pourquoi pour que la levée ak puisse glisser le plus facilement qu'il est possible sous la dent du pilon qui doit retomber quand il est parvenu à une certaine hauteur, il est nécessaire que la tangente au point k qui se trouve dans la verticale AZ soit continuellement horisontale; ainsi la figure de la levée ak doit être une portion de la développante d'un cercle dont le rayon $=$ CA.

Supposons que le rayon CA décrit un cercle entier dans un nombre n de secondes; si nous faisons $1 : c$ le rapport du rayon à la circonférence, l'angle aCA $= a$ sera décrit dans un tems exprimé par $\frac{n.a}{c}$, & divisant l'angle a par le tems employé à le décrire, $\frac{c}{n}$ sera la vîtesse angulaire de la ligne CA, c'est-à-dire, sera l'angle que décrit la ligne CA, ou Ca à chaque seconde. C'est pourquoi (fig. 63) ayant tiré kp

perpendiculaire à Ck, le point k aura dans la direction kp une vîtesse exprimée par $\frac{c.x}{n}$, en faisant C$k = x$, & il décrira un arc $= x.da$ (a est un arc variable) dans le même-tems dt que le point a décrit l'arc $r.da$.

Ayant mené l'horisontale pq, les triangles pqk, CkA seront semblables ; car ils ont un angle droit, l'un en q, l'autre en A ; mais de plus l'angle $pkq =$ kCA, puisqu'ils sont tous les deux complémens de CkA ; donc la vîtesse horisontale du point k est $= \frac{pq}{pk} \cdot \frac{c.x}{n}$. Mais $pk : pq :: 1 : \textit{sin.}\ k\text{CA} = \textit{sin.}\ z$; donc la vîtesse horisontale du point k est $= \frac{xc}{n} \cdot \textit{sin.}\ z$ $= \frac{c}{n} \cdot r\ \textit{tang.}\ (a - p) = \frac{c}{n} \cdot r.\ \textit{tang.}\ z$, en substituant la valeur $\frac{r}{\textit{cos.}\ (a-p)}$ de x. Mais $\textit{tang.}\ (a - p) =$ $\textit{tang.}\ z = p + z = a$; donc cette vîtesse est $= \frac{c}{n} \cdot r.a.$ de même la vîtesse verticale du point k est $= \frac{c}{n} \cdot x\ \textit{cos.}\ z$ $= \frac{c.r.\textit{cos.}\ z}{n.\textit{cos.}\ z} = \frac{c.r}{n}$, quantité constante qui nous fait voir que le mouvement du pilon en montant est uniforme.

Si l'on fait maintenant $c : n :: da : dt = \frac{nda}{c}$, on aura le tems employé à décrire l'arc infiniment petit da, & $t = \frac{na}{c}$. Or t exprime le tems que la dent H met à monter de A en k, ou le tems que la levée met à glisser de a en k.

Suppofons à présent que le poids du pilon étant = P $\frac{P}{m}$ exprime le frottement, c'est-à-di.., que la raison

de

de la pression au frottement soit $= \frac{P}{m}$, & que l'effet du frottement doive s'estimer par le produit du tems (que le corps frotte) & de la vîtesse avec laquelle s'exécute le frottement (c'est ici la vîtesse horisontale), $\frac{P}{m} \cdot \frac{c}{n} \cdot r.a\,dt$ $= \frac{Pr.a\,da}{m}$ sera l'effet du frottement pendant le tems dt, & $\frac{Pr.a^2}{2m}$ exprimera cet effet pendant le tems t employé à élever la dent H de A en k.

La maniere d'estimer l'effet du frottement que nous venons de donner n'est peut-être pas exacte; mais dans une matiere aussi difficile, aussi obscure, & aussi incertaine que l'est encore la théorie du frottement, on doit se contenter d'une méthode moins rigoureuse quand on ne peut pas parvenir à la justesse géométrique dont les solutions d'un très-grand nombre de Problêmes Physico-Mathématiques ne paroissent pas susceptibles; parce qu'on n'a pas assez de données pour les résoudre.

Des puissances qui tendent les cordes ou les fils.

79. PROBLÊME. *Soit une corde* ACBD *attachée aux points immobiles* A, D *& tendue par des puissances quelconques* $CP = p$, $BQ = q$, *déterminer le rapport de* p *à* q *pour que la corde reste dans la situation* ACBD (fig. 64). Ayant prolongé les directions PC, QB des puissances p & q, de maniere que EC soit $= p$, & $BI = q$, j'acheve les parallelogrammes GCFE, BHIK, la tension de la corde CB (exprimée par la force CF) sera à la puissance p comme CF : CE. Mais dans l'équilibre la corde CB sera également tendue dans la direction CB & dans la direction BC; donc l'action BK est $=$ CF; donc la puissance q est à la tension B selon BC comme

BI : BK = CF; donc $p = \frac{B.CE}{CF}$, $q = \frac{B.BI}{CF}$, & $q:p::$ CE : BI; mais BI : BK = IH :: *sin.* IHB = *sin.* DHI = *sin.* CBD : *sin.* IBD, & CF : CE :: *sin.* CEF = *sin.* ACE : *sin.* EFC = *sin.* ACB. Si l'on multiplie les deux proportions BI : BK :: *sin.* CBD : *sin.* IBD, & CF=BK : CE :: *sin.* ACE : *sin.* ACB, il sera aisé de voir que $q:p::$ BI : CE :: *sin.* CBD. *sin.* ACE : *sin.* IBD. *sin.* ACB.

COROLLAIRE. Si deux puissances BQ = q, NB = m sont supposées être appliquées au point B, tandis que deux autres puissances PC = p, CR = R agissent sur le point C (fig. 65), on déterminera facilement les conditions de l'équilibre entre ces puissantes. Car si les puissances p & q étoient seules, on auroit $q:p::$ *sin.* CBD × *sin.* ACE : *sin.* IBD. *sin.* ACB, ou p. *sin.* CBD × *sin.* ACE = q. *sin.* IBD. *sin.* ACB. Si les seules puissances m & R agissoient, on auroit R. *sin.* CBD. *sin.* ACL = m *sin.* MBD. *sin.* ACB. Mais l'équilibre ne sauroit subsister, à moins que la corde ne soit également tirée dans la direction CB & dans la direction BC; il est donc nécessaire que l'on ait l'équation p. *sin.* CBD × *sin.* ACE + R. *sin.* CBD. *sin.* ACL = q × *sin.* IBD. *sin.* ACB + m. *sin.* MBD. *sin.* ACB, ou

$$\frac{p.\,sin.\,ACE}{sin.\,ACB} + \frac{R.\,sin.\,ACL}{sin.\,ACB} = \frac{q.\,sin.\,IBD}{sin.\,CBD} + \frac{m.\,sin.\,MBD}{sin.\,CBD}.$$

80. PROBLEME. *Trouver la nature de la courbe que forme un fil dont chaque point reçoit l'action de deux puissances quelconques, dont l'une est perpen-*

diculaire à la courbe, tandis que l'autre est toujours parallèle à une ligne donnée de position (fig. 66). Que A C, C B, B D représentent trois élémens de la courbe cherchée, qu'on prenne H T pour l'axe des abscisses, & qu'on mène l'ordonnée G A $= y$, à laquelle les directions des puissances R C $=$ R, N B $= m$ soient supposées parallèles. A cause que les angles A C B, C B D different infiniment peu de deux angles droits, & que les puissances C P $= p$, B Q $= q$ sont perpendiculaires à la courbe, leurs directions coupent en deux parties égales (& dont chacune differe infiniment peu d'un angle droit) les angles A C B, C B D. Qu'on mène les lignes A a, A h, A c, respectivement perpendiculaires à P E, B C, g C; ayant pris A C pour sinus total $= 1$, on aura A a $=$ *sin.* A C E, A h $=$ *sin.* A C h $=$ *sin.* A C B & A c $=$ *sin.* A C g. Mais A C B est double de A C E, dont le cosinus est C a; donc A h $=$ 2. A a. C a (Géo. 136) $=$ 2. C a, parce que A a differe infiniment peu de A C $= 1$. On trouvera de même que C n $=$ *sin.* C B D $=$ 2. B b; mais f D $=$ *sin.* D B T.

Cela posé, les puissances p, q, R, m doivent (par le Corollaire précédent) être telles que l'on ait

$$\frac{p.\,\mathit{sin.}\,ACE}{\mathit{sin.}\,ACB} + \frac{R\,\mathit{sin.}\,ACg}{\mathit{sin.}\,ACB} = \frac{q.\,\mathit{sin.}\,IBD}{\mathit{sin.}\,CBD} + \frac{m.\,\mathit{sin.}\,TBD}{\mathit{sin.}\,CBD},$$

ou (en substituant les valeurs des sinus (& faisant attention que A a $=$ C A, C b $=$ C B),

$$\frac{p.\,AC}{2\,Ca} + \frac{R.\,Ac}{2\,Ca} = \frac{q.\,CB}{2\,Bb} + \frac{m.fD}{2\,Bb} \ldots (H).$$

Soit C E le rayon de courbure $=$ T, on aura

$Ca = \frac{\overline{AC}^2}{2T}$ (*), ou $2Ca = \frac{ds^2}{T}$. Soit $BI = V$ le rayon osculateur au point B de la courbe, on aura $2Bb = \frac{\overline{AC}^2}{V}$ (en faisant $AC = BC$, ou en supposant ds constant) $= \frac{ds^2}{V}$. Soit $HG = x$, $Gg = Ac = dx$; donc gT différentielle de $Hg = x + dx$, sera $= dx + ddx$ & $Tt = fD$ différentielle de $HT = x + 2dx + ddx$, sera $= dx + 2ddx$, en négligeant la différentielle d^3x, qui est ici inutile. Mais la puissance est $q = p + dp$, $m = R + dR$, & $V = T + dt$; ces quantités étant introduites dans l'équation (H), elle deviendra $\frac{p.T}{ds} + \frac{R.Tdx}{ds^2} = \frac{(p+dp).(T+dT)}{ds} + \frac{(R+dR).(T+dT).(dx+2ddx)}{ds^2}$. Effectuant les multiplications indiquées, effaçant ensuite les quantités communes aux deux membres de l'équation, & omettant les termes $\frac{dT.dp}{ds}$, $\frac{2RdTddx}{ds^2}$, &c. qui s'évanouissent devant les autres, nous trouverons l'équation $0 = \frac{p.dT}{ds} + \frac{Tdp}{ds} + \frac{RdTdx}{ds^2} + \frac{2RTddx}{ds^2} + \frac{TdR.dx}{ds^2}$, ou $(pdT + Tdp)ds$

(*) Car le sinus verse d'un arc circulaire évanouissant est égal au quarré de l'arc divisé par le diamètre. Voyez ce que nous avons dit dans les Sections Coniques à l'occasion du rayon osculateur.

$+ R\,dT\,dx + RT\,ddx + T\,dR\,dx = - RT\,ddx$. Dont l'intégrale (à cause de ds constant) sera $pT\,ds + RT\,dx = C - S.RT\,ddx$. Mais (Section 1, n°. 103) le rayon osculateur T est $= \frac{ds\,dy}{ddx}$; donc $pT\,ds + RT\,dx = C - ds.SR\,dy$, équation qui détermine la courbe cherchée.

Si le fil est tendu par les seules forces perpendiculaires à la courbe, on aura $R = 0$, & l'équation de la courbe deviendra $pT\,ds = C$, ou $p = \frac{C}{T\,ds}$; c'est-à-dire, que les puissances normales seront en raison inverse des rayons osculateurs, à cause de ds constant. Si les puissances normales sont toutes égales & proportionnelles à l'élément ds de la courbe, il est visible qu'on aura $T = \frac{C}{p\,ds} = c$, quantité constante; c'est-à-dire que le rayon osculateur sera constant, ainsi la courbe cherchée sera un cercle. Donc si une corde ou une surface flexible & non pesante est poussée en chacun de ses points, par des forces égales & qui lui soient perpendiculaires, elle prendra une courbure circulaire, si c'est une corde, & une courbure sphérique si c'est une surface fermée de toutes parts. On peut comprendre par là pourquoi les bulles d'air qui se dégagent d'une liqueur échauffée, de l'eau, par exemple, prennent la figure sphérique : l'air intérieur en se dilatant, presse également & perpendiculairement tous les points de la surface de la bulle.

Si les forces perpendiculaires à la courbe sont

nulles, nous aurons $p = 0$, & notre équation deviendra $R\,dT.\,dx + RT\,ddx + T\,dR\,dx = -RT\,dx$, qui, en transposant & divisant par $TR\,dx$, se change en celle-ci $\frac{dT}{T} + \frac{2\,ddx}{dx} = -\frac{dR}{R}$, dont l'intégrale est $L.T + 2\,L.dx = 2\,L.\,ads - L.R$ (en ajoutant la constante $2\,L.ads$); ou $T\,dx^2 = \frac{a^2ds^2}{R}$, d'où l'on tire $T = \frac{a^2ds^2}{R\,dx^2}$. Mais le sinus total étant supposé $= 1$, $\frac{dx}{ds}$ est le sinus de l'angle de la courbe avec l'ordonnée ; ainsi dans cette hypothèse les puissances parallèles sont en raison inverse des rayons osculateurs & des quarrés des sinus des angles que les directions de ces puissances font avec la courbe.

COROLLAIRE. Si les puissances R représentent les poids des élémens du fil dont la pésanteur spécifique (c'est-à-dire par exemple le poids d'un pouce de ce fil) soit $= g$, nous aurons $R = g\,ds$. Si dans l'équation $p\,T\,ds + R\,T\,dx = C - ds\,S.\,R\,dy$, on substitue $g\,ds$ au lieu de R, $\frac{dy\,ds}{ddx}$, au lieu de T, a^2ds^2 à la place de C, ce qui est très-permis, & qu'on fasse $p = 0$, il viendra $\frac{g\,dy\,ds^2dx}{ddx} = a^2ds^2 - ds^2.\,S.\,g\,dy$, ou $g\,dy\,dx = a^2ddx - gy\,ddx$, ou $g\,dy\,dx + gy\,ddx = a^2ddx$, dont l'intégrale, en ajou-

tant la conſtante $b^2 ds$, *eſt* $g y d x = a^2 dx + b^2 ds$. Mais $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc $g y d x - a^2 dx = b^2 \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, $dx^2 (gy - a^2)^2 = b^4 (dx^2 + dy^2)$, ou $dx = \frac{bbdy}{\sqrt{[(gy - a^2)^2 - b^4]}}$, ou en faiſant $gy - aa = z$, $dx = \frac{bbdz}{g\sqrt{(z^2 - b^4)}}$, équation de la chaînette & qui eſt de la même forme que celle que nous avons trouvée ci-deſſus (*).

81. PROBLÊME. *Déterminer la courbure d'un fil* A*a*N *ſans péſanteur tendu par une tringle de fer* B D (*fig.* 67) *par le moyen des cordons a* C *attachés à tous les élémens de ce fil.* Tous les élémens *aa* du fil étant tendus par la partie coreſpondante C C de la tringle, les puiſſances R ſont comme les différentielles A M $= dx$, que g repréſente la gravité ſpécifique de la tringle, R ſera $= g\,dx$; parce que $p = 0$, en mettant dans

(*) Il eſt viſible que $x = S. \frac{b^2}{g} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - b^4)}}$, & que $\frac{dz}{\sqrt{(z^2 - b^4)}}$ eſt la différentielle de $L.[z + \sqrt{(z^2 - b^4)}]$. Il n'eſt donc pas difficile d'intégrer l'équation ci-deſſus ; je ne m'y arrête pas, parce que nous avons déja conſtruit la courbe dont il s'agit. Il n'eſt pas non plus difficile de comprendre qu'en faiſant abſtraction de la peſanteur d'une voile enflée par le vent, en la ſuppoſant cependant rectangulaire, & que les deux bords oppoſés ſupérieur & inférieur forment une ligne droite ; il n'eſt pas, dis-je, difficile de comprendre que toutes les coupes de la voile faites par des plans parallèles à la direction du vent, formeront une courbe de la même nature que la chaînette, pourvu qu'on ſuppoſe que les particules d'air s'échappent après qu'elles ont fait leur choc.

l'équation $T = \frac{a^2 ds^2}{R dx^2}$, $g dx$ au lieu de R, & $\frac{dy ds}{ddx}$ à la place de T, nous trouverons $\frac{dy}{ddx} = \frac{aads}{gdx^3}$, ou $g dy = aads. \frac{ddx}{dx^3}$, dont l'intégrale (à cause de ds constant) sera $gy = -\frac{aads}{2dx^2}$. Puisque a^2 est une constante arbitraire, on peut, afin de conserver l'homogenéité de l'équation, écrire $-bds$ au lieu de a^2 pour avoir $gy = \frac{bds^2}{2dx^2}$. Mais $ds^2 = dx^2 + dy^2$; donc $dx = \frac{dy \sqrt{b}}{\sqrt{(2gy - b)}}$, dont l'intégrale est $x = \frac{\sqrt{b}}{g} \times \sqrt{(2gy - b)}$, ou $g^2 x^2 = b(2gy - b) + C$. En examinant cette équation avec un peu d'attention, il n'est pas difficile de s'appercevoir qu'elle appartient à la parabole d'Appollonius; ainsi la courbe cherchée A*m* est une parabole vulgaire. Mais laissons-là cette théorie plus curieuse qu'utile, & passons à des recherches plus importantes.

Des machines accélérantes & uniformes.

82. DÉFINITIONS. *J'appelle machines accélérantes celles qui sont mises en mouvement par des puissances accélérantes ou retardantes. J'appellerai machines uniformes celles qui sont mises en mouvement par des puissances dont l'action est uniforme.*

Les puiſſances qui font mouvoir les machines ſont les poids, les animaux, les fluides.

83. PROBLÊME. *Soit le levier* A C B *mobile autour du point* C, *& chargé de deux poids* P *&* Q *qui ne ſoient pas en équilibre, on demande le tems de la deſcente du poids* P *ou de la montée du poids* Q (*fig.* 68). Soit $AC = a$, $CB = b$, ſi les poids étoient en équilibre, on auroit $a : b :: Q : P = \frac{bQ}{a}$. Donc pour que P faſſe mouvoir la machine, on doit avoir $P > \frac{bQ}{a}$; & la puiſſance qui accélérera le mouvement du levier ſera $= P - \frac{bQ}{a}$. Puiſque cette puiſſance étant appliquée au point Q, doit accélérer le mouvement de P & de Q, ſi au lieu de la maſſe Q, on ſubſtitue au point A une autre maſſe repréſentée par $\frac{bbQ}{aa}$, elle doit recevoir le même mouvement à la diſtance A C, que Q à la diſtance C Q. C'eſt donc la même choſe que ſi la puiſſance $P - \frac{bQ}{a}$ devoit faire mouvoir les maſſes $P + \frac{b^2 Q}{aa}$. Donc la vîteſſe accélératrice, qui eſt toujours égale à la puiſſance accélérante diviſée par la maſſe ſur laquelle elle agit, ou qui eſt en raiſon inverſe de la maſſe & en raiſon directe de la force motrice, ſera $= \frac{(aP - bQ)a}{Paa + Qbb}$.

Que g repréſente la force accélératrice, $\frac{v}{2}$ l'eſpace que cette cauſe fait parcourir dans une ſeconde aux corps qui ſont expoſés à ſon action, t le tems que le corps P met à deſcendre. On ſait qu'avec la vîteſſe acquiſe au bout du tems t, le corps P, s'il étoit livré à lui-même, parcoureroit d'un mouvement uniforme un eſpace double de celui qu'il vient parcourir; mais la vîteſſe eſt comme le produit du tems & de la force g; donc $\frac{v}{2} = g\,dt$, & $v = 2g\,dt$. Mais dans le mouvement uniforme, tel qu'on peut le conſidérer pendant le tems dt, l'eſpace eſt comme la vîteſſe; donc v peut repréſenter la vîteſſe. ſi la force que nous prenons pour l'unité de force, en prenant en même tems 1″ pour l'unité de tems, n'eſt pas celle de la gravité, qu'elle en ſoit ou un multiple ou une partie déſignée par $\frac{(aP - bQ)a}{Paa + Qbb}$, il eſt aiſé de voir que dans ce cas, après le tems t, l'on aura $v = 2gt \times \frac{(Pa - bQ)a}{Paa + Qbb}$. Mais $a : b :: v : \frac{bv}{a}$; vîteſſe du poids Q; donc cette vîteſſe ſera $= 2gt \times \frac{(Pa - bQ)b}{Paa + Qbb}$.

Soit l'eſpace parcouru $= x$, l'on aura $dx = v\,dt$, & $dt = \frac{dx}{v}$. Donc $v\,dv = 2g\,dx \frac{(Pa - Qb)a}{Paa + Qbb}$; & $v^2 = 4gx \frac{(Pa - Qb)a}{Paa + Qbb} = 4g^2t^2 \frac{(Pa - Qb)^2a^2}{(Paa + Qbb)^2}$, & $x = \frac{gt^2(Pa - Qb)a}{Paa + Qbb}$.

La ſolution de ce problême peut s'appliquer facilement aux autres machines accélérantes qui peuvent toutes, excepté le plan incliné, ſe réduire au levier. S'il s'agit d'une poulie, dans ce cas les diſtances (ce ſont les bras de levier) a & b ſont égales, auſſi-bien que les vîteſſes des poids P & Q, la vîteſſe de chacun ſera $= 2gt\frac{P-Q}{P+Q}$; & l'eſpace x que chacun parcourera dans le tems t ſera $= gt^2 \frac{(P-Q)}{P+Q}$. Soit $t = 61''$ $P = 12$ livres, $Q = 4$, $g = 15$ pieds, on aura $x = 270$, c'eſt-à-dire que l'eſpace que l'un & l'autre corps parcoureront dans $61''$ ſera de 270 pieds.

84. PROBLEME. *Déterminer la conſtruction d'une machine accélérante qui doit rendre la vîteſſe du fardeau Q un maximum.* Si dans l'expreſſion $\frac{(Pa-Qb)b}{Paa+Qbb}$ de la vîteſſe de Q, on conſidere b comme un *maximum*, on aura, dans ce cas l'équation, $\frac{(Pa-2Qb)db}{Paa+Qbb} - \frac{2Qbbdb(Pa-Qq)}{(Paa+Qbb)^2}$ $= 0$; d'où l'on tire $(Paa+Qbb).(Pa-2Qb)$ $= 2Qbb(Pa-Qb)$, $b^2 + 2ab = \frac{Paa}{Q}$, & $b = -a + \sqrt{\left(\frac{Paa}{Q} + aa\right)}$, ou $\frac{b}{a} = -1$ $+ \sqrt{\left(\frac{P+Q}{Q}\right)}$; donc la machine doit être conſtruite de maniere que l'on ait $1 : -1. +$

$\sqrt{\left(\frac{P+Q}{Q}\right)} :: a : b$. Comme le plan incliné n'appartient pas aux machines qu'on peut réduire au levier, nous allons donner une solution particuliere pour cette machine.

85. PROBLÊME. *Si la masse* Q *placée sur un plan incliné* AB (*fig.* 69) *doit être enlevée par le poids* P *au moyen d'une corde qui joint ces deux masses & qui passe sur la poulie* F, *on demande l'inclinaison du plan pour que le tems de l'élévation du poids* Q *soit le plus petit possible, nous supposons la portion* FQ *de la corde parallèle au plan incliné*. Soit $AB = x$, $AC = a$, la masse Q descendra sur le plan incliné par l'action d'une force $= \frac{Qa}{x}$ (*). Il est donc nécessaire que $P > \frac{Qa}{x}$. Ainsi la force accélératrice sera $= \frac{Px - Qa}{x(P+Q)}$, quantité constante qui ne dépend pas de la variable x ou de la longueur du plan. Soit $\frac{Px-Qa}{x(P+Q)} = z$; à cause de $dt =$

(*) Si l'on décompose la force verticale Qp qui pousse le corps Q vers le centre de la terre, en QM perpendiculaire, & QN parallèle au plan AB, la premiere étant détruite par la résistance du plan; la seconde agira seule pour faire descendre le corps vers B. Les triangles ACB, QMp sont évidemment semblables, & donnent $x : a :: Qp = Q : Mp = QN = \frac{Qa}{x}$. Mais cette force est la même sur tous les points du plan incliné; & le rapport de $a : x$, ou de *sin.* ACB : AB demeurant le même, elle ne sauroit varier.

$\frac{dx}{v}$, & de $dv = 2gzdt$, on aura $dv = \frac{dx}{v} 2gz$, ou $vdv = 2gzdx$, ou $v^2 = 4gzx$, parce que z eſt conſtant. Mais le tems de la montée étant ſuppoſé $= t$, on aura $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx}{2\sqrt{gzx}}$, d'où l'on tire $t = \sqrt{\left(\frac{x}{gz}\right)} = \frac{x\sqrt{(P+Q)}}{\sqrt{(gPx-agQ)}}$. La condition du *maximum* donnera (en diviſant par $\sqrt{(P+Q)}$ & par $\frac{dx}{\sqrt{g}}$); $0 = (Px - Qa)^{-\frac{1}{2}}$ $- \frac{1}{2} Px (Px - Qa)^{-\frac{3}{2}}$. Si l'on multiplie cette équation par $(Px - Qa)^{\frac{3}{2}}$, on trouvera aiſément $\frac{1}{2} Px = Qa$, ou $Px = 2Qa$; donc $x : a$ :: *ſinus total* : *ſin.* ABC :: 2 Q : P; *c'eſt-à-dire, que ſi le ſinus total eſt au ſinus que fait le plan incliné avec la baſe comme le double du poids* Q *eſt au poids* P, *le poids* Q *ſera enlevé dans le moindre tems poſſible* (*); & parce que $x = \frac{2Qa}{P}$, le tems de la montée ſera $= \frac{2}{P}\sqrt{\left(\frac{Qa}{g} \cdot (P+Q)\right)}$.

REMARQUE. Quand il s'agit d'eſtimer l'action des hommes ou des animaux, il faut avoir égard à la vîteſſe avec laquelle ils marchent; car ils peuvent exercer une plus grande force, lorſque ſans avoir aucun mouvement progreſſif, ils font effort pour mouvoir un corps par le moyen des pieds ou des mains. Bien plus un animal qui marche avec une grande

(*) Si Q = P, l'angle ABC doit être de 30°.

vîteſſe, ne peut employer aucune force pour traîner ou pour pouſſer un obſtacle. Pluſieurs Phyſiciens, principalement Amontons & Deſaguliers ont fait différentes expériences pour déterminer les forces des animaux; mais ils n'ont pas déterminé le rapport ſelon lequel leur force décroît eu égard à leur vîteſſe.

86. PROBLÊME. *Déterminer l'action des animaux dans le mouvement des machines.* Il ſemble qu'on peut comparer l'action d'un animal qui met une machine en mouvement avec celle d'un fluide qui agit ſur un obſtacle. Or l'action d'un fluide qui frappe perpendiculairement un plan immobile F, avec une vîteſſe c, eſt $= F.c^2$; mais ſi le plan ſe meut avec la vîteſſe v, cette action ſera comme $F(c-v)^2$. Soit $A = F.c^2$ ou $F = \frac{A}{c^2}$, $\frac{A}{c^2}(c-v)^2 = A.\left(1-\frac{v}{c}\right)^2 = P$ ſera l'action que le fluide (dont la denſité eſt ſuppoſée $= 1$) exercera ſur le plan mobile. Comme cette action décroît lorſque la vîteſſe augmente, elle reſſemble en cela à l'action d'un animal dont la force pour mouvoir un obſtacle décroît auſſi lorſque ſa vîteſſe augmente. La quantité A repréſentera l'action d'un animal qui n'a aucun mouvement progreſſif, c la vîteſſe qui ne permet pas à l'animal d'exercer aucune puiſſance, & P l'effort que peut faire l'animal lorſqu'il a la vîteſſe v. Or la formule $A.\left(1-\frac{v}{c}\right)^2 = P$ ſatisfait aux conditions de la queſtion. Si l'animal n'ayant aucune vîteſſe progreſſive, agit ſur un obſtacle par le moyen ſeulement de ſes muſcles, on aura

$v = o$ & $A = P$. Si l'animal se meut avec la plus grande vîtesse c, on aura $v = c$, & $P = o$.

Par les expériences de l'illustre Desaguliers il paroît que l'effort d'un homme qui agit au moyen de ses seuls muscles équivaut à 80 livres $= A$, tandis qu'en se mouvant avec une vîtesse de 3. 5 pieds par seconde, il peut exercer une action $P = 30$ livres. Substituant ces valeurs dans la formule ci-dessus, on aura la plus grande vîtesse c qui fait perdre à l'homme toutes ses forces. Or $1 - \frac{v}{c} = \sqrt{\left(\frac{P}{A}\right)}$, donc $c = \frac{v\sqrt{A}}{\sqrt{A} - \sqrt{P}}$; donc $c = 9.6$ pieds, c'est-à-dire qu'un homme qui parcourroit à chaque seconde 9. 6 pieds ne pourroit exercer aucune force sur un obstacle ; & puisque six hommes font à peu-près autant d'effort qu'un cheval, la formule pour un cheval sera $P = 6. A\left(1 - \frac{v}{c}\right)$.

87. THÉOREME. *Pour entretenir le mouvement des machines uniformes, on a besoin de la même puissance que pour conserver leur équilibre.* Les puissances qui font mouvoir les machines uniformes sont des animaux ou des fluides ; mais les fluides conservant une vîtesse uniforme, du moins sensiblement pendant un certain tems, le mouvement de la machine ne peut manquer de parvenir bientôt à l'uniformité : car le frottement, la tension des cordes, l'inertie de la machine étant comprises dans le fardeau qu'on doit mettre en mouvement, & opposant toujours (au moins sensiblement) la même résistance, le moment de la résistance ne peut manquer d'être égal à celui du

fluide choquant, & aussi-tôt que la machine aura un mouvement uniforme, il faudra employer pour le conserver, l'action d'une puissance égale à l'action & à la réaction, qui naît de l'inertie, & qui est égale au fardeau qu'on doit mettre en mouvement. S'il s'agit des animaux, dès qu'ils auront produit le mouvement de la machine, ils continueront (du moins sensiblement, & pendant un certain tems) à se mouvoir avec la vîtesse uniforme v, à moins que fatigués par un travail trop violent, ils ne perdent subitement leurs forces. Il y a véritablement des machines hydrauliques, qui sont mises en mouvement par des puissances non uniformes; mais on a accoutumé de les construire de maniere que dans la pratique leur mouvement peut être regardé comme uniforme, ou du moins que leurs puissances accélératrices ou retardatrices puissent être réduites à une force moyenne, qu'on peut regarder comme uniforme.

88. PROBLÊME. *Etant donnée la construction d'une machine uniforme, le fardeau Q & la vîtesse de ce fardeau, trouver combien d'hommes, ou de chevaux, l'on doit appliquer à la machine, & déterminer en même tems son effet.* Comme cette machine peut se réduire à un levier dont les bras seroient a & b, l'on aura à cause du mouvement uniforme de cette machine, $A\left(1-\frac{v}{c}\right)^2 a = Q.b$, lorsque la machine doit être mise en mouvement par un seul homme. Si le nombre des hommes est $= n$, la formule deviendra

$nA\left(1-\frac{v}{c}\right)^2 a$

$nA\left(1-\frac{v}{c}\right)^2 a = Q.b$. Soit u la vîtesse du fardeau, l'on aura $b:a::u:v=\frac{au}{b}$, & par conséquent $nA\left(1-\frac{au}{bc}\right)^2 a = Q.b$, & $n = Q.b : Aa\left(1-\frac{au}{bc}\right)^2$ (*).

Si l'on employoit des chevaux au lieu des hommes, l'on auroit $n=\frac{Qb}{a} : 6A\left(1-\frac{au}{bc}\right)^2$. Mais $\left(1-\frac{au}{bc}\right)^2 = \frac{Qb}{nAa}$; donc $u=\left(1-\frac{\sqrt{Qb}}{\sqrt{nAa}}\right)\times\frac{bc}{a}$; ainsi l'effet de la machine sera $=Q.u=\left(1-\frac{\sqrt{Qb}}{\sqrt{Aa}}\right).\frac{Qbc}{a}$, effet qui sera en même-tems égal au moment de la puissance. Or la vîtesse $v=\frac{au}{b}$ doit être plus petite que 9. 6 dans une seconde de tems. On ne peut donc pas espérer de lever par le moyen d'une telle machine, un poids à la hauteur de plus de 9 pieds environ dans une seconde.

89. PROBLEME. *Déterminer la construction d'une machine uniforme, mise en mouvement par des animaux, qui produise le plus grand effet possible.*

(*) Cette expression indique la division de Q.q par $Aa\left(1-\frac{au}{bc}\right)^2$.

Comme la construction de cette machine dépend des quantités a & b, supposons $\frac{b}{a} = z^2$, l'effet de la machine sera $Q.u = \left(1 - z\sqrt{\frac{Q}{nA}}\right)Qcz^2$, dont le *maximum* donnera $2z - 3z^2\sqrt{\frac{Q}{nA}} = 0$, ou $z = \frac{2\sqrt{An}}{3\sqrt{Q}}$; d'où l'on tire $\frac{b}{a} = z^2 = \frac{4An}{9Q}$. Mais parce qu'on fait ordinairement $b < a$, on pourra supposer $\frac{b}{a} = \frac{1}{p}$, ce qui donnera $p = \frac{Q}{37n}$ (à peu-près en faisant $A = 80$ livres). Donc la construction de la machine sera la plus avantageuse qu'il est possible, lorsqu'on aura $a : b :: Q : 37.n$ (37 désignant 37 livres); mais alors $u = \left(1 - z\sqrt{\frac{Q}{nA}}\right)cz^2$ devient $= (1 - \frac{2}{3}).\frac{4cnA}{9Q} = \frac{4cnA}{27Q}$. D'un autre côté $b : a :: u : v = \frac{au}{b} = \left(\frac{4Acn}{27Q}\right).\frac{a}{b} = \left(\frac{4Anc}{27Q}\right).\frac{9Q}{4An} = \frac{c}{3}$. Donc la vîtesse de l'homme doit être égale au tiers de sa plus grande vîtesse, laquelle est $= 9.6$; ainsi $v = 3.2$. C'est pourquoi les hommes produiront le plus grand effet possible, lorsqu'ils auront une vîtesse de 3.2 pieds par seconde, & la vîtesse du fardeau sera $u = \frac{bv}{a} = \frac{bc}{3a}$ pieds;

& parce que $a > b$, il eſt viſible que $u < 3.2$ pieds par ſecondes.

Ainſi le plus grand effet poſſible ſera $Q.u = \frac{4Anc}{27}$, auquel chaque homme contribuera pour une portion $P = A\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 = 80.\frac{4}{9} = 37$ livres, qu'il doit élever en s'émouvant avec une vîteſſe de 3.2 par ſeconde.

Dans le problême précédent nous n'avons fait attention ni au frottement ni à la roideur des cordes. Les Phyſiciens, fondés ſur un grand nombre d'expériences, qu'on peut regarder à peu-près comme exactes, ont établi 1°. que le frottement eſt égal à une certaine partie de la preſſion qu'un corps exerce ſur une ſurface; mais cette partie eſt différente ſelon que les corps ſont différens. Il faut même avoir l'attention de ne pas faire frotter les corps de même eſpèce l'un contre l'autre; & il eſt plus avantageux de faire frotter un corps de fer, par exemple, contre une ſurface de bois que contre une ſurface de fer.

2°. Le frottement, diſent-ils, n'eſt pas altéré par la vîteſſe du mouvement.

3°. Le frottement ne dépend point de la figure de la baſe du corps frottant ou du corps frotté, non plus que de ſa grandeur, mais ſeulement de la preſſion.

Ces regles que pluſieurs Phyſiciens, ſur-tout Deſagulliers dans ſa phyſique, & Camus dans ſon Traité des forces mouvantes, ont établi avec grand ſoin par un grand nombre d'expériences, ne

ſont cependant pas bien rigoureuſes ; & il y a quelques Savans, parmi leſquels ſe trouve le fameux Mushenbroek, qui doutent que le frottement puiſſe être altéré par la figure, la grandeur de la baſe & la vîteſſe. En effet M. Hennert rapporte avoir éprouvé fort ſouvent qu'un corps mis en mouvement ſur un plan horiſontal par le moyen d'un poids s'arrête après un certain tems. Or ce phénomène paroît inexplicable ſi l'on n'admet que le frottement augmente avec la vîteſſe du mouvement, ou du moins qu'il croît par d'autres raiſons qui ne ſont pas encore connues. On peut concevoir que les aſpérités & les ſinuoſités des ſurfaces frottantes s'engagent de maniere que les éminences de l'une des ſurfaces entrent dans les cavités de l'autre ſurface ; de ſorte que le mouvement ne peut continuer à moins que les aſpérités ne fléchiſſent ou du moins que les corps qui frottent ne ſoient un peu ſoulevés, pour que les aſpérités de la ſurface frottante ſe dégagent des cavités de la ſurface frottée.

Il paroît que malgré toutes les expériences qu'on a faites ſur cette matiere, la cauſe du frottement n'eſt cependant pas encore entiérement connue. En effet les filamens de la ſurface frottée ſont fléchis par les corps mis en mouvement ; car l'on voit le frottement augmenter lorſque le corps frottant fait un certain ſéjour ſur le corps frotté, & il n'eſt pas douteux que la cohéſion ou l'attraction n'ait quelque part au frottement. Quoiqu'il en ſoit, on peut ſuppoſer dans la pratique que le frottement eſt une partie de la preſſion, de ſorte que la preſſion étant ſuppoſée $=$ P, le frottement ſera $= n$ P. Or cette quantité

eſt ordinairement le tiers ou le quart de la preſſion : il ne s'agit pas ici des corps pointus ſur le frottement deſquels nous n'avons preſque aucune connoiſſance.

90. PROBLÊME. *On demande d'expliquer mathématiquement la cauſe du frottement.* Puiſque le frottement paroît augmenté lorſque les ſurfaces ſont moins polies ; nous pouvons concevoir la ſurface d'un corps comme remplie de ſinuoſités, telles que *a c m* (fig. 70). Soit ſuppoſée = P la preſſion du corps qui ſe fait dans une direction C P perpendiculaire à la ſurface frottée N D. Que le corps frottant ſoit pouſſé par une force V quelconque ſelon la direction C B parallèle à N D, qu'on mène C A parallèle au côté *c a* de la cavité *m c a*, & ſoit l'angle A C B = *a c b* = z. Qu'on tire par le point *p*, la ligne *p* R perpendiculaire ſur le prolongement de la ligne A C, & ayant fait C *p* = P, C R repréſentera la réſiſtance que la preſſion du corps qu'il faut tirer de la cavité *m c a*, oppoſe à la puiſſance V. Soit C B = V, & ſoit menée par le point B la ligne B A perpendiculaire ſur C A, on aura C A = V. *coſ.* z. Mais C A étant oppoſée à la direction CR = P *ſin.* z, il eſt viſible que la puiſſance V fait un effort V *coſ.* z pour vaincre le frottement P *ſin.* z. Ainſi quand le mouvement du corps ſera parvenu à l'uniformité, on aura V *coſ.* z = P *ſin.* z, & V = P. *tang.* z.

Puiſque le frottement eſt exprimé par P. *tang.* z, il eſt viſible qu'il eſt proportionnel à la preſſion, & ſi l'on fait *tang.* z = n, le frottement ſera = égal n.P. Au reſte cette explication du frottement eſt plus mathématique que phyſique ; mais on peut dans la pratique l'employer avec aſſez de confiance.

91. PROBLÊME. *Déterminer le mouvement progressif d'un corps* M *sur un plan horisontal & sur un plan incliné, sollicité au mouvement par une puissance constante* P. Nous supposons ici que ce corps ne tourne pas. Soit l'espace mB (fig. 71) parcouru dans le tems $t = x$ & la vîtesse $= v$, on aura $v\,dv = 2g.\frac{P - nM}{M}.\,dx$; car le frottement diminue l'intensité de la puissance. Donc $v^2 = 4gx\frac{(P - nM)}{M}$. De la $t = S.\frac{dx}{v} = \sqrt{\frac{Mx}{g(P - nM)}}$.

Si le corps se meut sur un plan incliné tel que l'angle que ce plan fait avec la base soit $= z$, la pression que ce corps exercera sur le plan incliné sera $= M\,cos.\,z$, d'où naîtra le frottement $nM\,cos.\,z$. Mais le corps est poussé le long du plan incliné par une force $= M\,sin.\,z$ (fig. 69), en supposant que la masse du corps Q est $= M$ (*); donc le corps Q descendra avec une force $= M(\,sin.\,z - n\,cos.\,z)$. Soit l'espace parcouru $= x$ & le tems $= t$, on aura $v\,dv = \frac{M}{M} \times 2.g\,(sin.\,z - n\,cos.\,z)\,dx = 2.g\,(sin.\,z - n\,cos.\,z)\,dx$; & $t = S\frac{dx}{v} = \sqrt{\left[\frac{x}{g\,(sin.\,z - n\,cos.\,z)}\right]}$. Donc $x = gt^2\,(sin.\,z - n\,cos.\,z)$.

(*) Supposons $Qp = M$, $ABC = z$, le triangle rectangle MQp semblable au triangle ABC donnera sinus total $= 1 : M :: sin.\,QpM = cos.\,z : QM = M.\,cos.\,z$, pression que fait le corps Q dont nous désignerons ici la masse par M, sur le plan incliné AB. Le même triangle donne $1 : M :: sin.\,MQp = sin.\,z : M.\,sin.\,z = Mp = QN$, force qui pousse le corps le long du plan AB. Il est visible que $sin.\,z$ doit être plus grand $n\,cos.\,z$, autrement il n'y auroit point de mouvement.

92. PROBLEME. *Déterminer l'intensité de la puissance appliquée à une roue nécessaire pour vaincre le frottement de l'axe* BN (*fig.* 72). Soit le poids de la roue & de l'axe = Q, & la puissance qui agit sur la roue dans une direction horisontale AP = P. Lorsque la roue se meut dans la direction ADE, le frottement s'oppose au mouvement. Or cette résistance se fait au point N : elle est $= nQ$, & son moment est $= BC.nQ$, auquel doit être égal le moment de la puissance P, savoir CA.P; donc $P = \frac{BC.nQ}{CA}$. tel est l'expression de la puissance nécessaire pour vaincre le frottement.

Si la puissance $ap = P$ fait effort pour mouvoir la roue dans une direction oblique & non horisontale ap (fig. 73), je tire par le centre C la ligne CB, que je suppose parallèle à la direction ap & = P, & la verticale CF = Q. Ayant achevé le parallelogramme CFGB dont la diagonale CG exprimera la pression de l'axe sur le support cave RNS, supposons l'angle $aCA = z$; à cause des angles droits Cap, BCa, on aura $FCB + aCA = 90°$, & $CG = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ \,fin. z)}$ (*). C'est pourquoi dans ce

(*) Soit l'angle $BGC = m$, $FCB = p$, le triangle CBG donnera en faisant $CG = u$, $u : fin. p :: P. fin. CGB = fin. FCG = fin. m = \frac{fin. p. P}{u}$. Le triangle CFG donne $u : Q :: fin. p : fin. (p - m)$, ou $fin. (p - m) = (fin. p. cof. m - fin. m. cof. p) = \frac{Q. fin. p}{u}$...(A). Mais en

cas $P.Ca = n.CN.\sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ\,\mathit{fin}.\,z)}$; donc en supposant $Ca = a$, & $CN = b$, il viendra $P = \frac{nbQ[(nb\,\mathit{fin}.\,z + \sqrt{(a.a - nnbb\,\overline{\mathit{cof}.\,z}^2)}]}{aa - nnbb}$.

Par la solution de ce problême il est facile de voir que la résistance du frottement est d'autant moindre que la puissance est appliquée à un plus long levier C a. Il est évident encore que la figure (73) représentant l'axe dans le tour, le frottement augmente dans cette machine selon l'obliquité de la direction de la puissance, par rapport à la verticale CA. La résistance sera donc la plus grande possible lorsque l'angle z sera de 90°, & alors on aura $P = \frac{nbQ(nb + a)}{(aa - nnb)} = \frac{nbQ}{a - nb}$. Mais quand la puissance a une direction opposée aM, la résistance diminue. Supposons que dans

---

supposant le rayon $= 1$, l'on a $\mathit{cof}.\,m = \sqrt{(1 - \overline{\mathit{fin}.\,m}^2)}$ $= \sqrt{\left(1 - \frac{\overline{\mathit{fin}.\,p.P}^2}{u^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{uu - \overline{\mathit{fin}.\,p.P}^2}{uu}\right)}$. Substituant la valeur de $\mathit{fin}.\,m$ & $\mathit{cof}.\,m$ dans l'équation A, il vient $\mathit{fin}.\,p.\,\frac{\sqrt{(uu - \overline{\mathit{fin}.\,p.\,P}^2) - \mathit{fin}.\,p.\,\mathit{cof}.\,p.\,P)}}{u} = \frac{Q.\,\mathit{fin}.\,p}{u}$. Donc $\sqrt{(uu - P.^2\,\overline{\mathit{fin}.\,p}^2)} = Q + P.\,\mathit{cof}.\,p$, $uu - P^2.\,\overline{\mathit{fin}.\,p}^2 = Q^2 + P^2.\,\overline{\mathit{cof}.\,p}^2 + 2QP.\,\mathit{cof}.\,p$; & (à cause de $\overline{\mathit{cof}.\,p}^2 + \overline{\mathit{fin}.\,p}^2 = 1$), $u = Q\sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ\,\mathit{fin}.\,z)}$, en faisant attention que z étant le complément de p, on a $\mathit{fin}.\,z = \mathit{cof}.\,p$.

ce cas $z = -90°$., parce qu'alors les angles ont une ſituation contraire, nous aurons $P = \frac{nbQ(a-nb)}{aa-nnbb} = \frac{nbQ}{a+nb}$, expreſſion qui fait voir que dans ce cas on a beſoin d'une plus petite force P.

On peut par le moyen de la formule $\frac{nbQ}{a-nb}$ trouver la quantité de frottement dans la poulie & l'axe dans le tour, en ſuppoſant le rayon de l'axe $= b$, celui de la roue ou des poulies $= a$, lorſque la quantité Q outre la maſſe du cylindre & de la poulie repréſente la ſomme du fardeau & de la puiſſance & que les directions du fardeau & de la puiſſance ſont parallèles ; car dans ce cas on a $z = 90°$. La formule ſatisfera même à la pratique avec aſſez d'exactitude, quoique l'angle z differe de 10 ou 12 degrés, & peut-être plus de 90°.

93. PROBLEME. *Déterminer le frottement dans les mouſles.* Soit une mouſle compoſée de deux poulies mobiles & de deux immobiles. Chacune des poulies mobiles porte la moitié du fardeau que je ſuppoſe $= 4Q$. Ainſi le frottement dans la premiere poulie mobile ſera $= \frac{2nbQ}{a-nb}$; & la corde ſera tendue par le poids $Q + \frac{2nbQ}{a-nb} = \frac{(a+nb)Q}{a-nb}$ quantité que je fais $= A$. Mais la tenſion A du ſecond cordon doit être égale à celle du troiſieme cordon ; donc la poulie immobile correſpondante ſera chargée du poids 2 A, d'où réſultera un frottement $= \frac{2nbA}{a-nb}$. Le troiſieme cordon eſt

donc tendu par une force $= A + \frac{2nbA}{a-nb} = \frac{(a+nb)A}{a-nb} = \frac{(a+nb)^2}{(a-nb)^2} \cdot Q = B$. Puiſque le quatrieme cordon fait équilibre avec le troiſieme, la troiſieme poulie ſera chargée du poids $2B$, d'où naîtra le frottement $= \frac{2nbB}{a-nb}$; ainſi le quatrieme cordon ſera tendu par le poids $B + \frac{2nbB}{a-nb} = \frac{(a+nb)B}{a-nb} = \frac{(a+nb)^3}{(a-nb)^3} \cdot Q = C$.

En général ſi le nombre des cordons eſt m, la tenſion du dernier ſera $= \left(\frac{a+nb}{a-nb}\right)^{m-1} Q$. Sans le frottement la puiſſance devroit être $= Q$; ainſi l'augmentation qui réſulte du frottement eſt $= \left(\frac{a+nb}{a-nb}\right)^{m-1} Q - Q$. On doit encore ajouter le frottement qui réſulte du poids des poulies $=$ R, frotement qui ſera exprimé par $\frac{nbR}{a-nb}$.

Outre le frottement dont nous venons de parler, on doit encore avoir égard à la roideur des cordes, quand il s'agit d'eſtimer les effets des machines. Par les expériences d'Amontons & de Deſagulliers, il eſt évident que la roideur d'une corde, ou la difficulté de la plier eſt d'autant plus grande que ſon diamètre eſt plus grand, que le poids qui la tend eſt plus grand & que le diamètre du cylindre autour duquel on la plie eſt plus petit, de ſorte que la roideur d'une corde eſt en raiſon compoſée de la directe du poids

tendant, du diamètre de la corde & en raison inverse du diamètre de la poulie. Desagulliers a trouvé que la roideur d'une corde d'un demi-pouce de diamètre, roulée autour d'un cylindre d'un pouce & demi de diamètre & tendue par un poids de 60 livres, faisoit une résistance de 75 onces. Appellant donc cette résistance R, on aura $R = \frac{960.\ \textit{onces} \times 0.5}{1.5} = 320$. Supposons une autre corde d'un pouce de diamètre, tendue par un poids de 80 livres & roulée autour d'une poulie de cinq pouces de diamètre, sa roideur sera comme $\frac{80.\ 1}{5} = 16$. Donc en faisant 320 : 75 onces : : 16 livres : $x = 6\frac{1}{4}$ livres, on aura la roideur de cette corde.

Il n'est pas difficile de voir comment il faut s'y prendre pour calculer l'augmentation de la puissance dans les moufles, eu égard à la roideur des cordes & au frottement (*).

(*) Pour faciliter aux commençans le moyen de calculer l'effet du frottement & de la roideur des cordes dans les machines, nous prendrons le palan ou caliorne de la figure (74). En supposant que le rayon des chevilles ou essieu est la cinquieme partie du rayon de chaque rouet, & que le frottement est le quart de la pression, parce qu'il est presque toujours plus grand lorsque les machines sont plus composées à cause des vices d'exécution qui se multiplient. S'il n'y avoit point de frottement les quatre branches du palan soutiendroient chacune le quart du poids P que je suppose de 400 livres ; ainsi chaque rouet mobile soutiendroit la moitié du poids, & les cordons 1 & 2 soutiendroient chacun le quart du poids. Mais selon

94. PROBLEME. *Trouver la vitesse avec laquelle un poids P peut élever un fardeau Q par le moyen de l'axe dans le tour, eu égard au frottement & à l'inertie de la machine.* Soit le petit rayon de l'axe dans le tour = *a*, & le

---

la supposition que nous avons faite cette moitié du poids produit un frottement qui sera le quart de cette moitié; & comme ce frottement produit une résistance cinq fois moindre à cause de la grandeur du rayon de la poulie, la branche 2 sera tirée en haut avec une force qui sera la vingtieme partie de la charge, pour remédier au seul frottement.

La force ajoutée n'est la vingtieme partie de la charge qu'après que cette force a été ajoutée : ainsi elle est la dix-neuvieme partie de la charge considérée avant l'addition. Si le poids P pèse donc 400 livres, ce qui donne 200 livres pour la charge des deux branches 1 & 2 jointes ensemble, nous n'avons qu'à prendre la dix-neuvieme partie de 200 livres, & nous aurons $10 + \frac{10}{19}$ livres pour l'excès de la force avec laquelle la branche 2 doit être tirée en haut. La branche 1 qui n'est sujette à aucun frottement n'est tendue qu'avec une force de 100 livres; mais comme la branche 2 doit soutenir le même poids, & qu'elle doit de plus surmonter le frottement sur la poulie d'en bas; il est nécessaire qu'elle soit tirée en haut avec une force de $110 \frac{10}{19}$ livres.

Ce sera la même chose dans le passage de la branche 2 à la branche 3 sur une des poulies supérieures. Il faut, à cause du frottement, comme on vient de le voir, que la branche 2 soit tendue avec une force de $110 \frac{11}{19}$ livres, pendant que la branche 1 ne soutient que 100 livres. La tension de la branche 3 doit être plus grande dans le même rapport; ainsi elle sera d'un peu plus de 122 livres : il faudra faire une augmentation semblable pour la branche 4 qui sera tendue avec une force de 135 livres, & une autre augmentation encore proportionnelle pour la branche 5, qui doit être tirée avec une force d'environ $149 \frac{14}{19}$. Ainsi la puissance M au lieu d'agir avec une force de 100 livres sera obligée de tirer avec une force plus grande d'environ une moitié.

grand rayon $= b$, le frottement de l'axe $=$ F, frottement qui augmente le fardeau Q appliqué au petit rayon a. C'est pourquoi ce fardeau total est Q $+$ F qui, étant rapportée à la distance b doit être $=$

Les nombres 100, 110 $\frac{10}{19}$, 135, 149 sont en progression géométrique; ainsi connoissant le premier & le second, il seroit facile d'avoir les autres si on ne les connoissoit pas.

Si nous voulons tenir compte, non-seulement du frottement, mais encore de la roideur des cordes, on doit faire attention qu'une corde de 6 lignes de diamètre chargée d'un poids de 120 livres, & passant sur un rouleau de 3 pouces de diamètre, oppose une résistance de 8 livres, ainsi que l'expérience l'apprend. Cela posé, supposons que les poulies de notre figure soient de 4 pouces de diamètre, & que le diamètre du cordage est de 4 lignes. Si nous multiplions 120 livres par 6 lignes $= \frac{1}{2}$ pouce, nous aurons 60. Divisant ce produit par 3 diamètres du rouleau, le résultat 20 donnera le premier terme d'une analogie dont la roideur 8 sera le second. Je multiplie les 4 lignes $=$ $\frac{1}{3}$ de pouce de diamètre qu'a la corde de notre figure par les 210 $\frac{10}{19}$ livres qui forment la charge des deux branches 1 & 2 jointes ensemble, & je divise le produit par le diamètre 4 pouces des poulies, le résultat est à peu-près 17 $\frac{1}{2}$ livres, & c'est là le troisieme terme de l'analogie dont le quatrieme 7 livres est l'effet de la roideur du funin.

Nous avons dit ci-dessus que la branche 2 devoit être tirée de bas en haut avec une force de 110 $\frac{11}{19}$ livres à cause du frottement. Il faudroit donc ajouter 7 livres à cette quantité, si la poulie sous laquelle passe cette corde étoit soutenue par son centre. Mais lorsqu'on agit sur la branche 2 pour vaincre sa roideur & celle de la branche 1, le point d'appui est situé au point où la branche 1 rencontre la poulie; de sorte que le bras du levier sur lequel on agit est alors égal, non au rayon, mais au diamètre de la poulie; il ne faut donc ajouter que la moitié de 7 livres à 110 $\frac{10}{19}$, & il nous viendra environ 114 livres au lieu de 118 $\frac{1}{2}$ livres que nous trouverions sans cette attention, pour la force avec laquelle il faut tirer en haut

$\frac{a \times (Q+F)}{b} < P$; de sorte que la force motrice sera $= P - \frac{a}{b}(Q+F)$. Mais en faisant la masse du cylindre $= M$, son moment d'inertie sera exprimé par $\frac{Maa}{2}$; & cette inertie du cylindre étant transportée à la distance b est $= \frac{Maa}{2bb}$. Mais les inerties des poids P & Q sont $P + \frac{Qaa}{bb}$; donc la force accélératrice sera $= \left(P - \frac{a}{b}(Q+F)\right) : \left(\frac{Maa}{2bb} + P + \frac{Qaa}{bb}\right)$

---

la branche 2, afin de vaincre le frottement & la roideur de la corde joints ensemble. La branche 2 étant tendue avec une force de 114 livres, la branche 3 sera tendue eu égard au frottement & à la roideur du cordage par une force qu'on trouvera en faisant la proportion 100 : 118 : : 114 : x, parce que dans le passage de la branche 2 à la branche 3, la poulie étant soutenue par son centre, on ne doit pas faire la réduction dont on a parlé ci-dessus. Ce qui donnera 135.09 livres pour la tension du cordon 3. Dans le passage du cordon 3 au cordon 4, il faudra à cause de la poulie mobile embrassée par ces cordons, faire la proportion 100 : 114 : : 135.09 : x, le quatrieme terme de cette proportion fera trouver la force avec laquelle le cordon 4 doit être tiré en haut. Cette force est d'environ 154 livres. Le cordon 5 sera donc tiré avec une force qu'on trouvera en faisant 100 : 118 $\frac{1}{2}$: : 154 : $x = 182$ à peu-près. Il faut donc, eu égard à tout, que la puissance M fasse un effort d'environ 182 livres.

Il est aisé de sentir qu'il faut, autant qu'il est possible, employer des cordes d'un petit diamètre & les plus souples que l'on peut, faciliter le mouvement des poulies & augmenter leur diamètre, autant qu'on le peut, sans rendre leur pesanteur nuisible.

$= \frac{[Pb - a(Q+F)]b}{\frac{Maa}{2} + Pbb + Qaa}$. Donc en faisant la vîtesse du fardeau $= v$, l'espace parcouru $= x$, on aura $vdv = 2gdx. \frac{[Pb - a(Q+F)]b}{\frac{1}{2}Maa + Pbb + Qaa}$, dont l'intégrale donne $v^2 = 4gx \frac{[Pb - a(Q+F)]b}{\frac{1}{2}Maa + Pbb + Qaa}$. Si l'on suppose le tems de la montée $t = S. \frac{dx}{v}$, il viendra $x = \frac{gt^2[Pb - a(Q+F)]b}{\frac{1}{2}Maa + Pbb + Qaa}$.

Si le fardeau Q est supposé $= 0$, l'on aura la vîtesse $v = 2\sqrt{\left[\frac{gx(Pbb - Fab)}{\frac{1}{2}Maa + Pbb}\right]}$: telle sera la vîtesse du cylindre, eu égard à son inertie & au frottement.

Des corps qui se meuvent dans les fluides.

95. PROBLEME. *Trouver la résistance des solides de révolution qui se meuvent dans un fluide parfait.* Soit A D (fig. 75.) la courbe qui par sa révolution autour de l'axe A B, engendrera le solide de révolution que nous supposerons se mouvoir dans la direction BA, & supposons MT parallèle à BA. Ayant mené la tangente M*m*, construit le rectangle *m*T*n*M, je tire *mt* perpendiculaire sur MT. Cela posé si MT exprime la résistance du fluide, par rapport au point M, il est visible qu'on peut décomposer cette force en deux autres T*m*, *m*M. Mais M*m*, étant la force par laquelle le fluide tendra à glisser le long de la tangente *m*M, n'altérera pas le mouvement de l'élément M*m*, qui ne sera altéré que par la force T*m* = *n*M, perpendiculaire à la tangente M*m*.

Décompoſant mT en tT & tm, la force tm ſera détruite par une force contraire & oppoſée, qui agira ſur le point P, & la ſeule force tT pourra retarder le mouvement du ſolide. Suppoſant M T $=$ 1, M$m = ds$ (qu'on peut regarder comme un arc infiniment petit de la courbe, qui ſe confond avec ſa tangente), $mt = dy$ (car $mt = p$M $= dy$, en faiſant $ac = y$), M$t = dx$, les triangles rectangles ſemblables MmT, Mmt, donneront $ds : 1 :: dy :$ T$m = \frac{dy}{ds}$. Mais les mêmes triangles donnent T M $= 1 :$ T$m = \frac{dy}{ds} :: \frac{dy}{ds} :$ T$t = \frac{dy^2}{ds^2}$. Maintenant ſi on conçoit que les filets du fluide aillent choquer l'arc mM parallelement à l'axe A B, il eſt viſible que le nombre de ces filets ſera égal à celui des filets qui pourroient choquer M$p = dy$, ſi l'arc m M étoit anéanti (*); donc le nombre de ces filets eſt proportionnel à dy; donc en multipliant Tt par dy, on aura la force que le fluide exerce ſur l'élément mM, dans la direction de l'axe; donc cette force ſera repréſentée par $\frac{dy^3}{ds^2}$. Si r repréſente le rayon d'un cercle dont la circonférence ſoit c, $\frac{cy}{r} \cdot \frac{dy^3}{ds^2}$ ex-

(*) Car ſi le diamètre d'une particule de fluide eſt la centieme partie, par exemple, de dy, dy vaudra 100, en ſuppoſant que les parties ſe touchent; ſi elles ſont également diſtantes l'une de l'autre, leur nombre ſera néanmoins proportionnel à dy.

primera

primera l'action du fluide sur la zone décrite par la révolution de Mm autour de l'axe A B. Mais si on suppose que le mobile se meut dans le fluide avec la vîtesse qu'on a supposée au fluide, & que celui-ci soit en repos, le mouvement que communiquera (à chaque instant) le mobile au fluide pourra évidemment être exprimé par la même formule ; donc la résistance qu'éprouve un solide de révolution qui se meut dans un fluide parfait, dans la direction de son axe est $= \frac{cydy^3}{rds^2}$.

EXEMPLE I. Soit la courbe A D une demi-parabole dont l'équation soit $2ax = yy$; on aura $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{dy^2}{aa} \cdot (aa + yy)$, & $S. \frac{cydy^3}{rds^2} = S. \frac{ydy}{aa+yy} \cdot \frac{caa}{r} = \frac{caa}{r} \cdot L.(aa+yy) + C.$ pour déterminer la constance C, je remarque que l'intégrale doit s'évanouir lorsque $y = 0$; donc $C = -\frac{caa}{r} \cdot L.aa$, & l'intégrale complette est $= \frac{caa}{r} L.\left(\frac{aa+yy}{aa}\right)$.

EXEMPLE II. Si on suppose que A D est l'arc d'un cercle dont l'équation soit $aa - yy = xx$, on aura $ds = \frac{ady}{x}$, & en supposant $r = a$, l'élément de la résistance du solide sera $\frac{cyxxdy}{a^3} = \frac{c}{a} y dy - \frac{c}{a^3} y^3 dy$, en substituant la va-

leur de xx ; donc la résistance sera $\frac{cy^2}{2a} - \frac{cy^4}{4a^3}$. Si l'on suppose $x = 0$, ce qui donne $y = a$, la résistance de l'hémisphère & par conséquent celle de la sphére entiere (car l'hémisphère postérieur n'a aucune résistance à vaincre) sera $= \frac{ca}{4}$, laquelle n'est que la moitié de celle d'un de ses grands cercles.

EXEMPLE III. Soit B D $= r = 1$ le demi-petit axe, A B $= a$ le demi-grand axe d'une ellipse ; l'on aura $aay^2 = aa - xx$, $aaydy = -xdx$, $a^4y^2dy^2 = x^2dx^2$, $dx^2 = \frac{a^2y^2dy^2}{1-yy}$, $ds^2 = dy^2 + \frac{a^2y^2dy^2}{1-yy} = \frac{dy^2(1+ggyy)}{1-yy}$, en faisant $aa - 1 = g^2$; donc la différentielle de la résistance sera $\frac{cydy - cy^3dy}{1+ggyy} = \frac{c}{gg} \cdot \left(\frac{aaydy}{1+ggyy} - ydy\,(*)\right)$, à cause de $gg + 1 = aa$, dont l'intégrale en faisant L. $(1 + ggyy)^{\frac{1}{2}} = \text{P}$, sera $= \frac{c}{gg} \cdot \left(\frac{aa}{gg}\text{P} - \frac{yy}{2}\right)$. Lorsque $y = 1$, cette intégrale devient $\frac{caa}{g^4} \times$

(*) On trouvera facilement que le premier membre de l'équation est égal au second en réduisant $-ydy$ en une fraction dont le dénominateur soit $1 + ggyy$, & en faisant attention que $aa = gg + 1$.

$L.a - \frac{c}{2g^2}$ qui exprime la résistance de l'ellipsoïde entier. On n'a pas ajouté de constante parce que le logarithme hyperbolique de 1 étant $= 0$, l'intégrale devient $= 0$ lorsque $y = 0$; ainsi que cela doit être. Si BA étoit le second demi-axe, l'on auroit $1 > a$, & $gg = aa - 1$, seroit une quantité négative, de sorte qu'il faudroit changer le signe du second terme de l'intégrale qui, pour le cas de la resistance du solide entier, donneroit $\frac{caa}{g^4} L. a + \frac{c}{2gg}$.

EXEMPLE IV. Soit DAP (fig. 76) la section d'un cône droit, dont le rayon DB de la base soit $r = a$, & le côté DA $= b$. Ayant tiré la ligne TC perpendiculaire, & Ma parallèle à DB, les triangles semblables AMa, ABD donneront BD$= a$: AD $= b$ :: M$a = y$: MA $= s = \frac{by}{a}$; donc $ds = \frac{bdy}{a}$, & $\frac{cydy^3}{rds^2} = \frac{acydy}{bb}$, dont l'intégrale $= \frac{acy^2}{2bb}$, exprime la résistance du cône MAt. Et si l'on fait $y = a$, la résistance du cône entier DAP, sera $= \frac{ca^3}{2bb} = \frac{ca}{2} \cdot \frac{aa}{bb}$. Or a étant plus petit que b, $\frac{aa}{bb} < 1$; donc la résistance qu'éprouve le cône est plus petite que celle qu'éprouveroit sa base, résistance qui seroit représentée par $\frac{ca}{2}$, & les résistances du cône & de sa base sont entr'elles comme $\frac{aa}{bb}$: 1 :: $aa : bb$, c'est-

à-dire comme le quarré du rayon de la base est au quarré du côté du cône.

Si l'on suppose un cône droit (fig. 77) inscrit dans un hémisphère, le triangle rectangle isocelle DAB donnera $\overline{DA}^2 = b^2 = 2.\overline{DB}^2 = 2a^2$; donc alors $\frac{aa}{bb} = \frac{1}{2}$, & la résistance qu'éprouve le cône devient $= \frac{ca}{4}$, la même que celle qu'éprouve l'hémisphère DAP, ce qui mérite d'être remarqué.

96. PROBLEME. *Entre tous les cônes droits tronqués de même base* DB*b*, *& de même hauteur* BP, *décrits par le trapèze* P*p*DB *autour de l'axe* BP (*fig.* 78) *& qui se meuvent parallèlement à cet axe, trouver celui de la moindre résistance.* Ayant prolongé le côté D*p*, jusqu'à la rencontre de l'axe en A, je mène P*m* & BM, perpendiculairement à DA. Cela posé, nous savons que la résistance de la surface décrite par AD est à celle de la base comme le quarré *aa* du rayon de la base est à *bb* quarré du côté DA, ou comme $\overline{DM}^2 : \overline{DB}^2$, à cause des triangles semblables DBA, DMB. De même la résistance du petit cône *p*A*a* sera à celle de sa base comme $\overline{pm}^2 : \overline{Pp}^2$; donc $\overline{Pm}^2$ différence des quarrés $\overline{Pp}^2$ & $\overline{pm}^2$ exprimera la différence entre la résistance de la base de ce cône *p*A*a*, & du cône lui-même, tandis que $\overline{DM}^2$ exprime celle du cône dont le côté $=$ DA. Maintenant il est visible que la résistance de notre cône tronqué sera un *minimum* si $\overline{DM}^2 + \overline{Pm}^2$ est un *mini-*

mum: car cette résistance sera d'autant plus petite que la somme de $\overline{DM}^2$ & de $\overline{Pm}^2$ sera plus petite, puisque $\overline{DM}^2 + \overline{Pm}^2$ est comme la résistance totale (*). Mais si l'on mène P*n* parallèle à D*p* jusqu'à la rencontre de B M en *n*, on aura $Mn = Pm$, & $\overline{Dn}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{Pm}^2$; donc $\overline{Dn}^2$ & par conséquent D*n* doit être un *minimum*. Mais à cause de P*n* parallèle à DA, l'angle B*n*P est droit; donc il est placé sur la circonférence du diamètre B P. D'un autre côté la plus courte ligne qu'on puisse mener d'un point D à une courbe, est la perpendiculaire, ainsi qu'on l'a vû dans la premiere Section; donc D*n* est perpendiculaire au demi-cercle B*n*P; elle passe par conséquent par son centre C, & l'on a C*n* = CP. Mais à cause des parallèles D A, *n*P, les triangles DCA, *n*C P sont semblables; ainsi puisque le dernier donne C*n* = C P, le premier donnera CD = CA; c'est-à-dire qu'on trouvera la hauteur du cône entier, en menant DC par le point D, & par le milieu C de la hauteur du cône tronqué, & prenant CA = CD.

97. PROBLEME. *Entre tous les solides dont la base a pour rayon* DC, *engendrés par la révolution d'une courbe* D A *autour de l'axe* C B, *déter-*

(*) Car si *a* exprime la résistance du cône dont AD est le côté, *b* la résistance de la base supérieure du cône tronqué, *c* celle du petit cône, $a + b - c$, sera celle du cône tronqué, laquelle en faisant $a = \overline{DM}^2$, $b - c = \overline{Pm}^2$, deviendroit $\overline{DM}^2 + \overline{Pm}^2$.

miner celui dont la réſiſtance dans le ſens de l'axe eſt un minimum (*fig.* 79). Conſidérons les zones engendrées par les arcs A M & M G, ſi l'on ſuppoſe que la premiere reçoive une augmentation dans ſa réſiſtance, il faut que la ſeconde reçoive une diminution égale, ſans cela la réſiſtance ſur la zone entiere engendrée par l'arc G A ne ſauroit être un *minimum*; ce qu'on vient de dire par rapport à ces deux zones doit s'entendre de toutes les autres zones priſes deux à deux, & lorſqu'elles auront cette propriété, la ſurface entiere engendrée par la courbe, aura évidemment la propriété du *minimum*. Revenant donc aux deux zones dont nous venons de parler, je différencie l'expreſſion $\frac{cydy^3}{rds^2}$ de la premiere, en faiſant ſeulement varier dx (c'eſt-à-dire, que je regarde dy auſſi-bien que y comme conſtans), ce qui me donne $\frac{-2cdxddxydy^3}{r(dy^2+dx^2)^2}$. Mais alors la zone ſuivante doit donner pour la différentielle de ſa réſiſtance, l'expreſſion $+\frac{2cdxddxydy^3}{r(dy^2+dy^2)^2}$, parce que la hauteur F B des deux zones étant ſuppoſée ne pas varier, lorſque la hauteur de la premiere augmente de la quantité ddx, celle de la ſeconde diminue de la même quantité; donc $\frac{2cdxddxydy^3}{rds^4} - \frac{2cdxddxydy^3}{rds^4} = 0$, ou $\frac{ydxdy^3}{ds^4} - \frac{ydxdy^3}{ds^4} = 0$. Maintenant quoique

$\frac{2cdxddxydy^3}{rds^4}$ soit une quantité infiniment petite, rien n'empêche qu'en la divisant par $\frac{2cddx}{r}$, elle ne devienne une quantité finie telle qu'on voudra(*); & parce que nous pouvons supposer que toutes les zones éprouvent des variations égales par rapport à leurs résistances, les unes en plus les autres en moins alternativement, nous pourrons faire $\frac{ydxdy^3}{ds^4} = a$, quantité constante; donc $ydy^3dx = ads^4 = adx^4 + 2adx^2dy^2 + ady^4$. Supposant maintenant $dx = \frac{zdy}{a}$, substituant cette valeur dans l'équation qu'on vient de trouver, divisant ensuite par zdy^4 & multipliant par a, on aura $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{a^2}{z}$ ...(A).

Substituant dans $dx = \frac{zdy}{a}$, la valeur de dy prise de l'équation A, & en intégrant, on aura $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - a\,\text{L}.z$.... (B). Si dans l'équation A l'on fait $y = 0$, on aura en multipliant par z & par aa, $z^4 + 2aazz + a^4 = 0$, d'où l'on tire $zz + aa = 0$, $zz = -aa$ & $z = \sqrt{-aa}$, quantité imaginaire qui fait voir qu'on ne peut supposer $y = 0$, & que la courbe ne rencontre pas son axe. Si l'on suppose $dy = 0$, ce qui indique la

(*) Cela aura lieu en supposant à ddx une valeur convenable.

plus petite ordonnée B A, on aura $\frac{3zzdz}{aa} + 2dz - \frac{aadz}{zz} = 0$, d'où l'on tire $z^4 + \frac{2}{3}aazz - \frac{1}{3}a^4 = 0$, & $z^2 + \frac{1}{3}aa = \frac{2}{3}aa$, $z^2 = \frac{1}{3}aa$, $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, à l'origine B des y & des x. Substituant cette valeur de z dans celle des y, on aura pour la valeur de la plus petite ordonnée $y = \frac{16}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Maintenant si nous supposons qu'on prenne z dans un logarithmique mb, telle que l'ordonnée Bb soit $= a\sqrt{\frac{1}{3}}$ & qu'on prenne les abscisses B T positives, tandis qu'on prend les abscisses Bp négatives, on aura L. $a\sqrt{\frac{1}{3}} = 0$, & à l'origine A de la courbe, ou $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, l'on aura L. $z = 0$, ce qui arrivera lorsque x sera $= 0$; donc l'équation (B) donnera dans ce cas $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a}$, quantité qui doit être $= 0$, puisque $x = 0$. Mais alors $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; donc cette quantité deviendra $\frac{3a}{4 \cdot 9} + \frac{a}{3} = \frac{a}{4 \cdot 3} + \frac{4a}{4 \cdot 3} = \frac{5a}{12}$. Il faut donc ajouter une constante C à l'intégrale B, & cette constante doit être $= -\frac{5a}{12}$.

Maintenant si nous supposons, que la soûtangente de la logarithmique ma soit $=$ Bt & que Bt soit $= a$; S. $\frac{adz}{z} = a$ L. z sera $=$ B T, lorsque l'on fera B N $=$ Tm $= z$, & qu'on prendra les logarithmes dans la logarithmique mb. Cela posé pour construire la courbe A D, je prends B A $= \frac{16}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$, en faisant B$t = a$, a est arbitraire.

Je fais ensuite BN $= Tm = z$, je fais l'abscisse BC $= x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - \frac{5a}{12} -$ BT, & l'ordonnée correspondante CD $= y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, & j'ai le point D de la courbe, on trouvera de même tous les autres points de la même courbe, dont l'origine est en A (*).

REMARQUE. Si l'on mene la ligne tc, elle sera parallèle à la tangente Gn au point G de la courbe, trouvé en supposant la quantité correspondante $z =$ Bc : car l'équation $dx = \frac{zdy}{a}$ donne $dy = f$G : $dx = f$M : : a

(*) Si l'ordonnée DC de la base est supposée déterminée, ainsi que l'annonce le Problême, qu'elle soit de dix pieds, par exemple, on doit prendre a & z, tels que l'on ait $y =$ 10 pieds $= \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$. Si l'on fait $a =$ 1 pied, on trouvera z par la résolution de l'équation $z^4 + 2zz - 10z + 1 = 0$, qui est du quatrieme degré, & alors on aura facilement la valeur de BC $= x$, ou la hauteur du solide. Si l'on veut que CD soit de 10 pieds 6 pouces, on n'aura qu'à supposer z de deux pieds, & $a =$ 1 pied.

Si on vouloit construire la courbe sans employer la logarithmique, on feroit attention qu'au point A de la courbe z est $= a\sqrt{\frac{1}{3}}$, ce qui donne pour la valeur de x dans ce point $\frac{5a}{12} - a$L.$(a\sqrt{13})$, tandis qu'on doit trouver o; on ajouteroit donc à l'intégrale B ci-dessus qui représente la valeur de x, une constante C $= a$L.$a\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{5}{12}a$, & l'on chercheroit ensuite pour chaque valeur de z, la valeur de y & de x; mais comme les logarithmes dont on doit faire usage sont les hyperboliques, on pourra facilement les trouver par le moyen des tabulaires comme nous l'avons enseigné dans la premiere section (n°. 24).

$= Bt : z = Bc$; de ſorte que les côtés qui comprennent les angles droits des triangles GfM, tBc, étant proportionnels, ces triangles ſont ſemblables, & l'angle fGM, qui eſt cenſé le même que celui que forme la tangente Gn avec l'ordonnée, eſt égal à l'angle Btc; ainſi Gn & Tc ſont parallèles. Par la même raiſon tb eſt parallèle à la tangente au point A de la courbe qui, ſe trouvant entre les tangentes & l'axe, tourne, ſa concavité vers cet axe.

En prenant les z plus grands que Bb, on décrit la branche AD. Mais en prenant les z plus petits que Bb on décrira la branche AV, de la même courbe qui par conſéquent aura un point de rebrouſſement en A. Si l'on fait $Bh = pa = z$, on prendra $\frac{Bp}{a}$ pour L. z, & l'on aura $Bp = a$L.z, & au lieu de ſouſtraire cette derniere quantité on l'ajoutera; parce que Bp étant négatif, il faut changer le ſigne $-$ en $+$, & les tangentes de la branche AV étant parallèles aux th, elle tournera ſa convexité du côté de l'axe.

98. Si l'on fait tourner la branche AD autour de ſon axe, elle engendrera un ſolide qui aura la propriété que demande le problême. Il en ſera de même ſi l'on fait tourner la branche AV; on employera cette derniere branche, ſi l'on veut avoir un ſolide qui ſous même longueur ait plus de ſolidité. Si l'on vouloit donner la figure de l'un des ſolides dont nous venons de parler à la proue d'un vaiſſeau on pourroit pour la rendre pointue, lui ajouter la figure conique que formeroit la tangente Ag (au point A) parallèle à tb, par ſa révolution autour de la ligne CN.

99. PROBLÊME. *Si un corps m se meut dans un fluide parfait dont la densité soit* $=$ D, *trouver une équation qui contienne le rapport entre l'espace parcouru & la vîtesse restante.* Supposons que la surface g représente la surface plane qui éprouveroit la même résistance que la surface du solide, en supposant que la vîtesse de cette surface fût égale à celle du solide, & représentons la vîtesse du mobile par u, ce mobile poussera chaque couche infiniment mince du fluide, avec un effort exprimé par gDu (*), & la diminution de son mouvement sera comme le produit de gDu par le nombre des couches qu'il rencontrera, lequel est proportionnel à l'espace ds qu'il parcourt. On aura donc $gDuds = -mdu$: on donne le signe $-$ à du, parce que l'espace augmentant u diminue; ainsi $\frac{gDds}{m} = -\frac{du}{u}$, & en intégrant & ajoutant une constante L.A, il vient $\frac{gDs}{m} = -L.u + L.A$ (la quantité A doit être égale à la vîtesse primitive avec laquelle le corps m a commencé à se mouvoir). Donc $\frac{gDs}{m} = L.\frac{A}{u}$, & $\frac{gDs}{m} L.e = L.\frac{A}{u}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$; ainsi

(*) A cause que la couche du fluide est supposée infiniment mince, elle est censée recevoir toute la vîtesse actuelle du mobile.

$e^{\frac{gDs}{m}} = \frac{A}{u}$, & $u = \frac{A}{e^{\frac{gDs}{m}}}$ .... (A), équation qui résout le problême.

100. PROBLEME. *Supposant qu'un corps m se meut dans un fluide parfait dont la densité* $= D$, *trouver la relation entre l'espace parcouru, & le tems employé à le parcourir*, u étant la vîtesse, t le tems, s l'espace. On a $u\,dt = ds$; donc l'équation $gDu\,ds = -m\,du$ trouvée dans le problême précédent, deviendra $gDu^2\,dt = -m\,du$, ou $\frac{gD\,dt}{m} = -\frac{du}{uu}$. En intégrant & ajoutant une constante, on aura $\frac{gDt}{m} = \frac{1}{u} - \frac{1}{A} = \frac{A-u}{Au}$, A étant la vîtesse primitive du mobile. Si l'on substitue la valeur de u trouvée dans le problême précédent, on aura $\frac{gDt}{m} = \frac{e^{\frac{gDs}{m}} - 1}{A}$...(B), équation qui résout le problême.

Si un corps cylindrique dont la hauteur est $= h$ & la base $= g$, se meut dans un fluide de même densité, & dans la direction de son axe, on pourra substituer hDg au lieu de m, & lorsque l'espace parcouru s sera égal à la hauteur h, on aura $\frac{gDs}{m} = 1$, & l'équation A (du problême précédent) donnera $u = \frac{A}{e}$: on aura aussi $\frac{gDt}{m} = \frac{e-1}{A}$. Mais $\frac{gD}{m} = \frac{1}{h}$; donc t

$= h. \frac{e-1}{A}$. Soit $h = 6$ pieds, si A est une vîtesse capable de faire parcourir 10 pieds par seconde; comme $e = 2.71828$, à peu-près, on aura $u = \frac{10}{2.71828} = 3.6$, en s'en tenant à une décimale, c'est-à-dire, que la vîtesse restante pourra faire parcourir au corps environ 3.6 pieds par seconde. L'équation $t = h. \frac{e-1}{A}$ donne dans ce cas $t = 1.03097$, en s'en tenant à cinq décimales, c'est-à-dire, que le mobile aura employé environ 1.03097 secondes de tems à parcourir l'espace h où sa longueur.

On peut remarquer que l'équation $u = \frac{A}{e}$ fait voir que si plusieurs cylindres de même matiere se meuvent dans un fluide de même densité & dans la direction de leur axe & qu'ils parcourent chacun un espace égal à leur longueur, les vîtesses restantes sont égales aux vîtesses primitives divisées par e, & par conséquent ces vîtesses seront proportionnelles aux vîtesses primitives.

De l'Hydrodynamique.

101. LA théorie de l'équilibre & du mouvement des fluides est si intéressante que nous sommes persuadés que nos Lecteurs seront bien aises que nous donnions ici en peu de mots les principes généraux de l'*hydrodynamique*, c'est-à-dire, de l'hydrostatique & de l'hydraulique. L'*hydrostatique* est cette science qui traite de l'équilibre des fluides, l'*hydraulique* au contraire traite de leurs mouvemens, de leur action & de leur

résistance. Nous avons déja parlé de l'action & de la résistance des fluides, disons aussi quelque chose de leur équilibre & de leur mouvement.

La direction de la gravité étant perpendiculaire à l'horison, 1°. Si un fluide contenu dans un vase a sa surface parallèle à l'horison, toutes les particules qui composent les couches ou tranches horisontales, & tout le fluide seront en équilibre. 2°. Il est visible que tout le fluide contenu dans le vase AHDF (fig. 80) & celui qui pourroit être contenu dans le vase BCGE, doivent être en équilibre, en supposant que la ligne ABEF, est parallèle à l'horison, & que par conséquent le fluide contenu dans les vases communiquans ABC*a*, EGC*a*HDF sera en équilibre lorsque la ligne AF sera une ligne de niveau ou parallèle à l'horison. De là on peut conclure que la pression des fluides sur une même base parallèle à l'horison est proportionnelle à la hauteur. Car si on mène la ligne *a*C parallèle à l'horison & que l'on suppose que A*a*CP représente un tube, il est évident que tout le fluide HAPCGEFDH sera en équilibre; donc la pression des deux parties A*a*CB, *a*CGEFDH sur la même base C*a* sera la même. Il est évident d'ailleurs que la pression des fluides hétérogènes qui ont même hauteur & qui sont contenues dans des tubes cylindriques est proportionnelle à la densité où à la gravité spécifique de ces fluides & à la grandeur de la base; de sorte que si la gravité spécifique d'un des fluides est double de celle de l'autre, la pression qu'exercera le premier, sera double de celle du

ſecond ; mais ſi de plus la baſe devient triple, la preſſion doit devenir triple. En général la preſſion ſera en raiſon composée de la baſe, de la hauteur & de la gravité ſpécifique des fluides ; & les fluides hétérogènes ſeront en équilibre dans les tubes communiquans, lorſqu'ils auront des hauteurs en raiſon inverſe de leurs gravités ſpécifiques.

On peut conclure des principes ci-deſſus, que ſi un ſolide eſt plongé dans un fluide, la preſſion relative qu'exercera ce fluide ſur le ſolide pour le repouſſer ſera égale au poids d'un pareil volume de fluide. Car ſi on ſuppoſe qu'un pareil volume de fluide de même figure vienne à occuper la place du ſolide, tout le fluide ſera en équilibre, ce qui ne pourroit arriver ſi le poids de ce fluide n'étoit égal à la preſſion dont on vient de parler ; ainſi un corps plongé dans un fluide ſera repouſſé en haut avec une force égale au poids d'un pareil volume de fluide, & s'il eſt ſpécifiquement plus péſant que le fluide, il perdra une partie de ſon poids égale à la péſanteur d'un pareil volume de fluide. De plus les preſſions horiſontales du fluide ſe détruiront mutuellement & leur effet ſe réduira à preſſer le corps.

De là on peut conclure 1°. que ſi l'on plonge ſucceſſivement le même ſolide dans des fluides de différentes péſanteurs ſpécifiques, les portions qu'il perdra de ſon poids, ſeront proportionnelles aux gravités ſpécifiques des fluides. 2°. Que différens corps plongés dans le même fluide perdront des parties de leur poids proportionnelles à leurs volumes. De plus à cauſe que les poids des corps ſont comme les produits des volumes

& des densités, ce qui fait que les poids étant égaux, les volumes doivent être en raison inverse des densités ; si on plonge plusieurs corps de même poids dans le même fluide, les parties de leurs poids que perdront ces corps, seront en raison inverse des densités. Mais parce que si on les plonge dans des fluides dont les pésanteurs spécifiques soient différentes, ils doivent perdre des parties de leur poids proportionnelles à leurs volumes, & à la gravité spécifique des fluides dans lesquels on les plonge, ils perdront des parties de leur poids qui seront en raison directe des gravités spécifiques des fluides, & en raison inverse des densités des corps plongés.

Si un corps est spécifiquement plus leger que le fluide, la partie du solide qui s'enfoncera dans le fluide sera égale au volume de fluide de même pésanteur que le solide ; & parce que les volumes des corps de même poids sont en raison inverse de leurs densités ou gravités spécifiques, le volume entier du solide, sera au volume de la partie plongée, comme la gravité spécifique du fluide est à celle du solide. Ainsi les gravités spécifiques des solides de même volume, seront proportionnelles aux parties plongées dans le même fluide ; & s'il s'agit de solides de même gravité spécifique, les parties plongées dans le même fluide, seront proportionnelles à leurs volumes (*).

(*) Puisque l'occasion se présente, nous jugeons à propos de dire un mot du célèbre problême de la couronne de Hieron, Roi de Syracuse. Ce Prince soupçonnant que l'ouvrier avoit mêlé de l'argent dans la couronne qu'il lui

102. PARLONS maintenant du mouvement des fluides. Selon Torricelli, les fluides qui coulent par des orifices faits dans les vases, peuvent remonter au niveau du fluide du vase, & les vîtesses des premières particules qui s'écoulent sont

avoit fait faire, proposa à Archimede de trouver la portion d'argent mêlée avec l'or : voici comment on peut résoudre le problême. Soit P le poids de la couronne, x le poids de l'or contenu dans la couronne, z le poids de l'argent, p la partie du poids qu'une masse P d'or perd dans l'eau; si par exemple, l'or perdoit $\frac{1}{19}$ de son poids dans l'eau, p seroit $= \frac{P}{19}$, q la partie du poids que perd une masse d'argent $=$ P, & t le poids que perd la couronne. En faisant $P : p :: x : \frac{px}{P}$, on aura le poids que perd dans l'eau l'or de la couronne. Par la même raison $\frac{qz}{P}$ exprimera la perte de poids de l'argent de la couronne. Mais ces deux pertes sont égales à la perte t que fait la couronne; ainsi l'on a l'équation $\frac{px}{P} + \frac{qz}{P} = t$. De plus les poids x & z pris ensemble doivent être égaux au poids P de la couronne; c'est pourquoi nous aurons la seconde équation $x + z = P$. Donc $z = P - x$. Substituant cette valeur de z dans la premiere équation, on trouvera facilement $x = \frac{(q-t).P}{q-p}$. Cette valeur substituée dans l'équation $z = P - x$ donnera $z = \frac{(t-p).P}{q-p}$. Cependant cette solution suppose que l'or & l'argent qui entrent dans la couronne forment après le mêlange un volume égal à la somme des volumes qu'ils donneroient s'ils étoient séparés, ce qui sans doute n'est vrai qu'à peu-près, & non exactement.

en raiſon ſoudoublée de la hauteur. Mais ce Savant ayant remarqué que dans les eaux jailliſſantes, la hauteur du jet n'alloit pas tout-à-fait juſqu'au niveau de l'eau du réſervoir, il attribua cette différence en partie à la réſiſtance de l'air (réſiſtance qui eſt cauſe de la diviſion des gouttes d'eau qu'on obſerve dans les jets), & en partie à l'eau qui en retombant du ſommet du jet, retarde les gouttes ſuivantes. En effet les premieres gouttes d'eau qui ſortent lorſqu'on ouvre l'orifice, montent plus haut que les ſuivantes, & lorſque par le moyen de la machine pneumatique on a pompé l'air, la diſperſion des gouttes n'a pas lieu, & la hauteur du jet augmente. Mariotte dans ſon Traité du mouvement des eaux, ajoute à ces cauſes le frottement que ſouffre l'eau en ſortant par les orifices, frottement qu'il a trouvé être plus conſidérable pour les grands que pour les petits jets, de maniere que la hauteur de l'eau au-deſſus de l'orifice étant de cinq pieds, la hauteur du jet n'eſt moindre que d'une $\frac{1}{60}$ partie de cette hauteur, & lorſque la hauteur eſt de 33 ou 44 pieds, la diminution de la hauteur du jet n'eſt qu'une $\frac{1}{11}$ partie de cette hauteur. Par les expériences de Mariotte, Gulielmini & autres, les vîteſſes des eaux qui coulent par des orifices égaux & ſemblables, mais ſitués à différentes diſtances de la ſurface de l'eau, ſont en raiſon ſoudoublée, du moins à peu-près, des hauteurs. Ce qu'on dit des vîteſſes doit s'entendre des quantités d'eau qui coulent en même-tems par ces orifices. Gulielmini dans ſon livre ſecond de la meſure des eaux coulantes, ayant fait au côté d'un vaſe 16 orifices

égaux, dont chacun pouvoit être ouvert, les autres étant fermés, trouva six fois les quantités d'eau proportionnelles aux racines des hauteurs, il trouva une fois un défaut de $\frac{1}{34}$, une fois un défaut d'un $\frac{1}{56}$ & dans les huit autres expériences le défaut fut d'un $\frac{1}{100}$, ou plus petit.

103. PROBLEME. *Supposant que la vîtesse d'un fluide qui s'écoule par un orifice est proportionnelle à la racine de la hauteur du fluide, cherchons quelle seroit la quantité d'eau qui s'écouleroit par un orifice quarré* ABDC (*fig.* 81) *qu'on auroit pratiqué dans une des faces d'un vase parallelipipède* HTDC, *en supposant que la surface du fluide est terminée par la ligne* AB, *& que pendant l'écoulement on entretient le fluide à cette hauteur.* Soit $AC = CD = a = 1$, $am = x$, MN parallèle & égale à CD & perpendiculaire à am, étant multipliée par $mp = dx$ donnera adx pour l'élément $Mg.nN$ de l'orifice. Multipliant adx par $x^{\frac{1}{2}}$, on aura $ax^{\frac{1}{2}}dx$ pour l'élément de la quantité de fluide qui s'écoule à chaque instant; donc $S.ax^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}$, sera la quantité de fluide qui s'écoule à chaque instant par la partie AMNB de l'orifice; & si l'on fait $x = a$, $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$ sera la quantité de fluide qui coulera par l'orifice entier. Si l'on mesure la quantité de fluide qui coule pendant une seconde, & qu'on la fasse $= \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$, en multipliant ensuite par 60, on aura la quantité de fluide qui s'écoulera pendant une minute.

Si par le milieu a du côté A B, on tire les lignes aC, aD pour avoir le triangle isocelle CaD, les triangles semblables aCb, arm, donneront $ab = a : b\mathrm{C} = \frac{a}{2} :: am = x : mr = \frac{x}{2}$; ainsi $rt = x$, & $rtsu = xdx$. Donc l'élément de la quantité de fluide écoulé sera $= x . x^{\frac{1}{2}} dx = x^{\frac{3}{2}} dx$, & $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$ sera la quantité de fluide écoulé, & lorsque x sera $= a = 1$, l'on aura $\frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$ pour la quantité d'eau écoulée par l'orifice triangulaire aCD.

104. Si dans le quarré on inscrit un cercle dont l'ordonnée soit mi (fig. 82), on aura $2 mi.mp$ pour l'élément de l'aire de ce cercle. Mais si l'on veut avoir la quantité d'eau qui s'écoulera par la partie tbi, on multipliera $2\,ph = 2\,x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ par pm, en faisant $pm = -dx$, parce que nous prenons, les dx dans un sens contraire aux x qui se prennent en allant de a vers b; & en multipliant cette quantité par $x^{\frac{1}{2}}$, l'élément du fluide écoulé sera $= -2\,xdx(1-x)^{\frac{1}{2}} = -2\,dx(1-x)^{\frac{1}{2}} + 2\,dx(1-x)^{\frac{3}{2}}$, à cause de $x = am = 1 - mb = 1 - (1-x)$. Donc l'intégrale sera $\frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}$; s'il

s'agit de l'orifice entier, on aura $1 = bm$, ou $1 - x = 1$ & l'intégrale sera $= \frac{8}{15}$; ainsi la quantité qui coulera par l'orifice circulaire entier sera $= \frac{8}{15}$.

Si la courbe M a N (fig. 83) étoit une parabole dont le paramètre fût égal à b D $= 1 =$ B D, l'axe ab, l'ordonnée m N $= y$, on auroit $y = x^{\frac{1}{2}}$, $2x^{\frac{1}{2}}dx$ seroit l'élément de la parabole, $2xdx$ l'élément de la quantité du fluide écoulé, x^2 la quantité d'eau écoulée correspondante à l'abscisse am, & 1 la quantité correspondante à l'abscisse $ab = 1$, ce qui ne doit pas surprendre, parce que l'ordonnée correspondante à cette abscisse étant $= 1$, la largeur de la parabole sera $= 2$.

105. Supposons maintenant que H T (fig. 81) est la surface du fluide, en faisant P$m = x$, l'on aura dans le cas de l'orifice quarré A B C D, l'on aura, dis-je (en faisant $AB = AC = 1$), $x^{\frac{1}{2}}dx$ pour l'élément de la quantité de fluide écoulé, & $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ pour la quantité d'eau écoulée par la partie A M N B. Pour déterminer la constante C, je remarque que l'intégrale doit s'évanouir lorsque x devient $=$ Pa que je supposerai $= a$; donc $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} + C = 0$, ou $C = -\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$; ainsi l'intégrale complette sera $\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)$, qui lorsque $x =$ P$b = a$

$+ 1$, devient $= \frac{2}{3}(\overline{a+1}^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$. Dans le cas de l'orifice triangulaire, on aura l'élément du fluide écoulé $= x\,dx\sqrt{(x+a)}$, en faisant P$a = a$ & $am = x$. Si l'on suppose $\sqrt{(x+a)} = z$, on rendra cette formule rationnelle, & l'on pourra facilement l'intégrer. En effet l'on aura S. $x\,dx\sqrt{(a+x)} =$ S. $2dz(z^4 - azz) = \frac{2}{5}z^5 - \frac{2}{3}az^3$. Cette intégrale devant s'évanouir lorsque $x = 0$, ou lorsque $z = \sqrt{a}$, on doit lui ajouter une constante C $= + \frac{4}{15}a^2\sqrt{a}$.

Si l'on suppose que la courbe MaN (fig. 83) est une hyperbole équilatère dont l'un des axes soit $= a = a$P, en faisant $am = x$, $\sqrt{(a+x)}$ sera la racine de la hauteur Pm, & l'on aura MN $= 2.\sqrt{(ax+xx)} = 2x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(a+x)}$, & l'élément du fluide écoulé sera $= 2x^{\frac{1}{2}}.(a+x).dx = 2ax^{\frac{1}{2}}dx + 2x^{\frac{3}{2}}dx$, son intégrale sera $= \frac{4}{3}ax^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}$. Cette intégrale s'évanouissant lorsque $x = 0$ est complette, & si l'on suppose $x = 1 = ab$, elle deviendra $= \frac{4a}{3} + \frac{4}{5}$. Si l'équation de la courbe MaN est $y = x\sqrt{(a+x)}$, $2x\,dx(a+x)$ sera l'élément du fluide écoulé. Donc en intégrant, l'on aura $axx + \frac{2x^3}{3}$, expression du fluide écoulé par le segment MaN. Si on suppose $x = 1$, la quantité du fluide écoulé par l'ouverture CaD sera $= a.1 + \frac{2}{3}$. Il n'est pas difficile de voir

comment il faut s'y prendre lorſque les orifices ont d'autres figures.

106. TORICELLI conclut que la vîteſſe des fluides doit être proportionnelle à la racine de la hauteur, principalement de ce que ſi l'on adaptoit un tube (convenable) à l'orifice, l'eau monteroit juſqu'à une ligne horiſontale menée ſur la ſurface ſupérieure du vaſe (ſuppoſé plein). Varignon dans les Mémoires de l'Académie (année 1703) a voulu conclure la même choſe de ce que la preſſion eſt proportionnelle à la hauteur, & que la quantité du mouvement eſt comme le produit de la quantité du fluide & de la vîteſſe, (laquelle eſt auſſi comme la quantité du fluide) ou comme le quarré de la vîteſſe. Herman a ſuivi la même méthode dans ſa Phoronomie. Daniel Bernoulli a voulu le prouver par le principe du Savant Huygens, de l'égalité entre la deſcente actuelle & l'aſcenſion potentielle des corps. Le grand Newton (l. 2, propoſition 36) conſidere l'eau comme ſi elle deſcendoit de la hauteur qu'elle a au-deſſus de l'orifice. On peut remarquer auſſi que les particules d'eau qui jailliſſent d'un orifice ouvert ne ſuivent pas toutes une direction perpendiculaire à la ſurface de l'orifice; mais pluſieurs en coulent vers les bords, par des mouvemens obliques & convergens, ce qui reſſerre la veine de l'eau coulante & la rétrecit à une petite diſtance de l'orifice. On peut reconnoître ces mouvemens, en jettant de la pouſſiere dans l'eau, ainſi que l'a fait le Savant Daniel Bernoulli; comme on peut le voir dans ſon Hydro-dynamique, partie 3, ſection 4. M. Newton a trouvé qu'à un demi-pouce à peu-près de

l'orifice le diamètre de la veine resserrée, est à celui de l'orifice comme 21 : 25. D'autres ont trouvé d'autres rapports. Il y en a qui ont observé que la contraction de la veine n'avoit lieu que pour les petits orifices de trois ou quatre lignes de diamètre, & qu'à peine elle étoit sensible pour de plus grandes ouvertures.

Il est aisé de comprendre combien sont éloignées de la force de la démonstration les raisons par lesquelles Toricelli, Varignon, Herman ont conjecturé que la vîtesse de l'eau étoit proportionnelle à la racine de la hauteur, & combien est éloignée de la vérité l'hypothèse de Newton & de Daniel Bernoulli, que l'eau qui coule par un orifice est descendue de toute la hauteur du vase. Cependant par les expériences de Mariotte, Gulielmini, Polenus, répétées avec soin par l'illustre Lecchi, comme on peut le voir dans son hydrostatique imprimée en 1765, on peut, avec assez de confiance supposer, que la vîtesse est proportionnelle à la racine de la hauteur. Les expériences font voir que les orifices doivent avoir un certain rapport avec la capacité des vases. Si les orifices sont trop grands, il peut se faire, à cause de la cohésion des parties du fluide, que la nouvelle eau ne succede pas tout de suite à celle qui vient de s'écouler. Si les orifices sont trop petits, le frottement & la cohésion des parties peuvent retenir le fluide. Gulielmini ayant rempli successivement le même tube d'eau & de mercure, observa que le tems des écoulemens étoit le même dans les deux cas. On peut traiter en peu de mots ce qui regarde l'équilibre des fluides, mais la théorie de leur mouvement n'est appuyée que sur des hypothèses & n'offre que des doutes

& des incertitudes. Lorſqu'il s'agit de déterminer les mouvemens des corps les problêmes ſont d'autant plus compliqués qu'il y a un plus grand nombre de corps qui agiſſent les uns contre les autres ; & puiſque les particules des fluides agiſſent toutes les unes ſur les autres en ſe preſſant & en ſe mouvant d'une maniere que perſonne ne connoît & ne connoîtra peut-être jamais, il eſt viſible que le problême par lequel on demande de déterminer leurs mouvemens, leur action & leur réſiſtance ſurpaſſe les forces de la Géométrie & de l'analyſe connues, & que c'eſt en pure perte que l'on feroit des efforts pour réſoudre de tels problêmes, puiſque la ſolution ne pouvant être appuyée que ſur des hypothèſes qu'on ne ſauroit démontrer, ne peut jamais être bien rigoureuſe.

107. PROBLÊME. *Soit un tube cylindrique* ABHG (*fig.* 84) *ouvert de tous côtés, plein d'eau, de maniere que l'ayant enfoncé juſques en* fG (Tt *repréſentant le niveau de l'eau du vaſe* NDCM) *on retire ſubitement le pouce avec lequel on tenoit l'orifice* GH *fermé, on demande à quelle profondeur au-deſſous de* Tt *l'eau pourra deſcendre.* Soit la longueur du tube $AG = a$, le cercle dont le diamètre eſt $AB = c$, la gravité ſpécifique de l'eau $= n$, $fG = b$, l'eſpace AP, par lequel l'eau deſcend $= x$. Il eſt viſible que l'eau $fGHg$ étant en équilibre avec celle du vaſe ne contribue en rien au mouvement de l'eau du tube ; de ſorte que la puiſſance motrice eſt ſeulement égale à la maſſe $Pmgf$, qui ſe trouve au-deſſus du niveau. Mais $Pf = a - b - x$; donc $Pmgf = (a - b - x)nc$: or cette maſſe motrice doit mouvoir à chaque inſtant la maſſe $PH = (a - x)nc$. Donc la force accélératrice du fluide dans le tube eſt $=$

$\frac{a-b-x}{a-x}$. Soit v la vîtesse du fluide au point P, g l'espace que la gravité fait parcourir aux corps dans une seconde de tems, on aura $vdv = 2g.\frac{(a-x-b)dx}{a-x} = -\frac{2gbdx}{a-x} + 2gdx$, & $v^2 = 4gb\,\text{L.}\left(\frac{a-x}{a}\right) + 4gx$, en ajoutant une constante $C = -\text{L.}a$, qui rende $v = 0$, lorsque $x = 0$. Si donc on fait $v = 0$ pour avoir $4gb.\,\text{L.}\left(\frac{a-x}{a}\right) + 4gx = 0$, x indiquera la profondeur A R, à laquelle le fluide descendra dans le tube.

108. THEOREME. *Les oscillations d'un fluide qui monte & descend par les branches d'un siphon* BASTDC (*fig.* 85) *sont* tautochrones, *c'est-à-dire d'égale durée.* Supposons que le niveau du fluide soit représenté par la ligne MP, la longueur du canal MTP étant $=$ L. Soit le sinus de l'angle BQR $= p$. Supposons encore que le fluide en montant dans la branche ASQB parvienne en mn, tandis qu'elle descend dans l'autre branche jusqu'en po. Soit B$n = x$, BN $= a$, & N$n = a - x$, la grandeur de l'amptitude AB $= e$, celle de l'amptitude correspondante CD $= f$. Puisqu'il doit monter autant d'eau dans une des branches qu'il en descend dans l'autre, on aura $e.\text{N}n = f.\text{P}p$, ou $\text{P}p = \frac{e.(a-x)}{f}$.

Mais en faisant le rayon $=1$, on a $1 : q = \textit{sin.}\,\text{QRC} = \textit{sin.}\,\text{LOC} = \textit{sin.}\,l\text{O}o :: \text{O}o = \text{P}p : lo = \text{LK}$. Donc $\text{LK} = \frac{eq.(a-x)}{f}$. De plus QK : QZ :: *sin.* QZK

$= p : 1 :: LK : NZ$, ou $p : 1 :: LK : NZ = \frac{eq}{fp}(a - x)$.

Donc $nZ = nN + NZ = a - x + \frac{eq}{fp} \times (a - x) = \frac{(a - x).(fp + eq)}{fp} = \frac{(a - x)h}{p}$, en faisant $\frac{fp + eq}{f} = h$. Enfin $ZQ : QK :: nZ : qK$, ou $1 : p :: nZ : QK = (a - x)h$. Maintenant il est visible que la quantité de fluide mZ est $= (ah - hx)e$. Donc la masse de fluide B, contenue dans le siphon est sollicitée par la force motrice $(ah - hx)e$. Soit la vîtesse de l'eau qui descend $= v$, nous aurons $vdv = \frac{(ah - hx)2g.edx}{B}$, & $v = \sqrt{\left[ge\left(\frac{4ahx - 2hxx}{B}\right)\right]}$; ainsi le tems employé à parcourir nN sera $t = S.\frac{dx}{v} = S.\left(\frac{dx}{\sqrt{(eg.4ahx - 2eghxx)}}\right).\sqrt{B} = \sqrt{\frac{B}{2hge}}.S\frac{dx}{\sqrt{(2ax - xx}} = \sqrt{\frac{B}{2hge}}.A\,fin.\frac{x}{a}$. Si l'on suppose $nN = BN = NZ = x = a$, l'on aura le tems d'une demi-oscillation, & ce tems, à cause de l'arc $A\,fin.\frac{x}{a}$ qui, dans ce cas $= \frac{c}{2}$ (c étant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$), sera $t = \frac{c}{2}.\sqrt{\frac{B}{2hge}}$. Comme l'espace qui doit être parcouru n'entre point dans cette expression, il s'en suit que dans le même siphon, les demi-oscillations & par conséquent les oscillations entieres sont tautochrones.

109. PROBLÊME. *Déterminer la longueur d'un pendule qui fait ses demi-oscillations dans le tems que le fluide du siphon du théorême précédent employe à monter ou à descendre.* Le tems d'une demi-vibration dans un pendule dont la longueur est a, étant $= \frac{c}{2}\sqrt{\frac{a}{2g}}$, nous aurons $\frac{c}{2}\sqrt{\frac{a}{2g}} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{B}{2hg.e}}$; donc $a = \frac{B}{he} = \frac{Bf}{(fp+eq)e}$. Si nous supposons que les branches du siphon sont verticales & que $e=f$, il viendra $a = \frac{Bf}{2ff} = \frac{B}{2f}$. Mais la longueur du canal étant supposée $=b$, on a $B = bf$; donc $a = \frac{bf}{2f} = \frac{b}{2}$; c'est-à-dire que dans ce cas la longueur du pendule est égale à la demi-longueur de la colonne de fluide (*).

(*) Le savant Newton a comparé (*Principes de la Philosophie naturelle*, Liv. II, Section 8) le mouvement des ondes avec celui de l'eau dans les siphons ou canaux. Si l'on conçoit que par une action quelconque dirigée sur le point A (fig. 86), il s'est produit une cavité A dans une eau stagnante fG, l'équilibre de cette eau en sera troublé, & les eaux s'éleveront à droite & à gauche jusques en C & B pour redescendre ensuite par leur gravité, en partie du côté de A, en partie du côté de G & de F. Il est visible que par les vîtesses dues aux hauteurs Bb, Cc les eaux formeront des nouvelles cavités en F & D, d'où elles s'éleveront de nouveau en H & E, & ainsi de suite le mouvement des ondes se propagera en cercles autour du point A par des montées & des descentes successives. Si on suppose un pendule dont la longueur soit $= \frac{AC}{2}$

Si on suppose $e=f$, on a $B=bf=be$ & $a=\frac{b}{p+q}$; c'est-à-dire que dans ce cas la longueur du pendûle est égale à celle du canal occupé par l'eau, divisée par la somme des sinus d'inclinaison des branches du siphon.

$=\frac{BA}{2}$, à cause de $AC=BA$, l'onde descendra dans le creux BA, ou montera au sommet du sillon AC dans le même tems que ce pendule fera une vibration. Ainsi il fera deux vibrations entieres pendant le tems que l'onde montera & descendra, c'est-à-dire, pendant le tems que l'onde parcourra sa largeur BC ou AD. En effet il fera une demi-oscillation dans le tems que l'eau B parviendra en *b* qui est le point où elle s'arrêteroit si elle ne continuoit à se mouvoir par le mouvement acquis de B en *b*; de sorte que le tems que le point B met à parcourir B*b* est le même que celui d'une demi-oscillation dans un siphon dont une des branches seroit B*b* & l'autre $bD=bB$. Mais le nombre des vibrations des pendules suit la raison renversée soudoublée de leurs longueurs; donc un pendule dont la longueur seroit $4\frac{AB}{2}=2.AB$, fera une oscillation dans le tems que l'onde parcourra sa largeur BC, qu'on peut supposer $=2.AB$, à cause du peu de profondeur des ondes. Si l'on fait $=p$ la longueur d'un pendule qui fait une vibration dans une seconde, la proportion $\sqrt{p}:1'' :: \sqrt{BC}:t$ donnera le tems d'une vibration d'un pendule de la longueur BC, ou $t=\frac{\sqrt{BC}}{\sqrt{p}}$. Si l'on divise l'espace BC par le tems t, on aura la vîtesse de l'onde $v=\sqrt{(BC.p)}$, de sorte que la vîtesse des ondes suit la raison sous-doublée de leurs largeurs; & si l'on suppose $BC=p$, v sera $=p$. Les ondes qui ont 3 pieds $8\frac{1}{2}$ lignes de largeur parcourent cet espace en une seconde, & par conséquent 183 pieds 6 pouces 6 lignes dans une minute.

Cependant ces choses ne sont vraies qu'à peu-près, parce qu'on suppose que dans les ondulations les parties de l'eau montent & descendent en ligne droite, au lieu que leur mouvement se fait en ligne courbe.

110. PROBLÊME. *Déterminer le choc de l'eau qui frappe horisontalement les aîles inférieures de la roue d'un moulin* (*fig.* 87). Soit le rayon AC de la roue $= b$, CB $= a$, la longueur de l'aîle sera $= a - b$, soit la largeur de l'aîle $= f$, la vîtesse de l'eau $= c$, celle du point B, extrémité du rayon CA $= v$, la vîtesse avec laquelle l'eau choque le point B sera $= c - v$. Mais si on suppose CP $= x$, on aura la vîtesse du point P $= \frac{xv}{a} = xv:a$, & celle avec laquelle l'eau choque ce point sera $= c - \frac{xv}{a}$. Mais l'élément MNnm de l'aîle étant $= fdx$, l'action de l'eau contre cet élément sera exprimée par $fx\left(c - \frac{xv}{a}\right)^2 dx$. Dont l'intégrale est $f\left(\frac{xxcc}{2} - \frac{2}{3}\frac{cvx^3}{a} + \frac{1}{4}\frac{v^2}{a^2}\cdot x^4\right) = \left(\frac{c^2x^2}{2aa} - \frac{2cx^3v}{3a^3} + \frac{x^4v^2}{4a^4}\right) faa + C$, en ajoutant une constante C. Mais au point A le choc est nul; donc en faisant $x = b$, l'on aura C $= -faa\left(\frac{c^2b^2}{2aa} - \frac{2cb^3v}{3a^3} + \frac{b^4v^2}{4a^4}\right)$. Ainsi l'action de l'eau sur la partie DMNE de l'aîle sera $= faa\left(-\frac{c^2b^2}{2aa} + \frac{2cb^3v}{3a^3} - \frac{b^4v^2}{4a^4} + \frac{c^2x^2}{2aa} - \frac{2cx^3u}{3a^3} + \frac{x^4v^2}{4a^4}\right) = ac^2m\left(-\frac{Av}{c} + B + \frac{Cv^2}{c^2}\right)$, en faisant $x = a$, $\frac{b}{a} = p$, ou $1 -$

$p = \frac{a-b}{a}$, $\frac{2}{3}(1+p+p^2) = A$, $\frac{1+p}{2} = B$, $\left(\frac{1+p^2}{4}\right)(1+p) = C$, & la ſurface $f.(a-b)$ de l'aîle $= m$. On peut regarder ce moment de percuſſion comme un poids d'eau $= c^2 m \left(-\frac{Av}{c} + B + \frac{Cv^2}{c^2}\right)$ appliqué au rayon $a = CB$.

111. PROBLÊME. *Déterminer la conſtruction d'un moulin qui doit produire le plus grand effet poſſible.* Puiſque l'effet d'une machine doit s'eſtimer par la vîteſſe du fardeau qu'elle doit élever & par le poids de ce fardeau, ſi nous faiſons ce fardeau $= P$ & ſa vîteſſe $= V$, l'effet du moulin ſera $= P.V$. Mais la puiſſance motrice appliquée au rayon CB eſt $= c^2 m \left(B - \frac{Av}{c} + \frac{Cv^2}{c^2}\right)$ & ſa vîteſſe eſt $= v$; donc en faiſant $\frac{v}{c} = z$, ou $v = cz$, & multipliant cette puiſſance par $cz = v$, $c^3 m z(B - Az + Cz^2)$ ſera comme PV. Or en faiſant z variable le *maximum* de cet effet donne $c^3 m(B - 2Az + 3Cz^2) = 0$; donc $z = \frac{A}{3C} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{9C^2} - \frac{B}{3C}\right)}$. Mais dans le cas du *maximum* on doit faire $z = \frac{A}{3C} - \sqrt{\left(\frac{A^2}{9C^2} - \frac{B}{3C}\right)}$ comme il eſt facile de le conclure de ce que nous avons dit ſur les *maxima* & les *minima* dans le calcul diffé-

rentiel. Comme la valeur de z est non-seulement très-compliquée, mais qu'elle est encore différente selon les valeurs de a & de b, il est à propos de chercher une valeur moyenne. Or il n'est pas convenable que b soit $< \frac{a}{2}$, ni $> \frac{9a}{10}$. Si nous supposons $b = \frac{a}{2}$, nous aurons $p = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, & $\frac{2}{3}(1+p+p^2) = \frac{7}{6}$, $B = \frac{1+p}{2} = \frac{3}{4}$, $C = \frac{15}{32}$. D'où l'on tire $z = \frac{v}{c} = 0.43$; c'est-à-dire que v sera $= 0.43 \cdot c$. Dans le second cas où $b = \frac{9a}{10}$, il vient $\frac{b}{a} = p = \frac{9}{10}$, $A = \frac{27}{25}$, $B = \frac{19}{20}$, $C = \frac{86}{100}$, d'où l'on tire $v = 0.31 \cdot c$. Donc la vîtesse de la roue est plus grande, lorsque les aîles sont plus courtes (*).

Comme les vîtesses de la roue dans ces deux suppositions extrêmes ne different pas beaucoup prenons une valeur moyenne arithmétique entre celles de p ou de $\frac{b}{a}$, cette valeur sera $(\frac{1}{2} + \frac{9}{10}) : 2 = 0.7$, & alors la longueur de l'aîle $a - b$ sera $= \left(\frac{a-b}{a}\right) a = \frac{3a}{10} = \frac{3b}{7}$, c'est-à-dire que la lon-

(*) Mais il est visible que pour qu'il se fasse une espece de compensation, il est nécessaire que les aîles aient une certaine longueur; car si elles sont trop courtes le choc sera moindre, que si elles sont plus longues.

gueur

gueur de l'aîle doit être les $\frac{3}{7}$ du rayon de la roue & alors $z = \frac{v}{c} = 0.38$ à peu-près ; donc la vîtesse des aîles doit être à peu-près les $\frac{38}{100}$ de celle du fluide ou à peu-près les deux cinquiemes de celle du fluide (*). On voit par là que la théorie vulgaire que nous avons exposée ci-dessus ne s'accorde pas avec celle-ci, ce qui vient de ce que l'on y a regardé l'aîle comme un plan mu dans la même direction que le fluide ; mais la solution que nous venons de donner s'accorde à très-peu près avec l'expérience.

(*) Si l'on substitue la valeur de z dans l'expression $c^3 m (B - Az + cz^2)$, on trouvera que le plus grand effet est comme $\frac{7 c^3 m}{50}$; mais si l'aîle étoit en repos le choc du fluide seroit $= c^2 m$, & le moment de ce choc $= cm^2$. Donc le plus grand effet est un peu plus petit que la septième partie de celui que le fluide peut produire par son choc.

Combinons avec la grande roue du moulin un assemblage de roues dont la derniere qui fait mouvoir le fardeau P fasse un nombre n de révolutions avec la vîtesse V, tandis que la grande n'en fait qu'une, nous aurons $v : V :: 1 : n$, & $V = \frac{vn}{1} = 0.38.cn$. Ainsi $\frac{7c^3 m}{50} = 0.38 Pcn$. D'où l'on tire $n = \frac{7 c^2 m}{19 P}$, équation qui déterminera la construction de la machine.

Mais en faisant $= 2p$, la circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$, $\frac{2ap}{v} = \frac{200.pa}{38.c}$ exprimera le tems d'une révolution de la grande roue, pendant lequel celle

112. PROBLÊME. *Déterminer le moment d'impulsion des aîles d'un moulin à vent.* Soit M M la coupe d'une aîle perpendiculairement à son axe AC (fig. 89), & supposons que le vent aille

---

qui fait mouvoir le poids P fait le nombre n des révolutions.

Si la résistance de la meule qui écrase le bled est désignée par P. q, ayant pris q pour le levier auquel cette résistance est censé appliquée, nous aurons $2pa : 2pnq :: v : V = \frac{vnq}{a} = \frac{38.cnq}{100.a}$. Donc $PV = \frac{7c^3m}{50} = \frac{38.Pcnq}{100.a}$, d'où lon tire $n = \frac{7c^2ma}{19.Pq}$.

Si l'action de l'eau est comme le quarré de la vîtesse multiplié par a, av^2 exprimera cet effort. Si l'on appelle x la hauteur dont un corps devroit tomber pour acquérir cette vîtesse, l'on aura $vdv = 2g.dx$, $2g$ étant la vîtesse que la gravité communique dans une seconde, & $v^2 = 4g.x = 60.x$, ou $x = \frac{v^2}{60}$, & la résistance par rapport à la surface f sera exprimée par axf. Or fx est un prisme qu'il faut multiplier par le poids n d'un pied cube d'eau en supposant ce prisme exprimé en pieds. A l'égard du coefficient a il paroît par certaines expériences qu'on peut le faire à peu-près égal 1.7; ainsi $1.7fnh$ désignera l'action de l'eau correspondante à la vîtesse c due à la hauteur h.

Voici à peu-près comme il paroît qu'on peut s'y prendre *pour déterminer le nombre des aîles d'une roue de moulin pour que le choc de l'eau ne soit pas affoibli par leur nombre* (*fig.* 88). Nous supposons que les directions des aîles forment un angle BCE au centre de la roue. Cela posé, menons la ligne horisontale N A qui indiquera la direction du fleuve, il est visible que la partie FE de l'aîle DE est frappée par l'eau, aussi-bien que la partie HB de l'aîle verticale AB. Afin donc que le choc de l'eau sur la roue ne soit pas diminué par l'interposition de l'aîle

frapper cette coupe (fig. 90) avec la vîteſſe & la direction VP. Soit PE la vîteſſe de l'aîle qui ne peut tourner que dans une direction perpendiculaire à PV, ou EL. puiſque pendant

---

DE, il eſt néceſſaire que l'action de l'eau ſur les parties HB, EF ſoit égale à celle qui auroit lieu ſur l'aîle verticale AB ſans l'interpoſition de l'aîle DE.

Suppoſons pour ne pas nous jetter ſans néceſſité dans des calculs compliqués, que la roue eſt en repos, & que l'eau vient frapper avec la vîteſſe C les aîles immobiles AB, DE. Soit l'angle BCE $= p$, CA $= b$, CB $= a$, la longueur des aîles $= a - b$, leur largeur $= f$, & le rayon $= 1$. Le triangle rectangle HCE donne $1 : a ::$ $cos. p$: CH $= a. cos. p$; donc HB $= a - a. cos. p$. Ainſi le choc de la ſurface HB ſera $= f C^2 (a - a. cos. p)$. Mais FG $=$ AH $=$ CH $-$ CA $= a. cos. p - b$. Donc FE $= \frac{a. cos. p - b}{cos. p}$; ainſi le choc de la ſurface FE (qui eſt oblique), ſera $= \left(\frac{a. cos. p. - b}{cos. p}\right). f. \overline{sin. CFA.}^2 C^2 =$ $\left(\frac{a. cos. p - b}{cos. p}\right). f. \overline{cos. p.}^2 C^2 = (a. \overline{cos. p}^2 - b. cos. p) f C^2$.

Mais le choc perpendiculaire de l'aîle AB eſt $= (a - b) f. C^2$.

Donc $(a - b). f. C^2 = (a. \overline{cos. p}^2 - b. cos. p). f C^2 + (a - a. cos. p). f. C^2$. Donc $a - b = a. \overline{cos. p}^2 - b. cos. p + a - a. cos. p$, ou $\overline{cos. p}^2 - \left(\frac{a + b}{a}\right). cos. p = -\frac{b}{a}$; &

$cos. p = \left(\frac{a + b}{2a}\right) \pm \sqrt{\left[\left(\frac{a + b}{2a}\right)^2 - \frac{b}{a}\right]} =$ $\frac{a + b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{aa - 2ab + bb}{4aa}\right)} = \frac{a + b}{2a} \pm \left(\frac{a - b}{2a}\right)$;

qu'une particule d'air fait le chemin VP = LE, le point P de l'axe de l'aîle fait le chemin PE, il est visible qu'en décomposant LE en PE = Ln & PL = En, PL sera la vîtesse & la direc-

---

donc $cos. p = 1$, & $cos. p = \frac{b}{a}$. Si $cos. p = 1$, on aura p = BCE = 90°, c'est-à-dire, que la roue ne devroit avoir que quatre aîles distantes l'une de l'autre d'un quart de cercle. Mais parce que l'impulsion de l'eau sur la roue doit être continu & non interrompu, il est convenable que le nombre des aîles soit plus grand. Il faut donc rejetter la premiere valeur de $cos. p$, & employer la seconde $cos. p = \frac{b}{a}$; donc $sin. p = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$. C'est pourquoi selon les différentes valeurs de $\frac{b}{a}$ le nombre des aîles de la roue doit être différent. Supposons pour les limites de la valeur de $\frac{b}{a}$, $\frac{1}{2}$ & $\frac{9}{10}$. Si $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, on aura $sin. p = sin. 60°$. Ainsi dans ce cas la roue doit avoir 6 aîles. Si $\frac{b}{a} = \frac{9}{10}$, il vient $sin. p = sin. 25°. 45'$, c'est-à-dire, que la roue doit alors avoir 14 aîles. Ainsi une roue ne doit avoir ni moins de six aîles, ni plus de quatorze. Si $\frac{b}{a} = \frac{7}{10}$, on aura $sin. \frac{b}{a} = sin. 43°. 36'$; ainsi une telle roue doit avoir neuf aîles.

REMARQUE I. L'on doit toujours prendre pour la longueur $a - b$ de l'aîle, la profondeur à laquelle l'aîle verticale AB peut s'enfoncer dans l'eau. La théorie des moulins dont les roues sont horisontales est appuyée sur les mêmes principes.

REMARQUE II. Quelque spécieuse que soit cette théorie,

tion apparente de l'air. Donc l'effort P E sera comme $\overline{PL}^2 . \overline{fin. LPM}^2 . fin. EPH$ (voyez le n°. 25) $= \overline{PL}^2 . \overline{fin. LPM}^2 . cof. VPH$. Maintenant $PL : LH :: fin. PHL = fin. PHE = fin. VPH = fin. p$ (en faisant l'angle $VPH = p$) $: fin. LPM$. Donc $PL . fin. LPM = LH . fin. p$. Mais en faisant $PE = v$, l'on trouve $EH = v\, cot.\, p = \frac{v}{tang.\, p}$. C'est pourquoi en supposant $VP = c$, l'on aura $LH = c - \frac{v}{tang.\, p}$. Donc en substituant, $PE = cof.\, p . \overline{fin.\, p}^2 \left(c - \frac{v}{tang.\, p}\right)^2 = cof.\, p\, (c\, fin.\, p - v . cof.\, p)^2$. Soit l'axe A C (fig. 89) de l'aîle $= a$, $AP = x$, $Pp = dx$, $MM = y$, l'élément $MmmM$ de l'aîle sera $= y\, dx$. Soit encore la vîtesse de l'extrémité C de l'aîle $= z$, la vîtesse du point P sera $v = \frac{zx}{a}$; donc l'impulsion sur le plan élémentaire $y\,dx$ sera $= y\,dx\, cof.\, p \left(c . fin.\, p - \frac{zx\, cof.\, p}{a}\right)^2$. Multipliant cette quantité par la vîtesse du point P, le moment d'impulsion sur le plan $y\,dx$ sera $= \frac{yzx\,dx}{a} . cof.\, p \left(c . fin.\, p - \frac{zx\, cof.\, p}{a}\right)^2$, dont l'in-

je doute qu'elle soit vraie; car un Savant prétend avoir trouvé par expérience que la roue produit un plus grand effet lorsqu'elle a 48 aîles que quand elle n'en a que 24 ou 12. Or les dimensions de la roue qu'il a employée sont telles que $\frac{b}{a}$ est $= \frac{7}{5}$ à peu-près.

tégrale exprimera le moment d'impulsion de l'aîle entiere $NDcn$. Supppofant la largeur $MM = b$, c'eft-à-dire, fuppofant l'aîle rectangulaire, le moment d'impulsion cherché fera $= \frac{bz \, cof. p}{a} \left(\frac{c^2 x^2 \, fin. p^2}{2} - \frac{2cz x^3 \, fin. p. \, cof. p.}{3a} + \frac{z^2 x^4 \, cof. p^2}{4a^2} \right) + C$. Dans cette intégrale z & p font des quantités qu'on regarde comme conftantes.

Pour déterminer la conftante C, je remarque qu'en fuppofant $x = AB = m$, l'impulsion de l'aîle doit être nulle; puifque l'aîle commence au point B; donc le moment d'impulsion cherché eft

$$= \frac{bz \, cof. p}{a} \left(c^2 \frac{\overline{fin. p}^2}{2} (x^2 - m^2) - \frac{2cz \, fin. p. \, cof. p}{3a} \times (x^3 - m^3) + \frac{z^2 \, \overline{cof. p}^2}{4aa} (x^4 - m^4) \right).$$

Enfin en fuppofant $x = a$, & négligeant la quantité m qui dans les moulins, tels qu'on les conftruit, eft très-petite par rapport à la quantité a, on trouvera facilement que le moment d'impulsion de l'aîle eft

$$= abz \, cof. p \left(cc \, \overline{fin. p}^2 - \tfrac{2}{3} cz \, fin. p. cof. p + \frac{z^2 \, \overline{cof. p}^2}{4} \right).$$

Il eft bon de remarquer que fi en fuppofant $n = x = AF$, on trouve le moment d'impulsion de la partie $Lfcn$ pofitif, & qu'en retranchant ce moment du moment total de l'aîle, on trouve une quantité négative pour le moment d'impulsion de la partie reftante, il eft vifible que le plan $NLfD$ bien loin d'être frappé par le vent frappera l'air au contraire : ainfi il faut

faire la longueur de l'aîle demanière qu'il n'y en ait aucune partie qui ne reçoive l'impulsion de l'air & la terminer au point F, ou la quantité $c \, \text{fin.}\, p - v \cos. p$ devient $= 0$, ou bien faire ensorte que c soit toujours $> \frac{x z \cot. p}{a}$, ou du moins que $c = \frac{x z \cot. p}{a} = z. \cot. p = \frac{z}{\text{tang.}\, p}$, en faisant $x = a$: car si $c < \frac{x z. \cot. p}{a}$, la vîtesse relative de l'impulsion devient négative, & l'impulsion par rapport à la partie correspondante de l'aîle se change en répulsion.

113. PROBLEME. *Déterminer la construction d'un moulin à vent propre à produire le plus grand effet possible.* Soit AB la résistance que je considere comme un poids P appliqué au levier r, sa vîtesse sera $\frac{r z}{a}$. Donc l'effet de la machine sera $= \frac{P r z}{a}$. Mais parce que le moulin porte quatre aîles, nous aurons $\frac{P r z}{a} = 4 a b z. \cos. p \left(\frac{\overline{c.}^2 \, \overline{\text{fin.} p}^2}{2} - \frac{2 c z}{3} \times \right.$ $\left. \text{fin.}\, p. \cos. p + \frac{z^2 \, \overline{\cos. p}^2}{4} \right)$ (*) $= 4 a c^2 b z. \cos. p \times$

(*) Selon certains Auteurs l'action d'un fluide est égale au poids d'une colonne de fluide dont la hauteur seroit égale à celle dont un corps doit tomber pour acquérir la vîtesse du mobile, d'autres paroissent mieux fondés sur l'expérience en la faisant à-peu-près double. De sorte que selon ces derniers en supposant h cette hauteur, f la surface plane que le fluide frappe directement, m le poids d'un pied cube de fluide, $A f m h$ sera l'impulsion directe du fluide sur la surface f, en faisant $A = 2$, à-peu-près ; je pense que A est à-peu-près $= 1, 7$ quand il s'agit de l'eau.

$\overline{\mathit{sin}.\,p}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2z\,cot.\,p}{3c} + \frac{zz\,cot.\,p^2}{4cc}\right)$. Soit $\frac{z\,cot.\,p}{c} = y$, ou $\frac{z}{c} = y.\,tang.\,p$, on aura $\frac{Prz}{a} = 4a.\,byc^3\,\overline{\mathit{sin}.\,p}^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{2y}{3} + \frac{yy}{4}\right)$. Dont le *maximum* en regardant y comme variable, donne $\frac{1}{2} - \frac{4y}{3} + \frac{3y^2}{4} = 0$, d'où l'on tire $y = \frac{8 \pm \sqrt{10}}{9}$. Mais pour le *maximum* l'on doit avoir $y = \frac{z}{c}\,cot.\,p = \frac{8 - \sqrt{10}}{9}$ (voyez ce que nous avons dit sur les *maxima* & les *minima* dans le Calcul différentiel). Substituant cette valeur dans l'équation de l'effet de la machine, il viendra $\frac{Prz}{a} = abc^3.\left(\frac{68 + 5\sqrt{10}}{729}\right).\,\overline{\mathit{sin}.\,p}^3$. Donc le plus grand effet de la machine suit la raison triplée du sinus d'obliquité de l'aîle par rapport à l'axe du moulin qu'on doit toujours placer dans la direction du vent.

114. PROBLÊME. *Déterminer l'inclinaison des aîles par rapport à l'axe pour que le moulin produise le plus grand effet possible.* Si dans l'expression $\frac{yzxdx}{a}\,cos.\,p\left(c.\,\mathit{sin}.\,p - \frac{zx\,cos.\,p}{a}\right)^2 = \frac{bc^2z}{a}.\,x\,cos.\,p\,dx\left(\mathit{sin}.\,p - \frac{zx\,cos.\,p}{ac}\right)^2$, en faisant $y = b$, on considere z comme constant, & qu'on

faſſe $x\ cof.\ p \left(fin.\ p - \frac{z\,x.\ cof.\ p}{ac}\right)^2 = t$, la queſtion ſe réduit à chercher le *maximum* de $S\,t\,d\,x$. Mais $d\,t = d\,x\ cof.\ p \left(c\ fin.\ p - \frac{z\,x\ cof.\ p}{ac}\right)^2 - d\,x \times \frac{z\,x.\ cof.\ p}{ac} \cdot \left(fin.\ p - \frac{z\,x.\ cof.\ p}{ac}\right) - x\,d\,p.\ fin.\ p \left(fin.\ p - \frac{z\,x.\ cof.\ p}{ac}\right)^2 + x\,d\,p.\ cof.\ p \left(fin.\ p - \frac{z\,x.\ cof.\ p}{ac}\right) \times \left(2\ cof.\ p + \frac{2\,z\,x.\ fin.\ p}{ac}\right)$. De plus en ſuppoſant $d\,t = P\,d\,x + M\,d\,p$, dans le cas du *maximum*, la quantité M doit $= 0$ (*); donc $- x.\ fin.\ p \left(fin.\ p - \frac{z\,x.\ cof.\ p}{ac}\right)^2 + 2\,x.\ cof.\ p \times \left(fin.\ p - \frac{z\,x.\ cof.\ p}{ac}\right) \cdot \left(cof.\ p + \frac{z\,x.\ fin.\ p}{ac}\right) = 0$.

D'où l'on tire $fin.\ p \left(fin.\ p - \frac{z\,x.\ cof.\ p}{ac}\right) =$

(*) Cela eſt fondé ſur ce beau Théorême : P *étant une fonction finie, ſi* $d\,t = P\,d\,x + M\,d\,p$, M *ſera* $= 0$, *lorſque* $S.\,t\,d\,x$ *ſera un maximum.* A cauſe de $d\,t = P\,d\,x + M\,d\,p$, l'on a $t = S.\,P\,d\,x + S.\,M\,d\,p$, & $t\,d\,x = d\,x\,S.\,P\,d\,x + d\,x\,S.\,M\,d\,p$; d'où l'on tire $S.\,t\,d\,x = S.\,d\,x\,S.\,P\,d\,x + S.\,d\,x\,S.\,M\,d\,p$, Dont le *maximum* donne $t\,d\,x = 0 = d\,x\,S\,P\,d\,x + d\,x\,S.\,M\,d\,p$; donc $P\,d\,x + M\,d\,p = 0$. Or dans le cas du *maximum* $\frac{d\,x}{d\,p}$ eſt $= 0$; donc $\frac{d\,x}{d\,p} = - \frac{M}{P} = 0$; c'eſt pourquoi $M = 0$, parce que P eſt une quantité finie. Il eſt viſible d'ailleurs que l'équation $t\,d\,x = 0$, ſuppoſe $d\,x = 0$.

$\overline{2.\,cos.\,p}\left(cos.\,p + \frac{z x.\,sin.\,p}{ac}\right)$. Donc en divisant par $\overline{cos.\,p}^2$, l'on aura $\overline{tang.\,p}^2 - \frac{zx}{ac}\,tang.\,p = 2 + \frac{2zx}{ac}.\,tang.\,p$, & $tang.\,p = \frac{3zx}{2ac} + \sqrt{\left(2 + \frac{9zzxx}{4aacc}\right)}$.

On voit par là qu'à chaque distance x répond une inclinaison différente, & qu'ainsi l'aîle doit être courbe dans toute sa longueur, car x croissant, $tang.\,p$ augmente. Si l'on suppose $x = 0$, on aura $tang.\,p = \sqrt{2} = 1.414 = tang.\,54^\circ.\,44'$. Ainsi la plus petite inclinaison de l'aîle auprès de l'axe doit être de $54^\circ.\,44'$, tandis que la plus grande inclinaison de l'extrémité de l'aîle se détermine par $tang.\,p = \frac{3z}{2c} + \sqrt{\left(2 + \frac{9z^2}{4c^2}\right)}$, en supposant $x = a$.

Usage du calcul intégral dans la recherche des mouvemens qui dépendent d'une force accélératrice.

115. PROBLEME. *L'abscisse* AP *étant supposée représenter le tems, & l'ordonnée* PM *la vîtesse correspondante acquise par une force accélératrice, trouver l'espace parcouru* (*fig.* 91). Ayant mené l'ordonnée pm infiniment proche de PM, je fais $AP = t$, $PM = Z$, $Pp = dt$, l'élément $PMmp$ sera $= Z dt$. Mais parce que pendant le tems infiniment petit dt, le mouvement peut être regardé comme uniforme, l'espace parcouru pendant le tems dt sera comme le produit de ce tems par la vî-

teſſe Z, ou ſera $= Zdt = PMmp$; & $S.Zdt$ ou l'aire APM exprimera l'eſpace parcouru pendant le tems AP ou pendant le tems t.

COROLLAIRE. Si le mouvement eſt uniformément accéléré, c'eſt-à-dire ſi les ordonnées ſont proportionnelles aux abſciſſes, l'aire APM (fig. 91) deviendra un triangle (fig. 92). Donc ſi les abſciſſes ou les tems AP, AB, AD ſont dans le rapport des nombres naturels 1, 2, 3, les aires correſpondantes qui ſont comme les quarrés de ces abſciſſes, à cauſe des triangles ſemblables APM, ABC, ADN, feront comme les quarrés 1, 4, 9. En général les eſpaces parcourus par un mouvement uniformément accéléré (comme eſt celui des corps qui obéiſſent librement à l'action de la gravité auprès de la terre) ſont comme les quarrés des tems. Mais les vîteſſes ſont alors proportionnelles aux tems; puiſqu'une force conſtante doit communiquer une vîteſſe double, dans un tems double, une vîteſſe triple, dans un tems triple, &c. donc les corps qui obéiſſent librement à l'action de la gravité, parcourent des eſpaces proportionnels aux quarrés des tems & des vîteſſes; de ſorte que les vîteſſes & les tems ſont comme les racines des eſpaces.

Si l'on ſuppoſe $APM = 1$, $AB = 2.AP$, l'eſpace parcouru pendant le tems $2.AP$ ſera $= 4$. Donc l'eſpace parcouru pendant la ſeconde ſeconde doit être triple de celui qui a été parcouru dans la premiere ſeconde. Mais l'action de la force accéleratrice étant ſuppoſée uniforme, cette action ne peut faire parcourir à un corps pendant la ſeconde ſeconde. qu'un eſpace égal à celui qu'elle lui a fait parcourir pendant la premiere ſeconde; ainſi la vîteſſe acquiſe dans la premiere ſeconde eſt capable de faire parcourir pendant la ſeconde ſeconde un eſpace double de celui qui a été parcouru dans la premiere ſeconde. En général puiſque $DN = Aa$ repréſente la vîteſſe acquiſe pendant le tems AD, il eſt viſible qu'avec cette vîteſſe le mobile A parcouroit dans un tems AD un eſpace exprimé par $Aa \times AD$, c'eſt-à-dire, un eſpace exprimé par l'aire du parallelogramme $AaND$, tandis qu'il n'a parcouru pendant le même tems, qu'un eſpace moitié plus petit, exprimé par l'aire du triangle ADN, moitié du parallelogramme $ADNa$.

Dans cette même ſuppoſition de la force accélératrice conſtante, les eſpaces parcourus ſucceſſivement croîtront comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c. c'eſt-à-dire, que ſi le mobile parcourt dans un tems donné que j'appellerai un inſtant (*) un eſpace comme un, il parcourera dans le ſecond inſtant de ſon mouvement un eſpace comme 3, dans le troiſieme inſtant un eſpace comme 5, &c. En effet, en ſuppoſant $AP = PB = BD$, ſi l'eſpace $APM = 1$, l'eſpace ABC ſera $= 4$ & l'eſpace $ADN = 9$. Maintenant l'eſpace APM ayant été parcouru dans le premier inſtant, il eſt viſible que PMCB exprime l'eſpace parcouru au ſecond inſtant, & BCND l'eſpace parcouru au troiſieme inſtant. Or $PMCB = ABC - APM = 4 - 1 = 3$. De même $BCND = DAN - BAC = 9 - 4 = 5$. On prouvera par un raiſonnement ſemblable que l'eſpace parcouru au quatrieme inſtant doit être $= 7$, & ainſi de ſuite.

Mais parce que le mouvement des corps qui montent contre l'action de la gravité doit être retardé dans la montée de la même maniere qu'il a été accéléré dans la deſcente; car la cauſe retardatrice eſt la même que la cauſe accélératrice, les eſpaces parcourus en montant doivent être comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. pris dans un ordre renverſé, & ſi deux mobiles D & B remontent contre la gravité juſqu'à ce qu'ils ayent perdu toute leur vîteſſe en A, les eſpaces parcourus par ces mobiles, ſeront comme les triangles DNA, BCA, c'eſt-à-dire comme les quarrés des tems DA & BA.

116. PROBLEME. *Si* AB (*fig.* 91) *repréſentant l'eſpace parcouru par un mouvement accéléré, les ordonnées* AD, PQ *ſont comme les forces qui agiſſent dans les points* A, P *tandis que* PM *repréſente la viteſſe acquiſe par le*

(*) Selon ce que nous avons dit dans notre métaphyſique l'inſtant n'eſt autre choſe que la limite qui ſépare le tems paſſé du tems futur. Mais nous prenons ici ce terme dans un autre ſens, c'eſt-à-dire, que nous ſuppoſons que l'inſtant repréſente un tems déterminé.

mobile au point P, *trouver la vîtesse correspondante à chaque point de l'espace.* Soit PQ $= u$, AP $= r$, PM $= z$, la masse du mobile $= m$, on aura P$p = dr$. Mais la vîtesse pendant le tems dt employé à parcourir Pp pouvant être regardée comme uniforme, on aura $dr = z.dt$, $z = \frac{dr}{dt}$, & $dt = \frac{dr}{z}$. De plus la quantité de mouvement engendré pendant le tems dt sera $= mdz$, & parce que la quantité d'action qui répond au tems dt est égale à la force mouvante multipliée par le tems, on a $udt = mdz$, ou $dt = \frac{mdz}{u}$. Mais $dt = \frac{dr}{z}$; donc $= \frac{dr}{z} = \frac{mdz}{u}$, ou $udr = mzdz$, & S. $udr = \frac{1}{2} mzz = \frac{zz}{2}$ en supposant $m = 1$. Mais S. $udr =$ S. (PQqp) $=$ APQD. Donc si la masse est supposée constante, la moitié du quarré de la vîtesse & par conséquent le quarré de la vîtesse sera proportionnel à l'aire des forces APQD.

117. PROBLÊME. *Supposant que les forces* AD, PQ, *sont comme les distances* AC, PC, *au point* C, *trouver la vîtesse dans chaque point* P *de l'espace* (*fig.* 93). Puisque (par l'hypothèse) AD : PQ :: AC : PC, l'aire des forces ACD sera un triangle, & CD une ligne droite. Soit AC $= a$, AP $= x$, la force correspondante au point P $= u$, on aura PC $= a - x$, & parce que PQ est comme PC, on aura (par le problême précédent), en supposant toujours la vîtesse exprimée par z, S. $udx = \frac{zz}{2} =$

S. $(adx - xdx) = ax - \frac{xx}{2}$, ou $2ax - xx = zz$.

Mais si du centre C on décrit le quart de cercle AMB, PM sera $= \sqrt{(2ax - xx)} = z$. Donc si du centre C avec le rayon CA on décrit un quart de cercle par le point A où commence le mouvement, les vîtesses dans chaque point P compris entre C & A seront

comme les sinus des arcs correspondants du quart de cercle.

118. PROBLEME. *Dans cette même hypothese, on demande le tems de la descente le long de* AC, PC, *&c. jusqu'au point* C. Il est visible que $Pp = dx = z\,dt = dt\sqrt{(2ax - xx)}$, & par conséquent $dt = \frac{dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, équation que je désigne par (A). Mais les triangles PMC, nMm ayant leurs côtés perpendiculaires sont semblables & donnent PM : CM :: Mn : Mm, ou $\sqrt{(2ax - xx)} : a :: dx : Mm = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$; donc $\frac{Mm}{a} = \frac{dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = dt$, & $t = S.\frac{Mm}{a}$; c'est-à-dire si l'on suppose AP = AC, ou $x = a$, le tems t sera $= \frac{AMB}{a}$. Par la même raison si le mouvement commence au point P, le tems de la descente le long de PC $= b$ sera exprimé par $\frac{PHG}{b}$. Mais il est visible que le rapport du quart de la circonférence au rayon est le même dans tous les cercles; ainsi dans cette loi des forces, le mobile arrivera au point C dans le même tems, soit qu'il parte du point A, ou du point P.

Nous avons vu ci-dessus (51) que cette loi des forces a lieu pour les vibrations d'un pendule qui fait ses oscillations dans des petits arcs de cercle; donc les vibrations d'un tel pendule doivent être d'égale durée, quoiqu'elles ne soient pas égales.

119. PROBLEME. *Supposant que le mobile parcourt une droite* Aa (*fig.* 94) *qui ne passe pas par le centre* C *des forces, & que le mouvement commence au point* A, *trouver la vitesse dans chaque point* B *de l'espace.* Je mene la ligne CA au point A où commence le mouvement, la ligne CM perpendiculaire sur Aa, & je fais AM $= a$, CM $= b$, CB $= x$, pour avoir BM $= \sqrt{(xx - bb)}$. Soit u la force qui agit sur le mobile au point B dans

la direction C B, la décomposant en deux autres, l'une selon BM, l'autre selon Bc perpendiculaire à Ba & parallele à MC; il est visible que la force perpendiculaire à la ligne Aa sera détruite par le plan Aa, & que la seule force selon BM produira le mouvement Maintenant la force absolue, que je suppose exprimée par BC, sera à la force respective comme $BC : BM :: x : \sqrt{(xx - bb)}$. C'est pourquoi $x : \sqrt{(xx - bb)} :: u : \frac{u\sqrt{(xx - bb)}}{x}$, force respective qui produit le mouvement.

Soit $AB = AM - BM = a - \sqrt{(xx - bb)} = r$, on aura $dr = \frac{-xdx}{\sqrt{(xx - bb)}}$. C'est pourquoi si dans l'équation $S.udr = \frac{zz}{2}$ trouvée ci-dessus (116) à la place de la force qu'on a exprimée par u dans l'endroit cité, on substitue la force respective qui est ici $= \frac{u\sqrt{(xx - bb)}}{x}$, & qu'on mette $\frac{-xdx}{\sqrt{(xx - bb)}}$ à la place de dr, on aura $\frac{zz}{2} = S.(-udx)$; c'est-à-dire si l'on fait $CP = CB = x$, & qu'en prenant AC pour axe, on décrive la courbe des forces DQ dont les ordonnées QP représentent les forces centrales u, on aura au point B, $\frac{zz}{2} = ADQP$. Ainsi la vîtesse acquise au point B le long du plan incliné AB est égale à celle que le mobile auroit acquise en tombant verticalement le long de AP, pourvu que les points P & B soient également éloignés du centre, & que la loi des forces soit la même (voyez le n°. 116).

COROLLAIRE. Le mouvement sera donc accéléré depuis le point A jusqu'au point M, où la force accélérante BM s'évanouira. Depuis le point M le mouvement sera retardé en allant vers b, à cause de la force bM qui repoussera le mobile vers M, & à la distance

M a = M A, le mouvement sera totalement éteint. Ensuite le mobile reviendra de a en A par un mouvement accéléré depuis a jusqu'en M, & retardé depuis M jusqu'en A, & ainsi de suite; de sorte que s'il n'y avoit aucun obstacle ni de la part du plan ou du milieu, le mobile se mouveroit perpétuellement de A en a & de a en A.

120. PROBLEME. *Supposons que la force accélérante est constante, & qu'elle est dirigée vers le centre de la terre, on demande dans quel rapport la force respective qui pousse un mobile le long d'un plan incliné* A C *(fig. 95), est à la force verticale qui le pousseroit le long de* A B. Soit la force absolue (qui pousse le mobile m vers le centre de la terre) exprimée par M m parallele à A B, & décomposons cette force en deux autres, l'une M n perpendiculaire au plan A C, l'autre $m n$ = M N qui agit dans la direction m C; à cause des triangles M N m, A B C dont le côtés sont perpendiculaires & qui par conséquent sont semblables, on a la proportion M m : M N :: A C : A B, c'est-à-dire la force respective qui fait mouvoir le mobile m, le long du plan incliné est constante, & elle est à la force absolue qui la feroit mouvoir le long du plan vertical A B, comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.

COROLLAIRE. Si l'on mène B D perpendiculaire à A C, les triangles rectangles M N m, A B C, A D B seront tous semblables, & l'on aura M m : M N :: A C : A B :: A B : A D. Donc si A B représente la force verticale, A D représentera celle qui fait mouvoir le corps m le long du plan incliné; & parce que cette force est constante, les espaces A D, A C sont comme les quarrés des tems employés à les parcourir. Donc en appellant ces tems t & T, nous aurons $t\,t$: T T :: A D : A C, & t : T :: $\sqrt{AD}$: $\sqrt{AC}$. Mais parce que dans une proportion continue le premier terme est au troisieme comme le quarré du premier à celui du second, ou comme le quarré du second à celui du troisieme, la proportion A C : A B :: A B : A D, ou A D : A B :: A B : A C, donnera A D : A C :: $\overline{AD}^2$: $\overline{AB}^2$,

&

& $\sqrt{AD} : \sqrt{AC} :: AD : AB$. Donc $t : T :: AD : AB :: BA : AC$.

D'un autre côté les vîtesses acquises par des forces accélératrices constantes sont comme les produits des tems & des forces, ou en raison composée des tems & des forces; donc la vîtesse acquise le long du plan incliné AC est à la vîtesse qui seroit acquise par la chûte le long du plan vertical AB de même hauteur en raison composée de $AC : AB$ & de $AB : AC$, ou comme $AC \times AB : AB . AC :: 1 : 1$, ou en raison d'égalité.

Menons fg parallèle à Aa, & Bb perpendiculaire au même plan Aa. Si AB représente la force constante de la gravité auprès de la surface de la terre, AD & Ab représenteront les forces accélératrices le long des plans AC, Aa (ou fg). Et parce que ces forces sont en raison composée de AD à AB, ou de AB à AC & de Aa à AB ou de fg à fB, c'est-à-dire dans le rapport de $AB \times fg$ à $AC \times fB$ (car $AD = \frac{\overline{AB}^2}{AC}$, $Ab = \frac{\overline{AB}^2}{Aa}$; donc $AD : Ab :: Aa : AC$; mais à cause des triangles AaB, fgB, l'on a $Aa = \frac{AB . fg}{fB}$; donc $Aa : AC :: AB . fg : AC . fB$), il est évident qu'elles sont en raison directe des hauteurs des plans AB & fB & en raison inverse des longueurs AC & fg.

Puisque la force le long de AC est à la force le long de AB comme $AD : AB$, les espaces AD, AB seront parcourus en tems égaux: comme cela suit évidemment de ce qu'on a dit ci-dessus (118) Par la même raison l'espace Ab sera parcouru dans le même tems que AB. Si donc on mène les cordes AD, Ab (fig. 96) perpendiculaires aux cordes BD, Bb, ces cordes seront parcourues dans le même tems que le diamètre vertical AB, & par conséquent elles seront parcourues en tems égaux. Et si l'on suppose les cordes BN, BM respectivement égales, & par conséquent parallèles aux cordes AD, Ab, elles seront évidemment parcourues dans le même tems, puisqu'elles sont également inclinées à l'horison, d'où il suit que toutes les cordes qui aboutissent aux extrémités A & B d'un diamètre vertical sont parcourues en tems égaux.

La théorie que nous venons de développer peut servir à résoudre ce beau Problême : *Etant donnée une ligne* PB (*fig.* 97) *inclinée à l'horison, & un point* A *sur la verticale* BD, *trouver la ligne droite* AP *que doit suivre le mobile* A *pour arriver à la ligne* BP *dans le moindre tems possible.* Ayant mené AQ perpendiculaire sur BP, divisez l'angle DAQ en deux également par ligne PA, cette ligne sera le chemin qui doit suivre le mobile. Par le point P ou la ligne AP rencontre la ligne donnée BQ, menez PC parallèle à AQ ; les angles alternes internes QAP, APC seront égaux. Mais par construction, QAP = CAP ; ainsi APC = CAP & le triangle CAP est isocelle. C'est pourquoi si du point C pris pour centre avec le rayon CP on décrit un cercle, il passera par le point A ; & si l'on mène les lignes AM, elles seront plus grandes que les lignes correspondantes A*t*. Maintenant les cordes A*t*, AP sont parcourues en tems égaux ; donc le tems employé à parcourir AP sera plus court que le tems employé à parcourir AM ; & partant AP est la ligne droite le long de laquelle le mobile A arrivera le plus promptement à la ligne BP. Si DA est parallèle à QP, l'angle CAP sera de 45°.

121. PROBLEME. *Trouver la vîtesse qu'un mobile peut acquérir en descendant le long d'une courbe* AB (*fig.* 98). Soit A*m* la force qui pousse le mobile A selon la verticale A*b* ; comme ce corps ne peut pas suivre cette ligne, à cause de la courbe AM, je décompose cette force en AN perpendiculaire à la courbe, & AM que je considére comme un plan incliné. La force AN étant détruite par la résistance de la courbe, la seule force AM produira le mouvement, & selon ce qu'on a dit ci-devant, la vîtesse acquise le long de AM sera égale à la vîtesse acquise le long de la verticale A*m*, & comme on peut faire le même raisonnement pour tous les élémens de la courbe *a*AB, il s'ensuit que la vîtesse acquise le long de l'arc AB sera la même que celle que le mobile acquéreroit s'il tomboit de la hauteur A*b*.

On objectera peut-être que le mobile en choquant la courbe doit perdre un peu de sa vîtesse & qu'ainsi il ne peut avoir à la fin de sa chûte en B la même vîtesse qu'il auroit acquise en tombant le long de A*b*. Pour répondre à cette difficulté, je suppose que le mobile

ait déja parcouru l'arc A*a* (fig. 99), il eſt certain qu'il tend à continuer ſon mouvement le long de ſa ligne *ag* tangente de la courbe. Il eſt donc évident que le mobile fera un effort que je repréſente par *ag*, pour parcourir cette ligne. Ayant décompoſé la force *ag* en *a*D perpendiculaire à la courbe & *af* = *g*D qui repréſente la force reſtante, l'angle *fag* = *ag*D ſera infiniment petit, puiſque la tangente s'éloigne infiniment peu de la courbe; & parce que dans un triangle quelconque les ſinus des angles ſont comme les côtés oppoſés à ces angles, le côté *ag* ſera au côté *a*D comme le rayon eſt au ſinus d'un angle infiniment petit, ou comme 1 : $\frac{1}{\infty}$. De même *g*D ſera infiniment plus grande que *a*D; c'eſt-à-dire que *a*D eſt une quantité infiniment plus petite que la vîteſſe *ag* ou D*g*. Maintenant pour ſavoir de combien *ag* eſt plus grande que *af* ou D*g*, du point *g* comme centre avec le rayon *ag*, je décris l'arc *an* juſqu'à la rencontre du prolongement de *g*D. Il eſt viſible que l'angle *na*D eſt infiniment petit; car l'angle *a*D*n* eſt droit & l'angle *an*D, en conſidérant l'arc *na* comme une ligne droite, ne peut différer qu'infiniment peu d'un angle droit; donc le côté D*n* eſt infiniment plus petit que *a*D. Mais *a*D eſt infiniment plus petit que *ga*. Donc ſi *ga* repréſente une quantité finie, *a*D ſera un infiniment petit du premier ordre, & D*n* un infiniment petit du ſecond ordre; de ſorte que les quantités *ag*, *af* ne différent que d'une quantité infiniment petite du ſecond ordre, qui répétée une infinité de fois, c'eſt-à-dire autant de fois qu'il y a d'arcs infiniment petits dans la courbe A B, ne peut produire qu'un infiniment petit du premier ordre. Donc la vîteſſe acquiſe le long de A B ne peut différer de la vîteſſe acquiſe le long d'un plan vertical de même hauteur que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle; donc ces vîteſſes doivent être ſuppoſées égales.

Si l'on ſuppoſe que les élémens N*n*, M*m* (fig. 100) appartiennent à des arcs de cercle ſemblables N B, M*b*, & que ces élémens ſont dans le rapport de ces arcs, on pourra les conſidérer comme des plans également inclinés à l'horiſon & dont les longueurs ſont comme les quarrés des tems employés à les parcourir. La même choſe aura lieu dans tous les autres élémens des arcs N B, M*b*;

de sorte que ces arcs seront parcourus dans des tems proportionnels aux racines de leurs longueurs, parce que les vîtesses acquises le long de Nn & Mm sont comme les racines des longueurs Nn & Mm & par conséquent proportionnelles aux vîtesses qui auront lieu (par l'action de la gravité) dans les élémens suivans & semblables nD, mC, & ainsi de suite. Donc les tems employés à parcourir les arcs semblables NB, Mb sont comme les racines des longueurs de ces arcs, ou comme les racines des rayons AB, ab.

Si NB & Mb sont supposés deux arcs semblables de deux paraboles désignées par les équations $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, qui sont des courbes semblables, & qu'on prenne les abscisses BP, bp dans le rapport des paramètres a & b, les arcs NB & Mb seront dans le même rapport, & les tems employés à parcourir NB & Mb seront comme les racines des paramètres. Ainsi si $a = 25b$, ces tems seront comme $5:1$.

Des cordes vibrantes.

122. Nous supposerons que les cordes sont d'un très-petit diamètre d'une grosseur uniforme, de même matiere; ce n'est pas qu'on ne puisse comparer les tems des vibrations des cordes de différente matiere; mais il faut alors connoître par expérience l'élasticité de chacune; car les forces élastiques de l'acier trempé, de l'or, de l'argent, &c. ne suivent pas la raison des gravités spécifiques de ces matieres. Nous supposerons encore que les vibrations, sont très-petites & telles qu'elles ont lieu dans les cordes de violon ou de basse par l'action de l'archet.

123. PROBLEME. *Trouver le rapport des tems des vibrations fort petites quoiqu'inégales d'une même corde* AB. (*fig.* 101). Si une force M fléchit cette corde de maniere que le point M parvienne jusqu'en D, la force élastique de cette corde pourra être supposée proportionnelle à la ligne MD; si le point M parvient en m, la force restituante sera censée proportionnelle à la ligne Mm. Donc les espaces que les parties de la corde auront à parcourir pour arriver à la ligne horisontale

A M B feront comme les forces qui font parcourir ces efpaces. Donc, felon ce qu'on a dit ci-deffus (118), ces efpaces feront parcourus dans le même tems; c'eft-à-dire que les vibrations très-petites d'une même corde fe feront en tems égaux, quoiqu'elles foient inégales.

124. PROBLEME. *Trouver le tems des vibrations de deux cordes* A B, *a b qui ne different que par la longueur.* Suppofons que la premiere corde foit neuf fois plus grande que la feconde; il eft vifible que fi une force N peut fléchir la corde *a b* à la profondeur N *n* comme 1, la même force pourra fléchir la corde A B à une profondeur M *m* que je fuppoferai = 9. N *n*. En effet la force élaftique de A B ne peut faire équilibre à la puiffance fléchiffante que lorfque les parties de la corde A B feront autant écartées les unes des autres que le font les parties correfpondantes de la corde *ab*, c'eft-à-dire qu'il eft néceffaire, pour que la force reftituante foit la même dans les deux cordes, que les allongemens des cordes foient comme les longueurs des cordes, & que les angles A *m* B, *a n b* foient égaux; donc les triangles ifocelles & femblables A *m* B, *n a b* ont leurs hauteurs M *m*, N *n* proportionnelles aux bafes A B & *ab*, ou ce qui revient au même, les inflexions produites par la même force font comme les longueurs des cordes.

Concevons à préfent les efpaces M *m*, N *n* divifés en un grand nombre d'élémens infiniment petits, de maniere que chaque élément de M *m* fait à chaque élément de N *n* comme M *m* : N *n*, & cherchons le rapport des tems employés à parcourir chacun de ces élémens. Il eft vifible d'abord que la force reftituante en *m* eft la même que la force reftituante en *n*, & qu'en fuppofant *m* T = 9 *n t*, la force reftituante en T fera la même que la force reftituante en *t*, puifque dans ce cas M T fera = 9. N *t*, & ainfi de fuite pour tous les autres élémens de M *m* & de N *n*; maintenant foit A = *m* T, *a* = *n t*; & confidérons la force reftituante comme étant uniforme pendant le tems employé à parcourir les premiers élémens A & *a*.

Faifons encore attention que A étant = 9. *a*, la même force qui peut faire parcourir un efpace comme un à

la masse b de la premiere corde ab ne peut faire parcourir qu'un espace comme $\frac{1}{9}$ à la seconde corde $AB = B = 9.b$; mais une force accélératrice constante qui peut faire parcourir un espace comme $\frac{1}{9}$ dans un tems comme un, fera parcourir un espace $= 1$, dans un tems comme 3, & un espace $= 9$ dans un tems comme 9 ; ainsi le premier élément A sera parcouru dans un tems comme 9. La vîtesse acquise à la fin de la description du premier élément étant la même de part & d'autre ; elle fera parcourir $2A = 18.a$ dans un tems $= 9$ à la grande, & $2a$ dans un tems comme 1 à la plus courte corde. La nouvelle force que je fais $= f$, fera parcourir l'élément c dans la plus courte corde, & un élément $9c$ dans la plus longue, mais dans un tems neuf fois plus grand : & parce que $2A + 9c = 9(2a + c)$, les nouveaux élémens seront parcourus dans des tems proportionnels aux longueurs des cordes. Par un raisonnement semblable on prouvera que toutes les parties correspondantes des espaces Mm, Nn sont parcourues dans des tems proportionnelles aux longueurs des cordes. C'est pourquoi le tems des vibrations entieres seront comme les longueurs des cordes.

125. PROBLEME. *Si les deux cordes* AB *&* ab *(fig. 102) sont supposées tendues par des poids égaux, de même longueur, mais de différens diamètres, quel sera le rapport des tems de leurs vibrations.* Si le diamètre de la premiere corde est $= 2R$, & celui de la seconde $= 2r$, ces diamètres seront comme $R:r$. Supposons $R = 9r$, la premiere corde pourra être conçue comme composée de neuf cordons dont chacun sera égal à la seconde corde & supportera la neuvieme partie du poids tendant P ; de sorte qu'il sera neuf moins tendu que la corde ab ; mais quoique chaque cordon résiste neuf moins à la force flexissante, les neuf cordons ensemble opposeront une résistance égale à celle de la corde ab, & les deux cordes seront flexies à la même profondeur par l'action de la même force.

Cela posé, concevons les lignes Mm, Nn qui dans le cas présent doivent être supposées divisées en un même nombre d'élémens. Puisque chaque cordon de la corde AmB est neuf moins tendu que la corde anb, la force relative qui fera parcourir le premier élément de Mm

sera à celle qui fait parcourir le premier élément de N *n* comme 1 : 9. Donc si le premier élément de N *n* est parcouru dans un tems comme 1, le premier élément de M *m* sera parcouru dans un tems comme 3: En effet si nous concevons cet élément comme composé de neuf parties égales, la force $\frac{1}{9}$ qu'on doit regarder comme constante pendant que le premier élément est parcouru, faira parcourir la premiere partie dans un tems comme 1, & les neuf parties pendant un tems comme 3, parce que les espaces sont comme les quarrés des tems, lorsque la force est constante. La force qui agit pour faire parcourir le second élément de M *m* est composée de deux parties, l'une qui peut faire décrire dans un tems triple un espace double du premier élément, & l'autre qui peut faire parcourir dans le même tems un autre espace que j'appellerai *a*. De même dans la seconde corde, la force qui agit au commencement du second élément de N *n* est composée de deux parties dont l'une peut faire parcourir dans un tems comme 1 un espace double du premier élément de N *n* ou M *m*, l'autre qui pendant le même tems peut faire décrire un espace qui est évidemment = *a*. Donc les seconds élémens de M *m* & de N *n* sont parcourus par des forces qui sont entr'elles comme 1 & 9 & comme d'ailleurs ces élémens sont supposés égaux de part & d'autre, ils doivent être parcourus dans des tems qui soient entr'eux comme 3 : 1, ou comme les diamètres des cordes. On prouvera par un raisonnement semblable que les élémens suivans de M *m* & de N *n*, & par conséquent M *m* & N *n* doivent être parcourus dans des tems qui soient dans le rapport des diamètres; & parce qu'il est facile de voir que cela arrivera de même, quelle que soit la grosseur des cordes, on peut dire en général que les tems des vibrations des cordes homogènes de même longueur & tendues par des poids égaux, sont comme les diamètres de ces cordes.

126. PROBLEME. *Si les cordes* A B *&* *ab* *sont supposées également grosses & également longues; mais tendues par des poids différens* P *&* *p*, *quel sera le rapport des tems de leurs vibrations*? Supposons P = 9. *p*, la même force qui flexira la corde A B à une profondeur comme 1 pourra flexir *ab* à une profondeur comme 9, car *ab* étant neuf

moins tendue n'opposera une résistance capable de faire équilibre avec la force flexissante que lorsque N*n* sera $= 9.$ M*m* ; parce que dans les petites inflexions des cordes médiocrement tendues, telles qu'on le suppose ici, la force de l'élasticité est proportionnelle à la grandeur de l'inflexion ; par conséquent en divisant N*n* & M*m* en un même nombre d'élémens inégaux, mais cependant tels que chaque élément de N*n* soit neuf fois plus grand que l'élément correspondant dans M*m*, le premier élément de M*m* sera parcouru dans un tems comme 1, tandis que le premier élément de N*n* sera parcouru par l'action d'une force égale, dans un tems comme 3, & en raisonnant comme dans la solution de l'avant dernier problême, on verra que toutes les parties correspondantes de N*n* & de M*m* sont parcourues dans des tems proportionnels aux racines des longueurs de ces parties ou proportionnels aux racines de N*n* & M*m*, ou dans des tems qui seront en raison inverse des racines des poids tendans.

127. PROBLEME. *Trouver le rapport des tems des vibrations de deux cordes* AB, *ab de différentes longueurs & grosseurs, & tendues par des poids différens.* Soit L la longueur de AB, M son diamètre & P le poids qui la tend, *l* la longueur de *ab*, *m* son diamètre & *p* le poids tendant. Il est visible par les trois théorêmes précédents que le tems T d'une vibration de la corde AB est au tems *t* d'une vibration de *ab* en raison composée de la directe des diamètres, des longueurs, & en raison inverse des racines des poids tendants. De sorte que $T : t :: \frac{M L}{\sqrt{P}} : \frac{m\sqrt{l}}{\sqrt{p}} :: M.L.\sqrt{p} : ml.\sqrt{P}$.

Si $T = t$, on aura $M.L.\sqrt{p} = m\,l.\sqrt{P}$. Enfin les nombres des vibrations étant en raison inverse des tems employés à faire chaque vibration, ou étant comme $\frac{1}{T} : \frac{1}{t}$, seront comme $\frac{\sqrt{P}}{M.L} : \frac{\sqrt{p}}{m\,l}$.

Maintenant si les forces élastiques représentées par les poids tendants sont les mêmes, les longueurs & les grosseurs égales, mais les masses ou les solidités des

cordes différentes, il eft vifible que la même force ne fera pas parcourir aux cordes des efpaces égaux en tems égaux.

Soit fuppofée *m* la maffe ou folidité d'une des cordes, N = 9. *m* la folidité, ou la maffe de la feconde corde; & fuppofant qu'elles foient flexies à une profondeur comme 1. Si dans un tems comme 1, la premiere corde parcourt l'efpace 1, la feconde ne parcourera évidemment que l'efpace $\frac{1}{9}$ dans le même tems; & parce que nous pouvons fuppofer que l'action du poids tendant eft uniforme pendant la durée de la reftitution de la corde, cette feconde corde parcourera dans le fecond inftant égal au premier un efpace = $\frac{3}{9}$, & dans le troifieme inftant un efpace = $\frac{5}{9}$; ainfi elle parcourera un efpace comme 1 dans un tems comme 3. On prouvera par un raifonnement femblable que les tems des vibrations des cordes font toujours comme les racines des folidités M, *m* de ces cordes. En général fi les longueurs de deux cordes font L & *l*, les folidités M & *m*, les poids tendants P & *p* les tems des vibrations feront comme $\frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{P}} : \frac{\sqrt{lm}}{\sqrt{p}}$, & le nombre des vibrations d'une corde fera toujours comme $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{LM}}$.

Si l'on fuppofe que les poids tendants de deux cordes métalliques, homogênes & femblables A & B, lorfqu'elles font fur le point de fe rompre font en raifon directe des folidités & en raifon inverfe des longueurs, les nombres des vibrations dans le même tems feront comme $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{L}.\sqrt{LM}} : \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{l}.\sqrt{lm}} :: l : L$; & parce que dans les cordes ou cylindres homogênes & femblables, les longueurs font comme les racines cubes des folidités, l'on aura $L : l :: \sqrt[3]{M} : \sqrt[3]{m}$. Donc les nombres des vibrations dans le même tems feront en raifon inverfe fous-triplée des folidités, & fi l'on fuppofe que les cylindres femblables, les parallelipipedes femblables, les cloches femblables, &

homogênes sont composées d'un égal nombre de fibres ou cordes semblables aussi tendues qu'il est possible sans se rompre, l on pourra dire que les vibrations fort petites des solides semblables & homogênes sont dans le même tems, en raison inverse sous-triplée de leurs poids ou de leurs solidités.

Méthode pour mesurer la hauteur des lieux par le moyen du baromètre.

128. *Les Physiciens ont trouvé par expérience que l'air se comprime en raison des poids dont il est chargé, de maniere que les volumes auxquels il peut être réduit sont sensiblement, du moins auprès de la terre, en raison inverse des poids dont il est chargé.* Dans un tube de verre *a b c* (fig. 103) dont la branche *a g* soit d'environ quarante pouces & dont la branche *b c* soit par-tout de même diamètre & fermée hermétiquement, faites couler du mercure jusqu'à ce que la capacité *b n* la plus basse soit remplie, & ayant appliqué une échelle sur la branche *c b*, observés le nombre des divisions depuis la ligne horisontale *b n* jusqu'en *c*, je suppose que ce soit 10 pouces. Versez du mercure dans la branche *a g* jusqu'à ce que l'excès de la hauteur du mercure au-dessus de la ligne horisontale *g f* qui passe par la surface du mercure contenu dans *b c* soit d'environ 27 pouces & demi ; l'air qui occupoit toute la partie *b c*, n'en occupera plus que la moitié. Si on continuoit de verser du mercure dans la branche *a g* (qu'il faudroit supposer assez longue) jusqu'à ce que la hauteur du mercure dans cette branche audessus la ligne *g f* fût double, ou triple ou quadruple de 27 pouces & demi, l'air restant n'occuperoit que le tiers ou le quart de *b c*, & ainsi de suite.

Mais lorsqu'il n'y avoit du mercure que dans la capacité inférieure *b n*, l'air contenu dans *c b* étoit chargé du poids de toute l'atmosphère, poids équivalent à une colonne de mercure d'environ 27 pouces & demi de hauteur. Donc puisqu'en ajoutant une colonne de mercure de même hauteur on a chargé cet air d'un poids double, & que son volume est devenu deux fois plus petit, les volumes auxquels on peut réduire l'air sont sensiblement en raison des poids comprimants.

COROLLAIRE. Les densités de l'air sont proportionnelles aux poids qui le compriment.

129. Supposons que le poids total de l'atmosphère soit représenté par A = 348 lignes de mercure, le poids B qui pese sur la tranche la plus basse, que je nommerai premiere, sera = 347 lignes de mercure. Soit C le poids qui pese sur la seconde tranche, D celui qui pese sur la troisieme, &c. Il est visible que A — B sera le poids de la premiere de ces tranches (que je suppose d'une même épaisseur assez petite); donc A — B (poids de la premiere tranche) : B (poids qui comprime cette tranche) : : B — C (poids de la seconde tranche) : C (poids qui la comprime); & de même B — C : C : : C — D : D; donc A — B + B : B : : B — C + C : C, ou A : B : : B : C, & par la même raison B : C : : C : D Donc ∺ A : B : C : D : &c. c'est-à-dire que les poids A, B, C, &c. sont en progression géométrique, & par conséquent les densités des tranches de l'air (que nous supposons d'une très-petite épaisseur) sont aussi en progression géométrique décroissante. Donc si on observoit le barometre entre chacune de nos tranches depuis le bas de l'atmosphère, les hauteurs seroient proportionnelles aux poids A, B, C, D, &c. & elles seroient en progression géométrique. Et puis A = 348, & B = 347, en multipliant chaque terme par $\frac{347}{348}$, on aura le suivant. D'un autre côté comme les tranches d'air comprises entre les points ou cette suite de hauteurs du mercure seroient observées sont d'égale épaisseur, les sommes de ces tranches, ou les hauteurs des colonnes d'air qui en seroient successivement formées seroient en progression arithmétique; mais les logarithmes, comme tout le monde le sçait, sont aussi des nombres en progression arithmétique. De plus, les différences des hauteurs des colonnes d'air correspondantes aux différences de hauteur du mercure dans le baromètre sont égales quand les hauteurs du mercure sont en progression géométrique, comme les différences des logarithmes de deux termes d'une progression géométrique sont toujours égales à la somme des différences égales des termes intermédiaires correspondants; donc les différences de hauteur de l'air suivent la même loi que les différences des logarithmes

des hauteurs du mercure, & leur sont par conséquent proportionnelles.

Dans la table des logarithmes avec 7 décimales, la différence des logarithmes des nombres 348 & 347 est 12497 (on ne fait pas attention aux décimales) mais par une certaine température, l'épaisseur de la couche d'air interceptée entre deux stations, à l'une desquelles le mercure se tiendroit dans le baromètre à 348 lignes, tandis qu'il ne se tiendroit à l'autre qu'à 347 lignes, cette épaisseur, dis-je, a été trouvée de 12. 497 toises; & selon ce qu'on vient de dire, la même différence regne entre toutes les différences des logarithmes des hauteurs du mercure & les épaisseurs des couches d'air. Donc pour une température déterminée les différences des logarithmes des hauteurs du mercure, donnent immédiatement en milliemes de toise, la différence des hauteurs des lieux où l'on a observé le baromètre.

Mais on sent bien que cette épaisseur ne peut pas être la même lorsque la température sera différente, & que la chaleur différente de différens lieux dans lesquels on observe le baromètre doit causer quelque dérangement à la loi dont on vient de parler. Il a donc fallu chercher un moyen de connoître les effets de la chaleur sur l'air & sur le mercure même.

130. SOIT a le nombre des demi-degrés d'un thermomètre dont on donnera plus bas la construction, observés en + & en —, c'est-à-dire au-dessus & au-dessous du point zero, b la hauteur du mercure dans le baromètre observée à une certaine station, c sa hauteur observée au même moment à une station plus basse, la regle que M. de Luc employe pour avoir en toises la différence de hauteur des deux stations, se réduit à cette formule $\frac{L.c - L.b \pm \frac{(L.c - L.b).a}{1000}}{1000}$, dans laquelle L désigne des logarithmes tabulaires. On se sert du signe + lorsque la chaleur est au-dessus de zero & du signe —, lorsqu'elle est au-dessous; au point zero la quantité a étant $=0$, la formule devient $\frac{L.c - L.b}{1000}$.

Mais n'y a-t-il pas apparence que les exhalaiſons & les vapeurs de l'air ſont tantôt plus tantôt moins élaſtiques, & que l'air eſt ſujet à des mélanges qui rendent ſon élaſticité variable auſſi bien que ſa denſité ? D'ailleurs dans les régions ſupérieures de l'air & à une certaine hauteur, les vapeurs n'ayant pas la même denſité, n'influeront pas ſur l'élaſticité & le reſſort de l'air comme dans les régions baſſes de l'atmoſphère. Il ſeroit donc important de trouver un moyen ſûr de faire une correction à la formule générale, relativement à cette cauſe.

Je penſe cependant que ſi l'on avoit deux Obſervateurs dont l'un obſervât un baromètre & un thermomètre, tels que ceux dont on a parlé ci-devant à des inſtans convenus, tandis qu'un Voyageur obſerveroit aux mêmes inſtans un baromètre & un thermomètre ſemblables, on pourroit meſurer avec aſſez d'exactitude les différences des hauteurs des différens lieux aſſez éloignés & niveller une route. On pourroit auſſi meſurer avec aſſez de facilité la hauteur des différentes villes de l'Europe relativement au niveau de la mer ; il ſuffiroit d'avoir un Obſervateur dans chaque ville & de convenir du moment des obſervations, qu'il faudroit répéter un certain nombre de fois, & l'on prendroit un milieu entre les réſultats de ces obſervations. On doit éviter les obſervations faites au lever de l'aurore ; les plus favorables ſont celles qu'on fait pendant la moyenne chaleur du matin, qui correſpond à la cinquieme partie du tems pendant lequel le ſoleil doit demeurer ſur l'horiſon. Il y a apparence que dans cette partie du jour la denſité de l'air eſt plus exactement telle que l'exige la température, c'eſt-à-dire, qu'on eſt éloigné de ces momens où pour l'ordinaire il ſe fait des condenſations ou des dilatations ſubites qui troublent la loi générale. Peut-être auſſi que le terrein n'étant pas échauffé, comme il l'eſt plus tard, les exhalaiſons & les réverbérations de chaleur n'agiſſent pas encore auſſi puiſſamment pour altérer l'effet des loix générales. Les obſervations faites à huit heures du matin, à une heure après midi, & à dix heures du ſoir, méritent auſſi quelque confiance ; mais on doit avoir ſoin d'ex-

des hauteurs du mercure, & leur sont par consé
proportionnelles.

Dans la table des logarithmes avec 7 décimal
différence des logarithmes des nombres 348 & 3
12497 (on ne fait pas attention aux décimales) ma
une certaine température, l'épaisseur de la couch
interceptée entre deux stations, à l'une desquel
mercure se tiendroit dans le baromètre à 348 li
tandis qu'il ne se tiendroit à l'autre qu'à 347 lignes,
épaisseur, dis-je, a été trouvée de 12. 497 t
& selon ce qu'on vient de dire, la même diff
regne entre toutes les différences des logarithm
hauteurs du mercure & les épaisseurs des couche
Donc pour une température déterminée les diffé
des logarithmes des hauteurs du mercure, donn
médiatement en milliemes de toise, la différen
hauteurs des lieux où l'on a observé le baromèt

Mais on sent bien que cette épaisseur ne p
être la même lorsque la température sera différ
que la chaleur différente de différens lieux dans l
on observe le baromètre doit causer quelque d
ment à la loi dont on vient de parler. Il a d
chercher un moyen de connoitre les effets de l
leur sur l'air & sur le mercure même.

130. SOIT *a* le nombre des demi-degrés d
momètre dont on donnera plus bas la con
observés en + & en —, c'est-à-dire au-d
dessous du [illegible] zero, *b* la hauteur du
le barom[illegible] [illegible]vée à une certaine sta
teur obs[illegible] [illegible]ême moment à une sta
la [illegible] [illegible] Luc employe pour
la d[illegible] [illegible]hauteur des deux s

$L.c — L.b \pm$ (L. [illegible]

à cause du rapport des
est ici question, & de
chaleur, on prendra la
représentera des demi-
les stations le thermomètre
ntre, la somme — 4 indi-
de la hauteur trouvée à
uteur réelle. Ainsi dans la
a désigne la somme des de-
mètres aux deux stations. A
n ne fait pas attention aux
exemple que si la hauteur
ligne dans une station & de
a la différence entre 2.518514
logarithmes de ces nombres
es, comme si c'étoit des nom-
41393, différence des loga-

garithmes qui ont 7 décima-
alors des toises; donc en se
qui n'ont que 6 décimales, il
itude ajouter un zero à la fin
. Dans le cas dont on vient de
zero à la différence 41393 pour
nt par 1000, le quotient 413.930
de hauteur en toises, en sup-
mètre indique zéro.

ué que par une augmentation de cha-
ire monter le thermomètre depuis le
lée jusqu'à celui de l'eau bouillante, la
mètre étant à vingt-sept pouces envi-
de six lignes ou de $\frac{26}{16}$ de ligne. C'est
visant en 96 parties égales, l'intervalle
l'eau bouillante & l'eau dans la glace sur
chacune de ces parties correspondra
Il est à propos d'employer les ther-
cure, afin que leurs changemens soient
mes qu'il est possible à ceux que la cha-
ne dans les baromètres. Le zero dans le
dont nous parlons ici & qui doit accom-
mètre, c'est-à-dire être suspendu à côté

poser au vent & au soleil, autant qu'il est possible, le thermomètre dont on se servira, on doit employer un baromètre qui ait été purgé d'air par le feu, & avoir soin de le secouer avant l'observation, afin d'empêcher l'effet de l'adhésion du mercure par rapport au tube de l'instrument.

131. LE thermomètre dont s'est servi M. de Luc est de mercure, son tube est très-capillaire, & le diamètre extérieur de sa boule n'a que trois lignes. L'échelle est divisée en 186 parties égales ou degrés, le point o est regardé comme le point fixe de chaleur. L'eau bouillante correspond à + 147 dans l'échelle & l'eau dans la glace, à — 39; de sorte que o répond à 39. Les degrés de ce thermomètre ont une grandeur telle que lorsque la chaleur de l'air est au zero, la différence des logarithmes des hauteurs du mercure exprime en milliemes de toise la différence des hauteurs des lieux où le baromètre a été observé, tandis qu'aux environs du point zero du thermomètre, un degré de ce thermomètre répond à $\frac{1}{500}$, & un demi-degré à un $\frac{1}{1000}$ de changement dans le volume de l'air, en exprimant ce volume par 1000. L'opération à faire pour ramener les expériences à une température fixe est bien simple par ce moyen; il suffit de multiplier la hauteur trouvée, ou la différence des logarithmes des hauteurs du mercure exprimées en lignes, par le double des degrés indiqués sur le thermomètre & de diviser ensuite par 1000. Ainsi nommant H la hauteur du lieu, D la différence des logarithmes des hauteurs du mercure, g les degrés observés, h la hauteur que fournit le baromètre, la correction sera $\pm \frac{h.2g}{1000}$, & la hauteur sera $h \pm \frac{2gh}{1000} = H$, le signe + a lieu si les degrés indiqués par le thermomètre sont en plus, & le signe — si ces degrés sont au-dessous de zero.

Si dans une station les degrés du thermomètre étoient + 20 & dans l'autre station + 12, on ajouteroit ces degrés, pour avoir 32, dont la moitié 16 indiqueroit

la température moyenne. Mais à cause du rapport des degrés du thermomètre dont il est ici question, & de la correction à faire pour la chaleur, on prendra la somme entiere 32 & ce nombre représentera des demi-degrés. De même si à l'une des stations le thermomètre marquoit + 6 & — 10 à l'autre, la somme — 4 indiqueroit autant de milliemes de la hauteur trouvée à retrancher pour avoir la hauteur réelle. Ainsi dans la formule générale ci-dessus, *a* désigne la somme des degrés indiqués par les thermomètres aux deux stations. A l'égard des logarithmes, on ne fait pas attention aux décimales, c'est-à-dire, par exemple que si la hauteur du baromètre est de 330 ligne dans une station & de 300 dans l'autre, on prendra la différence entre 2.518514 & 2.477121 qui sont les logarithmes de ces nombres exprimés avec six décimales, comme si c'étoit des nombres entiers pour avoir 41393, différence des logarithmes.

M. de Luc se sert des logarithmes qui ont 7 décimales & le quotient donne alors des toises; donc en se servant de logarithmes qui n'ont que 6 décimales, il faudra pour plus d'exactitude ajouter un zero à la fin de la différence trouvée. Dans le cas dont on vient de parler j'ajouterois un zero à la différence 41393 pour avoir 413930, & divisant par 1000, le quotient 413.930 donneroit la différence de hauteur en toises, en supposant que le thermomètre indique zéro.

132. ON a remarqué que par une augmentation de chaleur capable de faire monter le thermomètre depuis le point de la glace pilée jusqu'à celui de l'eau bouillante, la hauteur du baromètre étant à vingt-sept pouces environ, augmentoit de six lignes ou de $\frac{96}{16}$ de ligne. C'est pourquoi en divisant en 96 parties égales, l'intervalle compris entre l'eau bouillante & l'eau dans la glace sur le thermomètre, chacune de ces parties correspondra à $\frac{1}{16}$ de ligne. Or il est à propos d'employer les thermomètres de mercure, afin que leurs changemens soient le plus conformes qu'il est possible à ceux que la chaleur occasionne dans les baromètres. Le zero dans le thermomètre dont nous parlons ici & qui doit accompagner le baromètre, c'est-à-dire être suspendu à côté

de lui, est placé à la 12 division; de sorte que l'eau à la glace, répond à -12, & l'eau bouillante à $+84$. Si on avoit un thermomètre dont l'échelle ne fût que de 80 parties il feroit facile de trouver à quelle partie de l'échelle de ce thermomètre doit répondre un degré observé sur celui dont on vient de parler & réciproquement.

Supposons deux baromètres tels que celui dont on vient de parler, placés l'un au sommet d'une montagne où le mercure se soutient à $13\frac{1}{2}$ pouces, par exemple, & l'autre au pied de la montagne ou le mercure se soutient à 27 pouces Si les thermomètres qui accompagnent les baromètres sont à 0, il n'y a point de correction à faire pour cette température d'air; mais s'ils sont tous deux à -16, on ajoutera $\frac{16}{16}$ de ligne ou une ligne à la hauteur observée du baromètre placé au pied de la montagne. A l'égard de celui qui est placé au sommet il sera facile de trouver ce qu'il faut ajouter à la hauteur du mercure, en faisant cette regle de trois $27 : \frac{16}{16} :: 13\frac{1}{2} : x = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ ligne. Ainsi il faudra ajouter une demi-ligne à la hauteur du mercure dans ce baromètre.

Si les degrés de ces thermomètres étoient en $+$, on feroit les soustractions dans le même ordre, tant pour les températures égales, que pour celles qui sont différentes; & de cette maniere, on ramenera les températures à un terme fixe, ce qui produira le même effet que si les condensations du mercure étoient toujours les mêmes. En général la hauteur du mercure dans le baromètre étant d'environ 27 pouces, on ajoutera autant de $\frac{1}{16}$ de ligne que le thermomètre indiquera de degrés au-dessous de zero, & on retranchera autant de $\frac{1}{16}$ de ligne qu'il indiquera de degrés au-dessus de zéro.

EXEMPLE. Supposons que la hauteur du mercure dans le baromètre soit de 311 lignes, le degré du thermomètre qui l'accompagne, & qu'il est bon de placer vers le milieu de sa longueur étant $= +20$, vous ferez la regle suivante 27 pouces $=$ 324 lignes : 311 :: $+20 : x = 19 + \frac{64}{324} = 19$, en négligeant la fraction; c'est-à-dire

c'est-à-dire qu'il faut retrancher $\frac{19}{16}$ de ligne de la hauteur 311, pour avoir 309 $\frac{13}{16}$ de ligne; 19 est donc le nombre des $\frac{1}{16}$ de ligne qu'il faut retrancher de 311. J'appellerai cette quantité qu'il faut ainsi retrancher les degrés réduits du thermomètre qui accompagne le baromètre, ou pour abréger, en appellant ce thermomètre B, les degrés réduits du thermomètre B. Si le mercure se tenoit à 29 pouces dans le lieu où le thermomètre donne + 20, on feroit $27 : 29 :: 20 : x$ le quatrieme terme donneroit le nombre des $\frac{1}{16}$ de ligne qu'il faudroit retrancher de la hauteur 29 pouces. Dans les observations que je vais rapporter les $\frac{1}{16}$ de ligne ont été réduits à ceux qu'on doit ajouter, ou retrancher de la hauteur observée du mercure dans le thermomètre.

Le 18 Juin sur le corridor qui regne autour des fenêtres qui introduisent la lumiere dans le dôme de Supergue, église située au sommet de la montagne de Turin, M. de Luc observa à 4 $\frac{1}{2}$ du soir la hauteur du mercure à 311 lignes, les degrés réduits du thermomètre qui accompagne le baromètre ou du thermomètre B étant + 9, ce qui donne $\frac{9}{16}$ à ôter de 311 pour avoir la température commune de 310 $\frac{7}{16}$. Un instant après il l'observa sur le pavé de l'Eglise à.... 312 $\frac{11}{16}$, & les degrés réduits du thermomètre B à.... + 8, ce qui donne pour la hauteur corrigée 312 $\frac{3}{16}$. Dans le même tems le thermomètre isolé ou qui n'accompagne pas le baromètre, & qui étoit suspendu dans l'intérieur du dôme, étoit à — $\frac{1}{2}$. Donc selon la regle ci-dessus, en supposant que le degré indiqué par le second thermomètre étoit zero, la différence de hauteur des deux stations étoit de 156 pieds 11 pouces, qui se réduisent à 156 pieds 9 pouces, en déduisant ce qu'exige le $\frac{1}{2}$ degré au-dessous de zero qui exprimoit la chaleur de l'air; & la mesure par le baromètre, eu égard à la chaleur de l'air, n'excédé que de sept pouces celle qui avoit été prise au cordeau.

Le 22 Juin 1757 au pied du Fanal de Gênes, environ 20 toises au-dessus du niveau de la mer, la hauteur corrigée du mercure à 6 heures du matin étoit de 337 lignes $\frac{10}{32}$, le même jour à 4 heures du soir, elle

étoit de 337 $\frac{27}{32}$. Le 23 du même mois à 9 h. $\frac{1}{2}$ du matin de.... 338 $\frac{9}{32}$. Le même jour à 5 h. $\frac{1}{4}$ du soir de 337 $\frac{24}{32}$. Le 26 Juillet à 1 h. du soir de 337 $\frac{5}{32}$. La somme de ces 5 observations donne 1688 $\frac{21}{32}$, divisant cette somme par 5, le résultat 337 $\frac{47}{64}$ donnera le terme moyen de la hauteur du mercure dans le baromètre.

	Hauteurs corrigées.	*Thermomètre en plein air au haut du fanal.*
Le 22 Juin 1757, matin	335 $\frac{4}{32}$	+ 6 $\frac{1}{2}$.
Le même jour, soir	335 $\frac{2}{32}$	+ 18.
Le 23 Juin, matin	335 $\frac{16}{32}$	+ 15 $\frac{1}{2}$.
Le même jour, soir	334 $\frac{22}{32}$	+ 13.
Le 26 Juillet	334 $\frac{12}{32}$	+ 12.
Somme des cinq observations du baromètre & du thermomètre . . .	1674 $\frac{24}{32}$	+ 65.
Terme moyen	334 $\frac{61}{64}$	+ 13.

Hauteur par la regle . . . . 221 pieds un pouce : ce qui ne differe que de 22 pouces de la hauteur réelle..

133. LORSQU'ON voudra avoir la hauteur en pieds, il suffira de multiplier la formule dont on a parlé ci-dessus par 6 & si on la multiplioit par 72, on auroit des pouces.

Dans la montagne de Saleve près de Genève, M. de Luc observa le mercure du baromètre à une station élevée de 2582 pieds 4 pouces au-dessus de la plaine où M. son pere observoit en même-tems un autre baromètre.

Dates & heures.	*Baromètre inférieur.*	*Baromètre supérieur.*	*Différences des Baromètr.*	*Résultats par logarithmes.*	*Thermomètre supérieur & inférieur.*	*Sommes.*	*Hauteur par la regle.*
1760, 12 Févr. 10. heur. ½ soir.	5263 — 9 5272	4745 — 5 4750	522	2717	— 26 ¼ — 20 ¼	— 47	2589
12 Avril 8 heur. ¾ matin.	5192 — 1 5193	4688 — 3 4691	502	2649	— 21 — 7	— 28	2575
1758, 1 Octob. 10 heur. ½ matin.	5236 — 1 5237	4734 + 3 4731	506	2648	— 9 — 15 ½	— 24½	2583

La premiere colonne de la gauche contient les dates des observations, la seconde les hauteurs du mercure dans le baromètre inférieur réduites en $\frac{1}{16}$ de ligne, avec les degrés réduits du thermomètre qui l'accompagnoit. La troisieme colonne a rapport au baromètre de la montagne & au thermomètre qui l'accompagne. Le nombre — 9 de la seconde colonne indique 9 seiziemes de ligne à ajouter à la hauteur du baromètre, qui sera 5272 vraie hauteur réduite. De même 4750 exprimera en seiziemes de ligne la hauteur réduite du baromètre supérieur. La colonne suivante contient la différence des hauteurs du mercure exprimées en seiziemes de ligne. La cinquieme colonne contient la différence de hauteur des deux lieux en pieds, n'ayant pas égard aux corections indiquées par les thermomètres en plein air. Dans la colonne suivante ont voit les degrés observés de ces thermomètres, dont la somme — 47 se trouve

à la septieme colonne. De sorte que par la regle on aura 2589 pieds.

Si l'on prend les trois résultats 2589, 2575, 2583, leur somme 7747 étant divisée par 3 donne 2582 $\frac{1}{3}$ qui differe bien peu de la véritable hauteur.

Il est aisé de conclure de ces expériences que la mesure des hauteurs par le baromètre peut être de la plus grande utilité, & que cette méthode a toute la justesse qu'on peut raisonnablement desirer.

134. Si l'on veut connoître le rapport de la densité de l'air à celle du mercure dans un lieu donné, voici comment on pourra s'y prendre. On observera le baromètre & le thermomètre qui l'accompagne, aussi-bien que le thermomètre en plein air. On montera ensuite sur une coline, ou sur une tour jusqu'à ce que le mercure baisse d'une ligne dans le baromètre. On observera encore les thermomètres dont on vient de parler & l'on cherchera par la regle donnée la différence de hauteur des deux stations. Supposons que l'on trouve 80 pieds, 6 pouces, 5 lignes, on conclura que la tranche d'air qui fait équilibre avec une ligne de mercure dans un lieu moyen entre les deux stations, a 11597 lignes. C'est-pourquoi la densité de l'air sera à celle du mercure dans ce lieu comme 1 : 11597.

Supposons que la température de l'air soit celle qui est indiquée par le zero du thermomètre, & que la hauteur du mercure soit de 27 pouces dans un lieu donné. Si l'on veut sçavoir quelle est la hauteur de l'atmosphère depuis ce lieu, jusqu'à celui ou le mercure ne se tiendroit plus qu'à une ligne de hauteur, on prendra la différence entre le logarithme o d'une ligne & 25105450 qui est celui de 324 lignes, & la divisant par 1000, le quotient 25105.450 = 11 lieues & 3 toises indiquera la hauteur de l'atmosphère depuis le lieu donné jusqu'à l'endroit cherché, en n'ayant pas égard à la chaleur de l'air.

Mais la loi des condensations de l'air dont nous avons parlé ci-dessus, n'a certainement lieu que jusqu'à une certaine hauteur, autrement l'atmosphère seroit infinie, puisqu'une progression géométrique décroissante telle que ∺ A : B : C : D : &c. contient une infinité de termes.

135. SUPPOSONS que la force centrifuge qui tend à éloigner les particules de l'air de la surface de la terre suive la raison des distances au centre de notre globe, & que la force centripète ou l'attraction soit en raison inverse des quarrés des distances ; si nous faisons le rayon de la terre $= r$, & le rapport de la gravité à la force centrifuge sous l'équateur égal à celui de $a : 1$, à la distance x du centre, la force centrifuge sera $= \frac{x}{r}$ & la gravité $= \frac{a.r^2}{x^2}$. En effet on aura $r : 1 :: x : \frac{x}{r}$ force centrifuge à la distance x; & $x^2 : r^2 :: a : \frac{a.r^2}{x^2}$ force de la gravité à la même distance x. Mais il est visible que l'atmosphère doit être terminée au point auquel ces deux forces sont égales ; car au-delà de ce point la force centrifuge dissiperoit les particules de l'air dans l'espace, à moins qu'on ne prétende que ces particules n'ont pas la même vîtesse angulaire que le reste de l'atmosphère. Auquel cas négligeant ces particules, sans doute fort rares si elles existent, & les regardant comme ne faisant pas partie de notre atmosphère, nous supposerons qu'elle est terminée au point auquel $\frac{x}{r} = \frac{a.r^2}{xx}$. Nous aurons donc $x^3 = ar^3$, & $x = r\sqrt[3]{a}$. Si la gravité à l'équateur est à la force centrifuge comme 289 : 1, nous trouverons $x = r\sqrt[3]{(289)}$; de sorte que dans cette hypothèse les limites de notre atmosphère seroient éloignées du centre de notre globe de plus de six demi-diamètres terrestres.

136. SUPPOSONS que par inadvertence ou autrement on eût enfermé de l'air dans l'espace B T (fig. 104) d'un baromètre ordinaire, il est facile de trouver à quelle hauteur se soutiendra le mercure dans un tel baromètre. Soit B T $= b$ l'espace que l'air renfermé dans B T occuperoit si le bout supérieur B étoit ouvert, p la hauteur à laquelle la pression de l'atmosphère peut soutenir

une colonne de mercure, la hauteur $AB = a$, la hauteur AP à laquelle se soutiendra le mercure $= x$; l'espace BP que l'air occupe après son expansion pourra être représenté par $a - x$. Maintenant comme la force élastique de l'air naturel BT est égale à la force comprimante, c'est-à-dire au poids de l'atmosphère $= p$, & que cette force diminue dans le même rapport que son expansion augmente, si nous faisons $BP = a - x : b :: p : \frac{bp}{a-x}$, nous aurons l'expression de la force élastique de l'air BP. Mais cette force jointe au poids de la colonne de mercure $AP = x$ doit être équivalente au poids p; donc $\frac{bp}{a-x} + x = p$. Equation par laquelle connoissant trois des quatre quantités b, p, x, a, on trouvera facilement la quatrieme.

137. On sait que la pression de l'air fait élever l'eau dans les pompes aspirantes, & comme le mercure pèse environ quatorze fois plus que l'eau, dans les lieux où la hauteur du mercure dans le baromètre est d'environ 27 pouces 6 lignes, la pression de l'air peut élever l'eau à environ 32 pieds. Supposons que le niveau de l'eau est représenté par RS (fig. 105) & que l'eau est déja parvenue en Z. J'appelle h la hauteur depuis le point Q jusqu'au niveau RS, n le jeu du piston ou l'espace CQ qu'il parcoure, x la distance ZQ, CZ sera $= x - n$, & la hauteur du point Z sera $= h - x$. Supposons que l'eau soit déja parvenue en ZI, il est clair que l'air renfermé dans l'espace $ZIDC$ ne peut pas avoir plus de ressort que l'air extérieur (du moins abstraction faite du poids & du frottement de la soupape L) autrement il s'échapperoit en soulevant cette soupape. Rappellons nous maintenant que $CQ = Dm$ représente le jeu du piston ou l'espace qu'il parcourt à chaque levée. Lorsque la base CD sera arrivée en Qm, l'air qui occupoit l'espace $CZID$ tendra à occuper l'espace $QmIZ$, & l'occupera en effet si l'eau ne monte pas davantage, & alors son ressort sera à celui de l'air naturel comme $CZ : ZQ$. C'est pourquoi si l'action de ce ressort jointe

au poids de la colonne d'eau qui auroit pour hauteur la distance de RS à ZI équivaut à un poids p de 32 pieds d'eau en hauteur, qui représente l'effort que l'air exerce sur la surface de l'eau RS, il est évident qu'il y aura équilibre & que l'eau ne pourra plus monter. Si le poids p est plus grand que 32 pieds, l'eau retombera avant que la soupape E puisse se fermer; mais si p est $<$ 32 pieds, l'eau continuera de monter.

Rappellons-nous que h exprime la hauteur depuis le niveau RS jusqu'en Q, n le jeu du piston ou CQ, x la distance ZQ, ce qui donne $CZ = x - n$, & la hauteur du point $Z = h - x$, & appellons a le poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur. Puisque le ressort a de l'air renfermé dans l'espace CZID est à celui du même air occupant l'espace QmIZ comme DI : Im, on aura $x : x - n :: a : \frac{a(x-n)}{x}$, effort de l'air qui occupera l'espace QmIZ. Si l'on ajoute cette quantité à la colonne $h - x$ ou au poids de l'eau comprise entre ZI & SR, on aura $\frac{a(x-n)}{x} + h - x = a - t$, ou $x = \frac{h+t}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{h+t}{2}\right)^2 - an\right]}$.

Il est évident que l'eau s'arrêtera si $t = 0$. Mais alors x est $= \frac{h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{hh}{4} - an\right)}$, quantité réelle toutes les fois que $\frac{hh}{4}$ sera plus grand $an = 32 . n$.

De là il suit que si le quarré de la moitié de la plus grande hauteur de la base du piston au-dessus du niveau de l'eau est plus grand que 32 fois le jeu du piston, il y a deux points où l'eau peut s'arrêter dans la pompe aspirante. Si le contraire arrive, les valeurs de x que l'on a en supposant $t = 0$ deviennent imaginaires; donc alors il est absurde de supposer $t = 0$, c'est-à-dire que t ne peut alors être $= 0$ & l'eau ne peut s'arrêter : *ainsi une pompe*

aspirante produira infailliblement son effet si le quarré de la moitié de la plus grande hauteur du piston au-dessus du niveau de l'eau est plus petit que 32 fois le jeu du piston.

138. NOUS avons supposé que la pompe étoit par-tout d'une grosseur uniforme, lorsqu'elle ne l'est pas, le problême n'est pas plus difficile; car pour calculer l'effort de l'air intérieur quand on suppose que l'eau n'est pas encore dans le corps de pompe YT, lorsqu'elle est en MN, par exemple, il suffit de faire la proportion suivante: l'espace Q*m*VNMTQ : DCTMNVD :: $a-32$: z; ajoutant la valeur de z au poids d'une colonne d'eau qui a pour hauteur MR, on égalera la somme à la quantité $a-t$ comme ci-dessus.

139. SUPPOSONS que l'eau qui est entrée par la soupape L remplisse la capacité QCD*m*, si l'on élève le piston cette eau sa dégorgera en *m*. Pour connoître l'effort que soutient la puissance qui met le piston en mouvement. Remarquons que lorsque la machine est bien en train, que l'eau est parvenue à la plus grande hauteur Q*m*, & que le piston est en CD le plus bas qu'il est possible, il soutient 1°. le poids de l'eau QCD*m*. 2°. Le poids d'une colonne de 32 pieds de même base que celle du piston, qui vient de la pression de l'atmosphère sur la base Q*m*, tandis que la pression contraire appliquée en RS pousse le piston en haut avec une force égale à celle d'une colonne d'eau de 32. Donc l'effort effectif de la pression de l'air sur RS pour soulever le piston est $=a-b$ en appellant a une colonne d'eau de 32 pieds, & b une colonne d'eau de la hauteur CR; donc le piston est pressé en bas par une colonne d'eau de même base & dont la hauteur seroit $=a+c-a+b=c+b$, en faisant QC $=c$, c'est-à-dire que la charge du piston est égale au poids d'une colonne d'eau de même base & dont la hauteur est égale à la distance verticale du point où il faut élever l'eau au niveau de celle du réservoir, ce qui a lieu même dans les coups de piston suivans.

Pour passer de l'état d'équilibre à celui de mouvement, on augmentera cette force du tiers à peu-près de sa valeur; mais cette détermination n'a rien de fixe, elle dépend du frottement & de la vîtesse.

La quantité d'eau que le piston élève à chaque fois est égale à A $cpaa$, A étend le poids d'un pied cube d'eau, e le jeu du piston, p la circonférence du diamètre 1, & a le rayon de la base du piston.

J'appelle *pompe aspirante parfaite* celle dans laquelle l'eau est élevée jusqu'à la soupape E du tube d'aspiration dans le premier coup de piston.

140. PROBLEME. *Déterminer la longueur du tuyau d'aspiration dans une pompe aspirante parfaite.* Supposons que le diamètre du tuyau d'aspiration est le même que celui du corps de pompe, & faisons la longueur du tuyau d'aspiration $= x$, CT $= b$, CQ $= n$. Puisque le piston étant parvenu de CD en Qm, l'eau doit monter jusqu'en TV, l'air qui occupoit dans la pompe l'espace $x + b$, occupera l'espace $n + b$. Donc l'on aura $b + n : x + b :: a : a - x$, ou $ba + na - bx - nx = ax + ba$, ou $na = x(a + b + n)$ & $x = \frac{a.n}{a + b + n}$. Si b est $= 1$ pied, $n = 3$ pieds, l'on aura $x = \frac{96}{36} = 2$ pieds 8 pouces (*).

Si le diamètre du tube d'aspiration n'étoit pas le même que celui du corps de pompe, la solution ne seroit pas beaucoup plus difficile ; car soit l'amplitude du corps de pompe $= m$, celle du tuyau d'aspiration étant $= p$, si l'on multiplie p par x, px sera la capacité du tube d'aspiration. Si l'on divise cette capacité par m, $\frac{px}{m}$ sera la hauteur que cet air pourroit occuper (dans son état naturel) dans le corps de pompe ; c'est pourquoi

(*) Si on connoissoit la longueur du tuyau d'aspiration, la force naturelle a de l'air, & b, on trouveroit facilement le jeu n du piston. En général trois des quatre quantités a, b, n, & la longueur du tuyau d'aspiration étant connues, on trouvera la quatrieme par l'équation $na = x(a + b + n)$.

on fera $b+n : b+\frac{px}{m} :: a : a-x$, ou $ba-bx+an-nx=ba+\frac{apx}{m}$, ou $a.n.m=x(ap+bm+mn)$, ou $x=\frac{a.n.m}{ap+bm+mn}$.

Du Son & de la Musique.

141. Il est certain que les corps qu'on frappe ne deviennent sonores que par le trémoussement de leurs parties insensibles. On ne doutera point de ce frémissement pour peu qu'on applique la main sur un corps qui rend un son un peu fort. Ce mouvement de vibration des parties du corps sonore se communique aux particules contiguës de l'air environnant, celles-ci le communiquent à celles qui les suivent, & ainsi de suite jusqu'à ce que l'air renfermé dans nos oreilles étant mis en mouvement aille ébranler les fibres des nerfs acoustiques, qui sont ceux par le moyen desquels nous entendons; car ces nerfs étant agités, le fluide nerveux dont ils sont remplis remonte vers le *censorium* & lui communique un certain mouvement auquel le Créateur a attaché la perception ou sensation du son (voyez ce que nous avons dit dans notre métaphysique sur les loix de l'union de l'ame avec le corps). Il paroît que la vîtesse du son n'est pas la même dans tous les pays; mais on peut supposer sa vîtesse moyenne d'environ 173 toises par seconde.

Les cordes de musique rendent des sons différens selon leur longueur, les poids tendans & leurs diamètres, & la différence des sons quant au *grave* & à l'*aigu* dépend de la promptitude & de la célérité des vibrations; de sorte qu'un son plus aigu suppose un plus grand nombre de vibrations (dans le même tems) qu'un son moins aigu ou plus grave. Si deux cordes font le même nombre de vibrations dans le même tems ont dit qu'elles sont à l'*unisson*. Si les nombres des vibrations sont comme 2 : 1, cette consonnance s'appelle *l'octave*, &c. Or la

formule $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L.M}}$ qu'on a trouvée ci-dessus en parlant des cordes vibrantes, fait voir dans quel rapport sont les nombres des vibrations que peuvent faire les cordes de musique dans le même tems. Mais rien n'empêche de considérer l'air contenu dans la cavité d'une flûte comme une corde aërienne; car soit L la longueur de la flûte, son amplitude $= bb$, la gravité spécifique de l'air $=$ N, celle du mercure étant $= n$, la hauteur du mercure dans le baromètre $= h$. Il est visible que $nhbb$ exprimera le poids tendant ou la force élastique de la corde aërienne contenue dans la flûte, tandis que sa masse M sera $=$ N.L.bb; donc par la formule $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L.M}}$, on aura $\sqrt{\left(\frac{nh.bb}{L.NL.bb}\right)} = \frac{1}{L}\sqrt{\left(\frac{n.}{N}\right)}$, & parce que pendant les différentes saisons de l'année la valeur de h est à peu-près la même, les nombres des vibrations des cordes aëriennes contenues dans les flûtes sont en raison inverse des longueurs des flûtes; de sorte que plus les flûtes sont courtes, plus leur son doit être aigu, ce que l'expérience confirme.

142. MAIS un phénomène bien digne de remarque, c'est que si une corde AB (fig. 106) rend un certain son qu'on appelle *fondamental* ou *principal*, on entend encore l'octave de ce même son & même d'autres tons plus aigus. Il est vrai qu'on peut concevoir que la corde ACB se divise pour ainsi dire en deux parties égales en C, & que les parties AMC, BmC font chacune deux vibrations, tandis que la corde totale en fait une, de sorte que la partie AMC rend l'octave de la corde totale ACB. & l'on peut concevoir de même que la partie AMC se divise aussi en d'autres parties dont chacune rend encore un son plus aigu que l'octave, & ainsi de suite. Mais il est difficile d'expliquer comment toutes ces vibrations passent dans les particules de l'air sans se confondre, & pourquoi les particules aliquotes & égales de la corde faisant leurs vibrations séparément, le son qui dépend de ces vibrations n'est pas le même ?

143. TOUT corps est susceptible d'un certain ébranlement dans ses parties; c'est pourquoi tous les corps peuvent produire des sons. Dans une corde, lorsqu'elle

n'eſt pas trop mince, on peut voir ces ébranlemens ou vibrations par leſquelles la corde tendue ACB paſſe alternativement dans la ſituation ACB & ANB, que j'ai repréſentées beaucoup plus ſenſiblement qu'elles n'arrivent en effet; enſuite il faut obſerver que ces vibrations mettent l'air voiſin dans une ſemblable vibration, qui ſe communique ſucceſſivement aux parties plus éloignées de l'air, juſqu'à ce qu'elles viennent frapper l'organe de notre oreille; c'eſt donc l'air qui reçoit de telles vibrations, qui tranſporte le ſon juſqu'à nos oreilles; & quand nous entendons le ſon d'une corde pincée, nos oreilles en reçoivent autant de coups que la corde a fait de vibrations en même-tems. Ainſi ſi la corde fait 100 vibrations dans une ſeconde, l'oreille en reçoit auſſi 100 coups dans une ſeconde & l'affection qui eſt alors produite dans l'air eſt ce qu'on nomme un ſon. Lorſque ces coups ſe ſuivent également les uns les autres, ou que leurs intervalles ſont tous égaux, le ſon eſt *régulier* & tel qu'on l'exige dans la Muſique; mais quand ces coups ſe ſuccèdent inégalement ou que leurs intervalles ſont inégaux entr'eux, il en réſulte un bruit *irrégulier*, tout-à-fait impropre pour la Muſique. Quand je conſidére un peu plus ſoigneuſement les ſons de Muſique dont les vibrations ſe font également, je remarque d'abord, que lorſque les vibrations, ainſi que les coups dont l'oreille eſt frappée ſont plus ou moins forts, il n'en réſulte d'autre différence dans le ſon, ſi ce n'eſt qu'il devient plus ou moins fort; & c'eſt la différence que les Muſiciens indiquent par les mots *forte* & *piano*; mais une différence beaucoup plus eſſentielle eſt lorſque les vibrations ſont plus ou moins rapides ou qu'il en arrive plus ou moins dans une ſeconde: ainſi quand une corde achève 100 vibrations dans une ſeconde, & une autre corde 200 vibrations dans une ſeconde, leurs ſons feront eſſentiellement différens entr'eux, le premier ſera plus *grave* ou plus *bas*, & l'autre plus *aigu* ou plus *haut*. Voilà donc la véritable différence entre les ſons graves & aigus ſur laquelle roule toute la Muſique qui enſeigne à mêler des ſons, qui différent entr'eux par rapport au grave & à l'aigu, mais unis tellement enſemble qu'il en réſulte une agréable *harmonie*. Or dans les ſons graves il y a

moins de vibrations en même tems, que dans les sons aigus, & chaque son sur le clavecin renferme un nombre certain & déterminé de vibrations. Celui qui est marqué par la lettre C rend à peu-près 100 vibrations dans une seconde & le son marqué par la lettre $\overset{\equiv}{c}$ rend 1600 vibrations dans le même tems; donc une corde qui tremble 100 fois dans une seconde donnera précisément le son C, & si elle ne trembloit que 50 fois, le son seroit encore plus bas ou plus grave. Mais à l'égard de nos oreilles il y a des limites au-delà desquelles les sons ne sont plus perceptibles; il semble que nous ne saurions plus sentir un son qui fait moins de 20 vibrations dans une seconde, à cause de la trop grande *basse*, ni un son qui feroit dans une seconde plus de 4000 vibrations à cause de sa trop grande *hauteur*; mais ces limites ne sont peut-être pas bien certaines.

144. ON a remarqué qu'en entendant un son simple de Musique, notre oreille est frappée d'une suite de coups également éloignés entr'eux, dont la fréquence ou le nombre produit dans un certain tems, cause la différence qui règne entre les sons graves & aigus; en sorte que plus le nombre de vibrations ou coups produits dans un certain tems, comme dans une seconde, est petit, plus le son est grave, & plus ce nombre là est grand, plus le son est aigu. Donc les coups que produit un son simple de Musique dans les nerfs acoustiques peuvent être représentés par une suite de points également éloignés entr'eux, comme ceux qu'on voit ici . . . . Si les intervalles entre ces points sont ou plus grands ou plus petits, le son qu'ils représentent sera ou plus grave ou plus aigu; il n'y a point aussi de doute que l'impression d'un son simple sur les nerfs acoustiques ne soit semblable ou analogue à la vue d'une telle suite de points également éloignés entr'eux; & par ce moyen on peut représenter aux yeux la même chose que les oreilles éprouvent lorsque nous entendons un son. Si les distances entre les points n'étoient pas égales, & que les points fussent rangés confusément ce seroit la représentation d'un bruit confus contraire à l'harmonie. Cela

posé, considérons quel effet deux sons rendus à la fois doivent produire sur l'oreille ; & d'abord il est clair que si ces deux sons sont égaux, ou que chacun renferme le même nombre de vibrations pour le même tems, l'oreille en sera affectée de la même maniere que d'un seul son : & dans la Musique on dit que ces deux sons sont à l'unisson, ce qui est le plus simple *accord*, un accord étant nommé le mélange de deux ou plusieurs sons qu'on entend à la fois. Mais si les deux sons sont différens par rapport au grave ou à l'aigu il y aura un mélange de deux suites de coups dans chacune desquelles les intervalles sont égaux entr'eux, mais dans l'une plus grands que dans l'autre, celle-là répondant au son plus grave & celle-ci au plus aigu. Un tel accord de deux sons peut être représenté aux yeux par deux suites de

```
   1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11
A  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  B
C  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  D
   1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12
```

points rangés sur deux lignes A B & C D ; & pour avoir une juste idée de ces deux suites, il faut s'appercevoir de l'ordre qui y règne, ou ce qui revient au même du rapport entre les intervalles de l'une & de l'autre ligne. Ayant numéroté les points de l'une & de l'autre ligne & mis le numéro 1 sous le numéro 1 ; les numéro 2 ne seront plus précisément l'un sous l'autre & encore moins les numéros 3 ; mais on voit qu'en haut le numéro 11 se trouve précisément au-dessus du numéro 12 d'en bas, d'où l'on connoît que le plus haut son achève 12 vibrations, pendant que l'autre n'en fait que 11 ; mais sans y écrire les nombres, les yeux ne découvriroient presque point cet ordre, & il en est de même des oreilles, qui découvriroient aussi difficilement l'ordre parmi les deux sons que j'ai représentés par les deux rangs de points. Mais dans cette figure

```
.  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
.     .     .     .     .     .     .     .     .
```

on découvre au premier coup-d'œil que la ligne

d'en-haut contient deux fois plus de points que celle d'en-bas, & que les intervalles dans la ligne d'en-bas sont deux fois plus grands que dans celle d'en-haut. C'est sans doute le cas le plus simple après l'unisson où l'on peut aisément découvrir l'ordre dans ces deux suites de points; & il en est de même des deux sons représentés par ces deux lignes de points, dont l'un achevera précisément deux fois plus de vibrations que l'autre, & l'oreille s'appercevra aisément de ce beau rapport qui se trouve parmi ces deux sons pendant que dans le cas précédent le jugement est très difficile, sinon impossible. Maintenant quand l'oreille découvre aisément un rapport qui règne entre deux sons, leur rapport est nommé une consonnance, & quand ce rapport est très-difficile à découvrir ou même impossible, l'accord est nommé *dissonance*. Donc la plus simple consonnancé est celle où le son aigu achève précisément deux fois plus de vibrations que le son grave. Cette consonnance est nommée dans la Musique une *octave*; tout le monde en connoît la force, & deux sons qui different d'une octave harmonient si bien & se ressemblent si fort que les Musiciens les marquent par les mêmes lettres, aussi voyons-nous souvent que les femmes chantent d'une octave plus haut que les hommes & s'imaginent pourtant entonner les mêmes sons. On peut s'assurer aisément de cette vérité sur un clavecin, & s'appercevoir avec plaisir du bel accord entre tous les sons qui different d'une octave pendant que deux autres sons quelconques ne sonnent pas si bien.

Ayant entonné le son F on y accorde aisément le son *f* qui est plus haut d'un octave par le seul jugement de l'oreille; & si la corde du son *f* est tant soit peu trop haute ou trop basse, l'oreille en est d'abord choquée : rien n'est plus aisé que de la mettre parfaitement d'accord. Aussi voyons-nous que tout le monde passe aisément en chantant d'un son à un autre qui est d'une octave ou plus haut ou plus bas; mais s'il faut passer du son F au son *d*, par exemple, un Musicien médiocre se trompera aisément s'il n'est pas secouru d'un instrument. Ayant fixé le son F, il est presque impossible d'y accorder tout-d'un-coup le son *d*. Quelle est donc la raison de cette différence, qu'il est si aisé

d'accorder le son F au son *f*, & si difficile d'y accorder le son *d*. Cela vient sans doute de ce que le son F & le son *f* font une octave, ou que le nombre des vibrations du son *f* est précisément le double de celui du son F, pour appercevoir cet accord il ne s'agit que de sentir le rapport de 1 à 2, qui comme il saute d'abord aux yeux par la représentation des points dont je me suis servi auparavant, affecte les nerfs acoustiques d'une maniere semblable; or on comprend aisément que plus un rapport est simple ou exprimé par de petits nombres, plus il se présente distinctement à l'entendement & y excite un sentiment de plaisir. Les Architectes observent aussi très-soigneusement cette maxime en employant par-tout dans les bâtimens des proportions aussi simples que les autres circonstances le permettent. Dans les portes & fenêtres, ils font ordinairement la hauteur deux fois plus grande que la largeur; & partout ils tâchent d'employer des proportions exprimables en de petits nombres puisque cela plaît à l'entendement. Il en est de même dans la Musique où les accords plaisent lorsque l'esprit y découvre la proportion qui règne entre les sons, & cette proportion s'apperçoit d'autant plus aisément qu'elle est exprimée par de petits nombres. Mais après le rapport d'égalité qui marque deux sons égaux ou à l'unisson, la proportion de 2 à 1 est sans doute la plus simple, & c'est celle qui fournit l'accord d'une octave: de-là il est évident que cet accord est doué de beaucoup de prérogatives parmi les autres consonnances. Après cette explication de l'accord ou de l'intervalle entre deux sons que les Musiciens nomment une *octave*, considérons plusieurs sons comme F, $\overline{f}$, $\overline{\overline{f}}$, $\overline{\overline{\overline{f}}}$ dont chacun est d'une octave plus haut que le précédent. Donc, puisque l'intervalle de F à *f*, de *f* à $\overline{f}$, de $\overline{f}$ à $\overline{\overline{f}}$, de $\overline{\overline{f}}$ à $\overline{\overline{\overline{f}}}$ est une octave, l'intervalle de F à $\overline{f}$ sera une double octave, celui de F à $\overline{\overline{f}}$ une triple octave, &c. ainsi pendant que le son F rend une vibration le son

son f en rend deux, le son $\overline{\overline{f}}$ quatre, le son $\overline{\overline{f}}$ huit, le son $\overline{\overline{\overline{f}}}$ seize; d'où nous voyons que comme une octave répond au rapport de 1 à 2; ainsi une double octave répond à celui de 1 à 4; une triple octave à celui de 1 à 8; & une quadruple à celui de 1 à 16; or le rapport de 1 à 4 n'étant plus si simple que celui de 1 à 2, puisqu'il ne s'apperçoit pas si aisément qu'une simple octave, une triple octave est encore moins perceptible, & une quadruple octave encore moins; ainsi en accordant un clavecin & ayant fixé le son F, il n'est pas si aisé d'y accorder la double octave $\overline{f}$ que la simple f, & il est encore plus difficile d'y accorder la triple octave $\overline{\overline{f}}$ & la quadruple $\overline{\overline{\overline{f}}}$ sans y monter par les octaves intermédiaires, ces accords sont aussi compris dans le terme de consonnance, & puisque celle de l'unisson est la plus simple on peut les ranger selon les degrés suivans.

I. Degré, l'unisson qui est indiqué par le rapport de 1 à 1.

II. Degré, octave dans le rapport de 1 à 2.

III. Degré, la double octave dans le rapport de 1 à 4.

IV. Degré, la triple octave dans le rapport de 1 à 8.

V. Degré, la quadruple octave dans le rapport de 1 à 16.

VI. Degré, la quintuple octave dans le rapport de 1 à 32.

Et ainsi de suite en tant que les sons en sont encore sensibles. Ce sont les accords ou consonnances à la connoissance desquelles nous avons été conduits jusqu'ici, & nous ne savons encore rien des autres especes des consonnances & encore moins des dissonances dont on fait usage dans la Musique. Mais avant de passer à l'explication de celles-ci, je dois ajouter une remarque sur le nom d'octave qu'on donne à l'intervalle de deux sons dont l'un fait deux fois plus de vibrations que l'autre. On en voit la raison dans les touches prin-

cipales du clavecin, qui montent par 7 degrés avant que d'arriver à l'octave, comme C, D, E, F, G, A, H, *c*; de sorte que la touche *c* est la huitieme en comptant C pour la premiere; mais cette division dépend d'une certaine espèce de Musique, dont la raison ne sauroit être exposée que dans la suite.

145. ON peut dire que tous les rapports de 1 à 1, de 1 à 4, de 1 à 8, de 1 à 16, que nous avons considérés jusqu'ici & qui renferment la nature d'une octave simple ou double ou triple ou quadruple, tirent leur origine du seul nombre 2; puisque 4 est deux fois 2, 8 deux fois 4, & 16 deux fois 8; ainsi en n'admettant que le nombre 2 dans la Musique on ne parvient qu'à la connoissance des accords ou consonnances, que les Musiciens nomment *octave* simple ou double ou triple &c., & puisque le nombre 2 ne fournit par sa reduplication que les nombres 4, 8, 16, 32, 64, &c. l'un étant toujours double de l'autre, tous les autres nombres nous demeurent encore inconnus. Mais si un instrument ne contenoit que des octaves comme les sons marqués C, c, $\bar{c}$, $\bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{\bar{c}}}$, & que tous les autres en fussent exclus, il ne sauroit produire aucune Musique agréable, à cause de sa trop grande simplicité : introduisons donc outre le nombre 2 encore le nombre 3, & voyons quels accords ou quelles consonnances en résulteront. D'abord la proportion de 1 à 3 nous présente 2 sons dont l'un rend trois fois plus de vibrations que l'autre, en même-tems. Ce rapport est sans doute le plus aisé à comprendre, après celui de 1 à 2, & partant il fournira des consonnances fort belles, mais d'une nature tout-à-fait différente de celle des octaves. Supposons donc que dans le rapport de 1 à 3 le nombre 1 réponde au son C; puisque le nombre *c* est exprimé par le nombre 2, le nombre 3 nous donne un son plus haut que *c*, mais pourtant plus bas que le son $\bar{c}$ qui répond au nombre 4. Le son exprimé par 3 est celui que les Musiciens marquent par la lettre *g*, & ils nomment l'intervalle de *c* à *g* une *quinte*; puisque dans les touches d'un clavecin celle de *g* est la cinquieme depuis *c*, comme dans la suite *c*, *d*, *e*, *f*, *g*; donc si

le nombre 1 donne le ſon C, le nombre 2 donne *c*; le nombre 3 donne *g*, le nombre 4 le ſon $\bar{c}$; & puiſque le ſon $\bar{g}$ eſt l'octave de *g* ſon nombre ſera deux fois 3, & partant 6, & montant encore d'une octave, le ſon $\bar{\bar{g}}$ ſera deux fois plus grand, partant 12. Tous les ſons donc auxquels les deux nombres 2 & 3 nous conduiſent en indiquant le ſon C par 1 ſont

$$\begin{array}{ccccccccc} C, & c, & g, & \bar{c}, & \bar{g}, & \bar{\bar{c}}, & \bar{\bar{g}}, & \bar{\bar{\bar{c}}}, & \&c. \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 6, & 8, & 12, & 16, & \&c. \end{array}$$

Delà il eſt clair que la raiſon de 1 à 3 exprime un intervalle compoſé d'une octave & d'une quinte, & que cet intervalle à cauſe de la ſimplicité de ſes nombres, doit être après l'octave le plus ſenſible à l'oreille; auſſi les Muſiciens donnent-ils à la quinte le ſecond rang parmi les conſonnances, & l'oreille en eſt ſi agréablement affectée qu'il eſt fort aiſé d'accorder une quinte; ainſi ſur les violons les quatre cordes montent par des quintes, la plus baſſe étant G, la ſeconde *d*, &c.; elles ſont ſi ſenſibles que chaque Muſicien les met aiſément d'accord par l'oreille ſeule. Cependant une quinte ne s'accorde pas pas ſi aiſément qu'une octave; mais la quinte au-deſſus de l'octave, comme de C à *g* étant exprimée par le rapport de 1 à 3 eſt plus ſenſible qu'une ſimple quinte comme de C à G ou de *c* à *g*, laquelle eſt exprimée par la proportion de 2 à 3; & l'on ſait auſſi par l'expérience qu'ayant fixé le ſon C, il eſt plus aiſé d'y accorder la quinte ſupérieure *g* que la ſimple G. On pourroit déſigner le ſon F par 1 & le ſon $\bar{c}$ par 3, en ſorte que F, *f*, $\bar{c}$, $\bar{f}$, $\bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{f}}$, $\bar{\bar{\bar{c}}}$ ſeroient marqués par 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12,

où de *f* à $\bar{c}$, l'intervalle eſt une quinte contenue dans la proportion de 2 à 3, de $\bar{f}$ à $\bar{\bar{c}}$, de $\bar{\bar{f}}$ à $\bar{\bar{\bar{c}}}$, il y a

aussi une quinte ; puisque la raison de 4 à 6 & de 8 à 12, est la même que celle de 2 à 3. Delà nous arrivons à la connoissance d'un autre intervalle contenu dans le rapport de 3 à 4, qui est celui de $\overline{c}$ à $\overline{f}$, & partant aussi celui de *c* à *f* ou de C à F, que les Musiciens nomment une *quarte*, laquelle étant exprimée par de plus grands nombres, il s'en faut beaucoup qu'elle soit si agréable que la quinte & encore moins que l'octave. Comme le nombre 3 nous a fourni ces nouveaux accords ou consonnances de la quinte & de la quarte, avant que d'employer d'autres nombres prenons le nombre 3 encore 3 fois pour avoir le nombre 9, qui donne le son $\overline{\overline{g}}$, en sorte que $\overline{\overline{c}}$. $\overline{\overline{f}}$. $\overline{\overline{g}}$. $\overline{\overline{\overline{c}}}$ seront marqués par 6, 8, 9, 12, & prenant ces sons dans d'autres octaves, les proportions demeurant les mêmes, on aura

$$\begin{array}{ccccccccccccc} C, & F, & G, & c, & f, & g: & \overline{c}, & \overline{f}, & \overline{g}, & \overline{\overline{c}}, & \overline{\overline{f}}, & \overline{\overline{g}}, & \overline{\overline{\overline{c}}} \\ 6, & 8, & 9, & 12, & 16, & 18, & 24, & 32, & 36, & 48, & 64, & 72, & 96. \end{array}$$

D'où nous parvenons à la connoissance de nouveaux intervalles, le premier est celui de F à G contenu dans la proportion de 8 à 9, que les Musiciens nomment une *seconde* & aussi un *ton entier*. Le second est de G à *f*, contenu dans la proportion de 9 à 16, qu'on nomme une *septieme*, & qui est d'une seconde ou d'un ton entier plus petit qu'une octave. Ces proportions étant déja exprimées par des nombres considérablement grands, les intervalles ne sont plus comptés parmi les consonnances, & les Musiciens les nomment *dissonances*.

Si nous prenons le nombre 9 encore trois fois, pour avoir 27, ce nombre marquera un ton plus haut que $\overline{c}$, & précisément d'une quinte plus haut que *g*; ce sera donc le ton $\overline{d}$, & son octave $\overline{\overline{d}}$ répondra au nombre 2 fois 27 ou 54, & la double octave $\overline{\overline{\overline{d}}}$ au nombre 2 fois 54 ou 108. Représentons ces tons, mais pris dans d'autres octaves, de la maniere suivante :

C, D, F, G, *c*, *d*, *f*, *g*, $\overline{c}$, $\overline{d}$, $\overline{f}$, $\overline{g}$
24, 27, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 96, 108, 128, 144.
$\overline{\overline{c}}$, $\overline{\overline{d}}$, $\overline{\overline{f}}$, $\overline{\overline{g}}$, $\overline{\overline{\overline{c}}}$.
192, 216, 256, 288, 384.

Où nous découvrons que l'intervalle de D à F est contenu dans le rapport ou proportion (car ici ces mots sont synonimes) de 27 à 32, & celui de F à *d* dans la proportion de 32 à 54 où en prenant la moitié, de 16 à 27, dont la premiere est nommée un *tierce mineure*, & l'autre une *sexte majeure*. On pourroit encore tripler le nombre 27, mais la Musique ne passe pas si loin & on se borne au nombre 27, résultant de 3, en le multipliant pour la seconde fois par lui-même, les autres tons de Musique qui nous manquent encore sont introduits par le nombre 5, dont nous allons parler.

146. LES principes de l'harmonie se réduisent à des nombres, comme on vient de le voir, & j'ai remarqué que le nombre 2 ne fournit que des octaves, ensorte qu'ayant par exemple fixé le ton F, nous avons été conduits aux sons *f*, $\overline{f}$, $\overline{\overline{f}}$, $\overline{\overline{\overline{f}}}$: ensuite le nombre 3 fournit les tons C, *c*, $\overline{c}$, $\overline{\overline{c}}$, $\overline{\overline{\overline{c}}}$, qui différent de ceux-là d'une quinte; & la répétition de ce même nombre 3, fournit encore les quintes des premieres, qui sont G, *g*, $\overline{g}$, $\overline{\overline{g}}$, $\overline{\overline{\overline{g}}}$, & enfin la répétition de ce même nombre 3 y ajoute encore les tons D, *d*, $\overline{d}$, $\overline{\overline{d}}$. Les principes de l'harmonie étant attachés à la simplicité, ne semblent pas permettre qu'on pousse plus loin la répétition du nombre 3, & partant jusqu'ici nous n'avons que les tons suivans pour chaque octave F, G, *c*, *d*, *f*,
16, 18, 24, 27, 32,
qui n'admettent pas certainement une Musique bien variée. Mais introduisons aussi le nombre 5, & voyons quel sera le ton qui rend 5 vibrations pendant que le ton F n'en fait qu'une; or le ton *f* en fait en meme-tems 2, le ton $\overline{f}$, 4 & le ton $\overline{\overline{c}}$, 6. Le ton en question est donc

entre $\bar{f}$ & $\bar{\bar{c}}$, & c'eſt celui que les Muſiciens indiquent par la lettre $\bar{a}$, dont l'accord avec le ton $\bar{f}$ eſt nommé une *tierce majeure*, & ſe trouve faire une conſonnance fort agréable, étant contenu dans la proportion de ces petits nombres 4 & 5; de plus ce ton $\bar{a}$ avec le ton $\bar{\bar{c}}$ fait un accord contenu dans la proportion de 5 à 6, qui eſt preſque auſſi agréable que celui-là, & qu'on nomme auſſi une *tierce mineure* comme celle dont nous avons déja parlé, contenue entre les nombres 27 & 32; puiſque la différence eſt preſque inſenſible à l'oreille. Ce nombre 5 étant appliqué aux autres tons G, *c*, *d*, nous donnera de la même maniere leurs tierces majeures, priſes dans la ſeconde octave au-deſſus, c'eſt-à-dire, les ſons $\bar{h}$, $\bar{\bar{e}}$ & $\bar{\bar{fs}}$, qui étant tranſportés dans la premiere octave, nous aurons maintenant ces tons avec leurs nombres.

F, F*s*, G, A, H, *c*, *d*, *e*, *f*.
128, 135, 144, 160, 180, 192, 216, 240, 256.

147. OTEZ les tons F*s*, & vous aurez les touches principales du clavecin qui, ſelon les anciens conſtituent le genre nommé *diatonique*, & qui réſulte du nombre 2, du nombre 3, trois fois répété, & du nombre 5. En n'admettant que ces tons, on eſt en état de compoſer de très-belles & très-variées mélodies, dont la beauté eſt fondée uniquement ſur la ſimplicité des nombres qui ont fourni ces tons. Enfin en appliquant pour la ſeconde fois le nombre 5, il fournira les tierces de quatre nouveaux tons A, &c. que nous venons de trouver; & partant nous aurons les ſons C*s*, G*s*, D*s* & B, de ſorte qu'à préſent l'octave eſt remplie préciſément des mêmes qui ſont reçus actuellement dans la Muſique. Tous ces tons tirent leur origine de ces trois nombres 2, 3 & 5, en répliquant 2 autant de fois que les octaves le demandent; mais pour le 3 on ne le multiplie que 3 fois, & le nombre 5 deux fois ſeulement. Voilà donc tous les tons de la premiere octave, exprimés par les nombres ſuivans où l'on voit la compoſition par les nombres 2, 3 & 5.

			Diffé-rence.
C	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 3.	384	
C *s*	2. 2. 2. 2 5. 5.	400	16
D	2. 2. 2. 2. 3. 3. 3.	432	32
D *s*	2. 3. 3. 3. 5.	450	18
E	2. 2. 2. 2. 2. 3. 5.	480	30
F	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. . .	512	32
F *s*	2. 2. 3. 3. 3. 5.	540	28
G	2. 2. 2. 2. 2. 2. 3. 3.	576	36
G *s*	2. 2. 2. 3. 5. 5.	600	24
A	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 5.	640	40
B	3. 3. 3. 5. 5.	675	35
H	2. 2. 2. 2. 3. 3. 5	720	45
c	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 3. . .	768	48

Pendant que le son C rend 384 vibrations, le son C *s*, en rend 400 en même-tems, & les autres autant que les nombres y joints marquent ; ainsi le son *c* rendra en même-tems 768, ce qui est précisément le double du nombre 384 ; & pour les octaves suivantes on n'a qu'à multiplier ces nombres par 2 ou par 4, ou par 8, ainsi le son $\overline{c}$ rendra 2 fois 768, ou 1536 vibrations, le son $\overline{\overline{c}}$ deux fois 1536 ou 3072 vibrations, & le son $\overline{\overline{\overline{c}}}$ deux fois 3072 ou 6144 vibrations Pour comprendre la formation des sons par ces trois nombres 2, 3 & 5, il faut remarquer que les points mis entre ces nombres signifient la multiplication ; ainsi pour le son F *s* l'expression 2. 2. 3. 3. 3. 5 signifie 2 fois 2 fois 3 fois 3 fois 3 fois 5. Or 2 fois 2 est 4, & 4 fois 3 est 12, & 12 fois 3 est 36, & 36 fois 3 est 108, & 108 fois 5 est 540. On voit par-là que les différences entre ces tons ne sont pas égales entr'elles, & que d'autres sont plus grandes & d'autres plus petites ; c est aussi ce que la véritable harmonie exige ; mais puisque l'inégalité n'est pas considérable on regarde communément toutes ces différences comme égales, & l'on nomme le saut de chaque ton au suivant un *semi-ton* ; car l'on dit que l'octave est de cette maniere divisée en 12 semi-tons. Plusieurs Musiciens les font aussi actuellement égaux, quoique cela soit contraire aux principes de l'harmonie ; car de cette

façon, aucune quinte ni aucune tierce n'eſt juſte ; & l'effet en eſt le même, que ſi ces tons n'étoient pas bien accordés. Ils conviennent auſſi qu'il faut renoncer à la juſteſſe de ces accords, pour obtenir l'avantage de l'égalité de tous les ſemi-tons, de ſorte que la tranſpoſition d'un ton à un autre quelconque ne change rien dans les mélodies ; cependant ils avouent eux-mêmes que la piece étant jouée du ton C, ou d'un demi-ton plus haut Cs, change conſidérablement de nature ; d'où il ſuit clairement que les demi-tons ne ſont pas effectivement égaux, quoique les Muſiciens s'efforcent de les rendre tels, parce que la véritable harmonie s'oppoſe à l'exécution de ce deſſein qui lui eſt contraire. Voilà donc la véritable origine des tons qui ſont aujourd'hui en uſage, & qui ſont tirés des nombres 2, 3 & 5, ſi l'on vouloit encore introduire 7, le nombre de tons d'une octave deviendroit plus grand, & toute la Muſique en ſeroit portée à un plus haut degré.

148. LES Muſiciens ont attention de donner plus de durée aux ſons plus graves, & moins de durée aux ſons aigus ; cependant les ſons aigus doivent quelquefois avoir plus de durée & les graves moins de durée, ſi ceux-ci ont des rapports ou proportions plus ſimples, tandis que les proportions des autres ſont plus compliquées.

Nous allons maintenant conſidérer cette théorie d'une maniere un peu différente.

149. SI une corde de Muſique vient à être pincée de maniere qu'elle rende un ſon, une autre corde ſemblable, également tendue, propre à rendre le même ſon & ſituée auprès de la premiere, ſera auſſi miſe en mouvement par l'action de l'air, & rendra un ſon ſemblable à celui de la corde pincée. Cette expérience eſt connue depuis long-tems, en voici une autre fort intéreſſante : lorſqu'une corde de Muſique ſur-tout ſi elle eſt un peu groſſe, eſt frappée par l'archet outre le ton principal on entend auſſi l'octave du même ton, on diſtingue encore aſſez facilement la douzieme & la dix-ſeptieme majeure aiguë, c'eſt-à-dire, l'octave aiguë de la quinte & la double octave de la tierce majeure. Cela eſt encore connu depuis long-tems ; mais les Muſiciens modernes ont fait une expérience bien plus ſub-

tile.: si l'on compare deux cordes, dont l'une soit à la douzieme grave de la corde pincée & l'autre à la dix-septieme majeure grave de la même corde, on observe un certain frémissement dans les cordes, mais sans aucun son. La premiere se divise pour ainsi dire en 3 parties égales, & la seconde en 5; de sorte que les parties de ces cordes rendroient l'octave du ton principal, si elles rendoient un son. Tout le monde connoit l'échelle vulgaire des tons *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *UT* qu'on peut représenter par les nombres 1, $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{27}{16}$, $\frac{15}{8}$, 2; si l'on compare les sons *ut* & *re*, il est visible qu'ils sont entr'eux, comme 1 : $\frac{9}{8}$: : 8 : 9. Les intervalles entre *ut* & *re*, *re* & *mi* sont égaux entr'eux, & on leur donne le nom de tons; mais les intervalles entre *mi* & *fa*, *si* & *UT* sont plus petits que les premiers, on les nomme *demi-tons*; mais les autres intervalles comme *ut re*, *re mi*, sont appellés des tons.

L'intervalle composé d'un ton & d'un demi-ton, prend le nom de *tierce mineure*: tels sont les intervalles, *mi sol*, *la ut*, *re fa*; mais l'intervalle composé de deux tons, comme *UT mi*, *fa la*, *sol si*, est appellé *tierce majeure*. En général la tierce majeure d'un ton est exprimée par $\frac{5}{4}$ de ce ton, de même le ton principal *ut* étant supposé 1, l'octave grave se trouvera en divisant 1 par 2, ou en multipliant le ton 1 par $\frac{1}{2}$, la double octave grave en multipliant par $\frac{1}{4}$, la triple octave en multipliant par $\frac{1}{8}$, & en montant depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à 1, ou depuis *ut* jusqu'à *UT*, en supposant que *UT* est le ton principal, $\frac{9}{16}$ sera le ton *re*, $\frac{5}{8}$ le ton *mi* &c.; de sorte que *la* sera une *tierce mineure grave*, & *fa* la *quinte grave* par rapport au ton *UT* représenté par 1; de même 3 exprimera la douzieme *aiguë* & $\frac{1}{3}$, la douzieme *grave*; la dix-septieme *majeure aiguë* sera représentée par 5, & la *grave* par $\frac{1}{5}$, de sorte que la douzieme *aiguë* d'un ton est l'octave de la *quinte* du même ton, & la dix-septieme *majeure aiguë* est la double octave de la *tierce majeure* du même ton. L'intervalle composé de trois tons s'appelle *triton* ou *quarte superflue*; si l'intervalle est composé de trois tons & d'un demi-ton, comme *ut sol*, *fa UT*, &c. on l'appelle *quinte*, on lui donne le nom de *sexte mineure*, s'il renferme trois tons & deux demi-tons, de *sexte majeure* lorsqu'il est formé par quatre tons & un

demi-ton, comme *ut la*; de *septieme mineure* s'il est composé de quatre tons & de deux demi-tons, comme *re UT*; de *septieme majeure*, s'il est formé par cinq tons & un demi-ton, comme *ut si*; enfin il prend le nom d'octave lorsqu'il est composé de cinq tons & de deux demi-tons : tel est l'intervalle *ut UT*. Si l'on suppose que les cordes d'un instrument de Musique rendent les tons dont on vient de parler, & qu'on prenne ensuite un autre instrument dont toutes les cordes rendent l'octave des cordes correspondantes du premier, on aura une nouvelle échelle, dont les tons feront l'octave des tons correspondans de la précédente, & parce que depuis *ut* dans la premiere échelle jusqu'à *re* dans la seconde échelle ascendente il y a neuf tons, l'intervalle entre ces deux sons est appellé *none*, de même l'intervalle entre *ut* de la premiere échelle & *fa* de la seconde est appellé *douzieme* : la double octave prend le nom de *quinzieme* ; la *dix-septieme* est la double octave de la *tierce*, & la *dix-neuvieme* est la double octave de la *quinte*. Si le ton d'une échelle est rendu plus grave d'un demi-ton, il prend le nom de *bémol*, & de *diese* s'il devient plus aigu du même intervalle.

150. Si l'on appelle *ut* le ton fondamental d'une corde, à cause que cette corde rend la *douzieme* & la *dix-septieme majeure*, on entendra aussi l'octave de *sol*, & la double octave du ton *mi*. Comme les instrumens de Musique donnent naturellement l'octave de *sol* & la double octave de *mi*, il paroît que ces tons & le ton *ut*, forment une consonnance conforme à la nature & plus parfaite : mais parce que les bornes de la voix ne permettent pas facilement de si grands intervalles, on substitue les octaves aux deux tons dont on vient de parler ; & de là naît le chant *ut mi sol*, qu'on peut regarder comme très-conforme à la nature, & parce que *ut mi* est une *tierce majeure*, ce chant prend le nom de *mode majeur*. Dans la seconde partie de l'expérience rapportée ci-dessus, on apperçoit un frémissement sans aucun son dans les cordes dont l'une seroit propre à rendre la *douzieme grave majeure* & l'autre la *dix-septieme grave majeure* de la corde pincée dont le son principal est *ut* ; de-là dérive un autre mode que les Musiciens nomment *mode mineur*. Pour comprendre la raison de cette dénomination, on doit remarquer

que la *tierce mineure grave* étant *la*, la *tierce majeure grave* sera *la bémol*; car la *tierce majeure* differe de la *mineure* d'un demi-ton; mais l'intervalle *UT la* est une *tierce mineure*; ainsi l'intervalle *UT la bémol* sera une *tierce majeure grave* : c'est pourquoi la *dix-septieme grave majeure* sera la double octave de *la bémol grave* : de même la *quinte grave* étant *fa*, la *douzieme grave* sera l'octave du ton *fa grave*, & en substituant les tons aux octaves, il résultera de-là un chant conforme à la nature, *fa la bémol UT* qui, parce que *fa la bémol* est une *tierce mineure*, a été appellée *mode mineur*.

Le chant *fa la bémol UT* est appellé *mode mineur*, parce que *fa la bémol* est une *tierce mineure*, il est regardé comme moins parfait que le *mode majeur* (quoiqu'il flatte l'oreille presqu'aussi agréablement), parce que dans les cordes dont on a parlé ci-dessus ces tons ne se font pas entendre, quoique les parties qui pourroient les rendre éprouvent un certain frémissement qui paroît indiquer que la nature tend, si l'on peut s'exprimer ainsi, à rendre ces sortes de sons.

Tels sont les principes d'où les Orphées modernes ont déduit les loix de la composition de la Musique. A l'égard des signes dont se servent les Musiciens ils sont entierement arbitraires; mais je ne prétends pas donner ici un traité complet d'une art dont je n'ai jamais fait mon occupation.

151. C'EST une question aussi importante que curieuse, pourquoi une belle Musique excite en nous le sentiment du plaisir? pourquoi par exemple la tierce mineure, dans laquelle les vibrations sont dans le rapport de 5 à 6 est si agréable, tandis que les sons dont les vibrations sont dans la proportion de 6 à 7, affectent l'ame d'une maniere si désagréable. Les savans sont bien partagés là-dessus. Il y en a qui prétendent que c'est une pure bisarrerie & que le plaisir que cause la Musique n'est fondé sur aucune raison, que la même Musique peut être goûtée par quelques-uns & déplaire à d'autres; mais bien loin que la question en soit décidée par-là, elle en devient plutôt plus compliquée; car on veut savoir la raison pourquoi la même piece de Musique peut produire de si différens effets, puisqu'il faut convenir que rien n'arrive dans le monde sans raison? D'autres disent que le plaisir que l'on sent en entendant une belle Musique

consiste dans la perception de l'ordre qui y regne. Ce sentiment paroît d'abord assez bien fondé & mérite d'être examiné plus soigneusement. La Musique renferme deux especes d'objets où l'on peut introduire un certain ordre. L'un se rapporte à la différence des tons, en tant qu'ils sont hauts ou bas, aigus ou graves; on doit se souvenir que cette différence est contenue dans le nombre de vibrations, que chaque ton rend en même tems. Cette différence qui se trouve entre la vîtesse des vibrations de tous les tons, est ce qui est nommé proprement *l'harmonie*; donc en entendant une Musique, lorsqu'on comprend les rapports ou les proportions que les vibrations de tous les tons tiennent entr'eux, on a la connoissance de l'harmonie; ainsi deux tons qui différent d'une octave excitent le sentiment de la proportion de 1 à 2, une quinte celui de la proportion de 2 à 3, & une tierce majeure celui de la proportion de 4 à 5. On comprend donc l'ordre qui se trouve dans quelqu'harmonie, quand on connoît toutes les proportions qui regnent entre les tons dont l'harmonie est composée; & c'est le jugement des oreilles qui conduit à cette connoissance. Ce jugement étant plus ou moins fin, on comprend pourquoi la même harmonie est apperçue par l'un & point du tout par l'autre, sur-tout quand les rapports entre les tons sont exprimés par des nombres un peu grands.

Mais outre l'harmonie la Musique renferme encore un autre objet susceptible d'ordre, qui est la mesure par laquelle on assigne à chaque ton une certaine durée, & la perception de la mesure consiste dans la connoissance de la durée de tous les tons & des proportions qui en naissent, comme si un ton dure deux fois, trois fois ou quatre fois plus qu'un autre. Le tambour & la timbale nous fournissent une Musique où la seule mésure a lieu, puisque tous les tons sont égaux entr'eux, & là, il n'y a point d'harmonie; comme il y a aussi une Musique où la seule harmonie a lieu, à l'exclusion de la mesure; mais une Musique parfaite contient & l'harmonie & la mesure. Maintenant celui qui entend une Musique, & qui comprend par le jugement de ses oreilles, toutes les proportions sur lesquelles, tant l'harmonie que la mesure est fondée,

a certainement la plus parfaite connoiſſance de cette Muſique qu'il ſoit poſſible, pendant qu'un autre qui n'apperçoit ces proportions qu'en partie ou point du tout, n'y comprend rien ou en a une connoiſſance imparfaite. Mais le plaiſir ſur lequel roule notre queſtion eſt encore bien différent de cette connoiſſance, dont on vient de parler; quoiqu'on puiſſe ſoutenir hardiment qu'une Muſique produit plus de plaiſir quand on en a une certaine connoiſſance. Car la ſeule connoiſſance de toutes les proportions qui regnent dans une Muſique, tant à l'égard de l'harmonie que de la meſure, ne ſuffit pas encore pour exciter le ſentiment du plaiſir; il faut quelque choſe de plus. Pour ſe convaincre que la ſeule perception de toutes les proportions d'une Muſique n'eſt pas ſuffiſante, on n'a qu'à conſidérer une Muſique fort ſimple qui ne marche que par des octaves, où la perception des proportions eſt certainement la plus aiſée; cependant il s'en faut beaucoup que cette Muſique cauſe du plaiſir, quoique celui qui l'entend en ait la connoiſſance. On dit donc que le plaiſir demande une connoiſſance qui ne ſoit pas trop facile, mais qui exige quelque peine; il faut, pour ainſi dire, que cette connoiſſance nous coûte quelque choſe. Mais à mon avis cela ne ſuffit pas encore: une diſſonance dont la proportion conſiſte en des plus grands nombres, eſt plus difficile à être compriſe, cependant une ſuite de diſſonances miſes ſans choix & ſans deſſein ne plaira pas. Il faut donc que le compoſiteur ait ſuivi dans ſa compoſition un certain plan ou deſſein, qu'il ait executé par des proportions réelles & perceptibles; & alors, lorſqu'un connoiſſeur entend cette piece, & qu'outre les proportions il en comprend le plan & le deſſein même que le compoſiteur a eu en vue, il ſentira cette ſatisfaction, qui eſt le plaiſir dont une belle Muſique frappe les oreilles intelligentes. Ce plaiſir vient donc de ce qu'on devine, pour ainſi dire, les vues & les ſentimens du compoſiteur, dont l'exécution en tant qu'on la juge heureuſe, remplit l'eſprit d'une agréable ſatisfaction. C'eſt à peu près une ſemblable ſatisfaction qu'on reſſent en voyant une belle pantomime, où on peut deviner par les geſtes & les actions, les ſentimens & les diſcours qui en ſont repréſentés, & qui exécu-

tent outre cela un beau dessein. Dès qu'on a deviné le sens d'une énigme proposée, & qu'on reconnoit qu'il est parfaitement exprimé dans la proposition de l'énigme, on en ressent un grand plaisir; au lieu que les énigmes plates & mal digérées n'en causent aucun. Voilà peut-être les vrais principes, sur lesquels sont fondés les jugemens sur la beauté des pieces de Musique. A ces raisons on pourroit ajouter que les concerts agréables produisent dans le fluide nerveux un mouvement doux, & dans les nerfs un ébranlement cadencé, auquel l'Auteur de notre être a attaché un certain sentiment de plaisir; mais comme ceci ne regarde plus les mathématiques, nous renvoyons ceux de nos lecteurs qui voudront connoître plus particuliérement pourquoi certaines choses plaisent aux uns tandis qu'elles déplaisent aux autres, à ce que nous avons dit sur cette matiere dans notre Métaphysique, dans le chapitre de de la sympathie & de l'antipathie, où ils trouveront peut-être des choses qui leur feront plaisir.

DE L'OPTIQUE.

152. J'ENTENDS ici par *Optique* la science qui a pour objet les propriétés de la lumiere.

Les bornes de cet ouvrage ne permettant pas de la traiter à fonds, je me contenterai de parler de quelques questions intéressantes, pour faire mieux sentir aux commençants les avantages & la fécondité de l'analyse.

Dans le mouvement de la lumiere, l'angle de réflexion est toujours égal à celui d'incidence, tandis que celui de réfraction est à celui d'incidence dans un rapport constant (*). Ces deux vérités fondées sur l'ex-

(*) Si l'on suppose qu'un rayon de lumiere AM aille choquer obliquement le plan DMC (fig. 107), en décomposant la vîtesse AM en AD = PM & AP = DM, il est visible que le choc sera exprimé par PM : car la vîtesse horisontale DM = MC ne tend qu'à faire glisser le globule de lumiere de M en C. Le ressort ou la force répulsive rendant après le choc la vîtesse perdue MP; si l'on compose cette vîtesse MP avec la vîtesse horisontale MC, on verra évidemment que le rayon de lumiere doit

périence sont, si l'on peut s'expliquer ainsi, le fondement de l'Optique. Si la lumiere passe de l'air dans le verre, l'angle de réfraction est à celui d'incidence, comme 2 : 3, si elle passe de l'air dans l'eau comme 3 : 4 environ, &c. Si la lumiere passoit de l'air dans l'eau sous un angle d'incidence d'environ 90°. (*) : l'angle de réfraction seroit d'environ 48°. 30'. C'est pourquoi si la lumiere passe de l'eau dans l'air sous l'angle de 48°. 30', il doit raser la surface de l'eau; mais si l'angle d'incidence étoit plus grand que 48°. 30' le sinus de l'angle de réfraction seroit plus grand que le sinus total, ce qui est absurde. Il n'est donc pas possible que dans ce cas le rayon sorte de l'eau; aussi l'expérience apprend qu'alors le rayon est réfléchi de la surface commune de l'air & de l'eau, & qu'il reste dans cette eau.

Supposons un point N (fig. 108, 109 & 110) placé dans l'axe d'un miroir sphérique concave ou convexe M A B, de maniere que le rayon incident N M, fasse un angle infiniment petit avec l'axe N C, il sera facile de trouver le point F dans lequel le rayon réfléchi par le point M rencontre l'axe. Menons du centre C le rayon CM qui sera le cathete d'incidence, & l'angle C M E (qui fig. 110) est $=$ N M g (son opposé au sommet), sera égal à l'angle de réflexion; M F (fig. 108 & 109) & M G (fig. 110) sera le rayon réfléchi. Puisque les droites C A, C M forment un angle très-petit, on peut supposer N A $=$ N M. Soit maintenant N A $=$ N M $=$ D la distance de l'objet au miroir, AC $= r$, F M $=$ FA $= f$, nous aurons F C $= f - r$, (fig. 109) ou $r - f$ (fig. 108 & 110),

suivre en se réflexissant le chemin M B, de maniere que l'angle A M D soit $=$ B M C, & l'angle A M P $=$ P M B.

(*) On doit faire attention que l'angle d'incidence d'un rayon de lumiere AM qui tombe sur une surface plane est celui que la direction de ce rayon fait avec la perpendiculaire P M, que j'appellerai le *cathete d'incidence*, & que l'angle de réflexion ou de réfraction est celui que fait le rayon réfléchi ou refracté avec la même perpendiculaire ou avec son prolongement.

& CN $= D - r$, (fig. 108) ou $= r - D$ (fig. 109), & $=$ $D + r$ (fig. 110). Cela posé, à cause que l'angle FMN (fig. 108 & 109) & NMG (fig. 110) est divisé en deux parties égales par la ligne CM, l'on aura pour les fig. 108 & 109 (v. Géomét. n°. 52) CN : CF :: MN : MF, ou $\pm D \mp r$: $\pm f \mp r : D : f$. Donc dans les miroirs concaves l'on a $f = \frac{Dr}{2D - r}$. Mais dans le miroir convexe MAB (fig. 110), CN : MN :: *sin.* CMN $=$ *sin.* CME $=$ *sin.* CMF : *sin.* MCN $=$ *sin.* MCF. Mais le triangle FMC donne *sin.* FMC : *sin.* MCF :: CF : FM. Ainsi CN : CF :: MN : MF, ou $D + r : r - f :: D : f = \frac{D.r}{2D + r}$. C'est pourquoi la formule générale pour les miroirs concaves & convexes sera $f = \frac{Dr}{2D \mp r}$; mais cette formule n'a lieu qu'autant que l'arc AM est fort petit, aussi bien que l'angle CNM.

Si le rayon incident NM (fig. 108) est parallèle à l'axe NA, c'est-à-dire, si l'objet N est situé à une distance qu'on puisse regarder comme infinie, l'angle NMC sera égal à l'angle FCM, son alterne interne, & le triangle CMF sera isocelle, & si les rayons qui se rassembleront en F ou tout près de F sont en assez grande quantité, ils pourront brûler un objet combustible situé en F.

Supposons que l'objet N est infiniment proche du miroir, on aura $D = \pm \frac{1}{\infty}$, & $f = \frac{1}{\mp \infty}$. Dans le miroir concave le signe $-$ fait voir que l'image de l'objet est placée hors du miroir sur le prolongement de l'axe; au contraire dans le miroir convexe l'image est alors située du côté de la concavité, & cela arrive toujours dans ce miroir, parce que $f = \frac{D.r}{2D + r}$ est toujours une quantité positive. Si l'on suppose $2D < r$, $2D - r$

sera

ſera une quantité négative, & $f = \frac{D.r}{2D-r}$ ſera auſſi une quantité négative; c'eſt pourquoi l'image de l'objet ſera derriere le miroir. Si $D = \frac{r}{2}$, l'on aura $f = \infty$. C'eſt pourquoi ſi l'objet eſt ſitué à une diſtance du miroir concavé égale au quart de ſon diamètre, l'image ſera à une diſtance infinie. Si le miroir eſt convexe, f ſera $= \frac{r}{4}$. Si dans le miroir concave l'on prend $2D > r$, $f = \frac{D.r}{2D-r}$ ſera une quantité poſitive, & l'image ſera ſituée du côté de la concavité. Si $D = r$, l'on aura $f = r$, c'eſt-à-dire, ſi l'objet eſt ſitué au centre du miroir ſon image ſe confondra avec cet objet. Mais ſi dans le miroir convexe on ſuppoſe $D = -r$, on aura $f = \frac{r}{3}$. Si $D = \infty$, l'on a $f = \frac{r}{2}$ dans le miroir concave; c'eſt la même choſe dans le miroir convexe, en ſuppoſant $D = -\infty$. On comprend facilement pourquoi ſi l'œil ſe trouve placé au centre du miroir concave, la viſion eſt confuſe; car alors l'œil ſe voit de tous côtés ſur la ſurface du miroir.

153. Si un arc de cercle QPO dont le centre eſt le même que celui du miroir (fig. 111 & 112), eſt placé devant le miroir B A D, ſon image *opq* ſera auſſi un arc de cercle concentrique, plus grand ou plus petit ſelon ſa diſtance au centre C. De plus ſon image ſera droite, c'eſt-à-dire, que la ſituation de l'image de l'objet ſera la même que celle de l'objet, ſi l'objet & l'image ſe trouvent du même côté par rapport au centre du miroir; mais l'image ſera renverſée lorſque le centre ſera ſitué entre elle & l'objet. En effet puiſque l'arc O P Q eſt concentrique au miroir BAD, les droites OB, PA, DQ qui paſſent par le centre C, & ſur leſquelles ſont ſituées les images *o*, *p*, *q* des points O, P, Q ſont égales entr'elles; c'eſt pourquoi D, qui dans la formule générale repréſente la longueur de ces droites, ſera une quantité conſtante, auſſi bien que *r*; & partant *f* ſera auſſi une quantité conſtante, c'eſt-à-

dire les droites *o*B, *p*A, *q*D sont égales : ce qui ne peut être à moins que les arcs *opq*, OPQ, BAD ne soient concentriques. Il est donc visible que l'image & l'objet étant placés du même côté par rapport au centre (fig. 112), l'image & l'objet auront la même situation, puisque tous les points de l'image sont situés dans le même demi-diamètre qui passe par les points analogues de l'objet : mais si l'image est au-delà du centre relativement à l'objet (fig. 111), à cause que les droites sur lesquelles se trouvent les images de toutes les parties de l'objet, passent nécessairement par le centre du miroir, les lignes qui viennent d'un point situé au-dessus de l'axe qui passe par le milieu de l'objet, vont se rencontrer au-dessous de cet axe, après avoir passé par le centre & réciproquement ; par conséquent si quelqu'une de ces droites qui sont situées au-dessus de l'axe, part de la partie supérieure de l'objet, qui par conséquent est aussi située au-dessus de l'axe, son image sera située au-dessous du même axe, puisqu'elle doit se trouver sur une ligne qui passe par le centre & au-delà du centre. Il n'est pas moins évident que l'image étant concentrique au miroir, doit être d'autant plus petite qu'elle est située plus près de son centre, & au contraire elle sera d'autant plus grande qu'elle sera plus éloignée du centre. Ce qu'on vient de dire fait voir aussi que dans le miroir convexe, l'image d'un objet concentrique au miroir doit être aussi concentrique au même miroir ; car cette image & l'objet sont au-delà du centre du miroir ; & parce que l'image s'approche du centre du miroir d'autant plus qu'on éloigne davantage l'objet : elle devient de plus en plus petite. Dans le miroir concave l'image est droite, & sa grandeur augmente si l'objet va de la surface du miroir au quart du diamètre ; elle décroît ensuite & prend une situation renversée lorsque l'objet s'approche du centre. Enfin elle croît de nouveau & reste renversée si l'objet s'éloigne davantage du centre.

Il n'est pas difficile de comprendre que l'image doit être, d'autant plus petite, tout d'ailleurs étant égal, que le rayon du miroir est plus petit. Au reste, ce que l'on vient de dire ne peut avoir lieu exactement pour les objets d'une figure quelconque, à moins qu'on ne les suppose assez petits pour que leur largeur puisse

être considérée comme un arc concentrique au miroir. En effet, si les objets n'ont pas une figure sphérique concentrique au miroir, leurs images paroissent d'autant plus difformes que leur surface est plus grande & le rayon du miroir plus petit. Si, par exemple, l'on présente une ligne droite à un miroir sphérique dans une situation perpendiculaire à l'axe du miroir, son image sera curviligne; car les points de cette ligne étant inégalement distants du miroir, leurs images seront aussi représentées dans des distances inégales; mais ces inégalités ne sont pas dans un même rapport.

154. La formule précédente est très-propre à nous faire découvrir les propriétés des miroirs plans; car en supposant $r = \infty$, la formule $f = \frac{Dr}{2D - r}$ devient $f = -D$. de-là il suit que dans les miroirs plans l'image est autant éloignée au-delà du miroir que l'objet l'est en deçà, & il est évident qu'elle est toujours placée dans une situation droite. Puisque dans les miroirs sphériques les images des différents points de l'objet sont situées sur une ligne droite qui passe par le centre & par ces points, & qui est par conséquent perpendiculaire à la surface du miroir; il est visible que dans le miroir plan, les images de tous les points de l'objet sont situées sur une perpendiculaire menée de chacun de ces points à la surface du miroir. Enfin, puisque les perpendiculaires menées des extremités de l'objet au miroir sont parallèles entr'elles, il est évident que l'image de l'objet doit avoir les mêmes dimensions que cet objet. Dans un miroir plan situé horisontalement, les objets droits paroissent renversés, & au contraire si le miroir est incliné, les objets paroissent inclinés du côté opposé. Si le plan du miroir fait un angle de 45 degrés avec l'horison, les objets situés horisontalement paroissent verticaux, & les objets verticaux paroissent dans une situation horisontale; ce qui vient de ce que toutes les parties de l'objet sont représentées derriere le miroir, & celles qui sont les plus près de la surface antérieure du miroir, sont aussi représentées plus près derriere le miroir; tandis que les parties les plus éloignées sont aussi représentées plus loin derriere le miroir.

155. SOIT maintenant un objet O (fig. 113) donné de position, & BAI une surface sphérique réfringente, dont le rayon soit AK & supposons que le sinus de l'angle d'incidence est au sinus de l'angle de réfraction comme p est à q, par le point O & le centre K menons la ligne indéfinie OK. Soit OI le rayon incident infiniment proche de l'axe OA, & menons du point K au point I le cathete d'incidence KI; il est visible que la ligne KG perpendiculaire sur le rayon incident OI, sera le sinus de l'angle d'incidence KIG. C'est pourquoi faisant la proportion $p : q :: KG : x$, la quantité x sera le sinus de l'angle de réfraction. Donc si avec le rayon $KH = x$ on décrit du point K un arc de cercle, auquel on mene du point I une tangente IH qui aille rencontrer l'axe AO en P, PI ou son prolongement représentera le rayon réfracté, KIP sera l'angle de réfraction & la ligne KH le sinus de cet angle: & parce que la même construction a lieu pour les autres rayons infiniment proches de l'axe OA, ces rayons seront réfractés de maniere qu'ils seront tous dirigés vers le point P, qui sera par conséquent l'image ou le foyer.

Soit maintenant $OA = OI = D$, le rayon de sphéricité $KI = \pm r$, si l'objet est situé du côté de la convexité on fera ce rayon $= + r$, $AP = IP = f$; la construction dont nous venons de parler donnera $p : q :: KG : KH$, d'où l'on tire $KG = \frac{p.KH}{q}$. Mais à cause de l'angle AOI infiniment petit, l'arc IA peut être regardé comme une ligne droite perpendiculaire à l'axe OA; de sorte que les triangles rectangles OAI, OKG sont censés semblables aussi bien que les triangles PAI, PKH. Donc on aura les proportions suivantes $OK : OI :: KG : AI = \frac{OI \times KG}{OK}$, & $KH : AI :: PK : PI = PA$. Donc en faisant le produit des extrêmes égal à celui des moyens, divisant par KH & substituant la valeur de AI, on trouvera $PA = \frac{OI \times KG \times PK}{OK \times KH}$.

Donc en ſubſtituant les valeurs algébriques, il viendra $f = \frac{Dpr}{Dp - q(D+r)} = \frac{Dpr}{D(p-q) - rq}$ pour les ſurfaces convexes ; mais pour les ſurfaces concaves, on aura $f = \frac{Dpr}{D(q-p) - rq} = \frac{Dpr}{q(D-r) - Dp}$.

Si la lumiere paſſe de l'air dans le verre, on pourra faire $p = 31$ & $q = 20$; c'eſt pourquoi dans le premier cas, f ſera $= \frac{31\,Dr}{11\,D - 20\,r}$; mais dans le ſecond cas, il vient $f = \frac{31\,Dr}{-11\,D - 20\,r}$. Si nous ſuppoſons deux milieux homogènes d'une étendue immenſe, l'un d'air & l'autre de verre, de maniere que la ſurface du verre ſoit ſphérique & convexe du côté de l'air & qu'un objet lumineux s'éloigne de cette ſurface dans l'air à l'infini en ſuivant une ligne perpendiculaire à cette ſurface, on pourra facilement déterminer la poſition de l'image. En effet ſi dans la formule $f = \frac{31\,Dr}{11\,D - 20\,r}$ on ſuppoſe la valeur de D plus petite que $\frac{20.r}{11}$ & plus grande que zero, f ſera une quantité négative ; donc l'image ſera hors du verre : car la valeur poſitive de f déſigne la diſtance de la ſurface réfringente par rapport à une image ſituée au delà de cette ſurface par rapport à l'objet. Cette image ſera toujours droite & pourra s'éloigner à l'infini de la ſurface réfringente. Si la valeur de D eſt entre $\frac{20.r}{11}$ & $\infty\, r$, f ſera toujours une quantité poſitive, l'image ſera ſituée dans le verre dans une ſituation renverſée, elle s'approchera enſuite de la ſurface réfringente juſqu'à la diſtance de $\frac{31\,r}{11}$.

Si la ſurface qui ſépare les deux milieux tourne ſa

concavité à l'air, alors on a $f = \frac{31 Dr}{-11 D - 20 r}$, & quelle que soit la grandeur de la distance D, f sera une quantité négative, de maniere que l'image située hors du verre sera toujours droite : il est facile de voir ce qui doit arriver lorsque D croît depuis zero jusqu'à ∞ r.

156. DANS l'usage des verres il y a ordinairement deux réfractions, l'une à l'entrée, l'autre à la sortie. Soit O la position de l'objet (fig. 114) sur l'axe OP d'un verre convexe des deux côtés, qu'on appelle *lentille*, & soient C & K les centres des surfaces sphériques qui forment celle de la lentille, on pourra trouver le point F dans lequel le rayon OI infiniment proche de l'axe OA va rencontrer cet axe après deux réfractions. Soit OA = D, CB = R, KA = r, FB = x, PB = z, P étant le point dans lequel le rayon incident OI iroit rencontrer l'axe après la premiere réfraction. Soit AB = e l'épaisseur de la lentille, CD = m, KG = n, p le sinus d'incidence & q le sinus de l'angle de réfraction dans l'entrée ; il est visible que nous aurons la proportion $p : q :: KG = n : KH = \frac{nq}{p}$; on aura de même $q : p ::$ $CD = m : CE = \frac{mp}{q}$. D'ailleurs à cause des triangles rectangles semblables OAI, OKG, on aura OG = OK : OA :: GK : AI, c'est-à-dire $D + r : D :: n : AI = \frac{Dn}{D+r}$. De même à cause des triangles semblables PAI, PKH, on trouvera $PA = z + e : PH = z + e - r :: AI = \frac{Dn}{D+r} : KH = \frac{nq}{p}$. Donc en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, nous aurons une équation d'où l'on tirera $z = \frac{Deq + eqr + Dpr - Dep}{Dp - Dq - qr}$. D'un autre côté les triangles semblables PCD, PBT donnent $PD = z + R : PB = z :: CD = m : BT =$

$\frac{mz}{z+R}$. Enfin à cause des triangles semblables FCE, FBT, on aura la proportion $FC = x + R : FB = x :: CE = \frac{pm}{q} : BT = \frac{mz}{z+R}$, d'où l'on tire $z = \frac{pRx}{qx + qR - px}$. Substituant dans cette équation la valeur de z trouvée ci-dessus, il viendra, toute réduction faite $x = (DpqRr + Deq^2R - DepqR + eq^2rR) : (Dp^2R - DpqR - pqrR - Deq^2 - Dpqr + 2Depq - Dep^2 + Dp^2r - eq^2r + epqr)$ (*).

Si l'on suppose $p = 31$ & $q = 20$, la formule précédente devient $x =$

$$\frac{620DrR - 220DeR + 400erR}{341DR + 341Dr - 620rR - 121De + 220er}$$: & si on suppose $e = 0$, c'est-à-dire si on néglige l'épaisseur du verre, il viendra $x \frac{20DrR}{11DR + 11Dr - 20rR}$: enfin si on suppose $r = R$, on aura $x = \frac{10Dr}{11D - 10r}$.

Si la lentille de verre est supposée également convexe des deux côtés & qu'un objet lumineux assez petit situé d'abord en A, s'éloigne à l'infini en suivant la direction de l'axe AO, il est évident par la formule $x = \frac{10Dr}{11D - 10r}$, que D étant supposée $= 0$, l'image de l'objet sera droite & se confondra avec cet objet, elle s'éloignera du verre à l'infini en allant du même côté que l'objet, ce qui arrivera lorsqu'on aura $D = \frac{10r}{11}$.

Dans les autres valeurs de D, depuis $D = \frac{10r}{11}$

(*) Les deux points indiquent une division.

jusqu'à $D = \infty r$, la valeur de x est positive & décroissante, l'image sera renversée & située du côté opposé à l'objet, elle reviendra de l'infini jusqu'à une distance du verre $= \frac{10 r}{11}$, & les rayons qui la formeront sortiront du verre d'abord parallèles, puis convergents de plus en plus.

Si la lentille est *plano-convexe*, on pourra supposer $R = \infty$, & alors on trouve $x = \frac{20 D r R}{11 DR + 11 Dr - 20 r R}$ $= \frac{20 D r}{11 D - 20 r}$.

Si la lentille est également concave des deux côtés, on doit changer le signe du rayon r pour avoir $x = \frac{-10 D r}{11 D + 10 r}$. Mais si la lentille est *plano-concave*, il viendra $x = \frac{-20 D r}{11 D + 20 r}$. Enfin si la lentille est convexe d'un côté & concave de l'autre on pourra supposer un des rayons négatifs, de sorte qu'en donnant le signe $-$ à R & négligeant l'épaisseur de la lentille, on trouvera $x = \frac{20 D r R}{11 DR - 11 Dr - 20 r R}$.

157. ON peut supposer dans la pratique qu'un objet est infiniment éloigné à l'égard d'une lentille, lorsque sa distance est 1000 fois plus grande que le rayon de sphéricité. Ainsi si dans la formule $x = \frac{10 D r}{11 D - 10 r}$, on suppose $r = 10$ pouces & $D = 10000$, on trouvera $x = 9.102$ pouces; mais en faisant $D = \infty$, il vient $x = 9.091$ pouces de maniere qu'il ne s'en faut que d'un centieme de pouce environ que l'image ne soit au même point, soit qu'on suppose l'objet à une distance mille fois plus grande que ne l'est le rayon de sphéricité, ou qu'on suppose l'objet à une distance infinie.

158. LE *Télescope astronomique* est composé d'une lentille PQ de laquelle l'œil doit être très-proche, & qu'on

nomme *oculaire* (fig. 115) ; cette lentille est convexe de deux côtés ou seulement d'un seul côté. Elle est située de maniere que son foyer *o* concourt avec celui du verre MN, qu'on nomme *objectif* ; mais ce foyer commun doit se trouver entre les deux verres. Cette construction fait voir que les rayons qui viennent d'un point O d'un objet OB très-éloigné, après avoir été réfractés à travers le verre objectif, se rassemblent au foyer *o* où ils peignent l'image du point O. Mais les rayons qui viennent d'un objet OB fort éloigné doivent être considérés comme parallèles, & d'ailleurs on considere aussi le point O comme placé dans la ligne droite qui passe par le centre des verres, qu'on appelle à cause de cela *axe* du télescope. Maintenant nous pouvons supposer que l'image du point O est un objet situé au foyer de l'oculaire PQ ; c'est pourquoi les rayons qui représentent cet objet doivent sortir parallèles de l'oculaire, & ces rayons sont d'autant plus denses que le foyer de l'oculaire est plus court que celui de l'objectif. Ainsi ces rayons doivent peindre au fond de l'œil une image d'autant plus vive que la surface de l'objectif sera plus grande ; puisque le nombre des rayons admis est proportionel à cette surface. Il est encore évident que dans chaque distance de l'oculaire, pourvu néanmoins que l'œil se trouve dans la direction des rayons parallèles ou à peu-près parallèles qui sortent de l'oculaire, l'image du point qu'un faisceau a formée au foyer de l'objectif, sera également claire. D'un autre côté les rayons qui partent du point B doivent former l'image de ce point en *b* auprès du foyer *o*, pour sortir ensuite parallèles de l'oculaire ; mais cependant d'autant plus inclinés à l'axe que la courbure de cet oculaire est plus grande. Pour que l'œil puisse voir toute l'image *ob*, il doit être placé au foyer F qui est le concours de tous les faisceaux que forment les rayons qui partent de tous les points de l'objet OB, qui paroît renversé, parce que son image *ob* a une situation opposée à celle de cet objet ; c'est pourquoi le *champ* du télescope, c'est-à-dire, l'espace que lœil convenablement situé en F peut voir, dépend surtout de la grandeur de l'image *ob* ; puisque l'œil peut voir tous les points dont l'image se trouve dans le foyer ou

très-près du foyer de l'oculaire. D'un autre côté si l'objet s'approche de l'objectif, son image s'en éloignera ; de sorte qu'il faudra augmenter la distance de l'oculaire afin que l'image se trouve toujours placée à son foyer. C'est pourquoi la distance de l'objectif & de l'oculaire doit changer lorsque la distance de l'objet change. De même si celui qui fait usage d'un télescope est myope, c'est-à-dire a la vue courte & l'œil trop convexe, il est nécessaire de diminuer la distance qu'il y a entre l'oculaire & l'objectif, de maniere que l'image *o b* de l'objet se trouvant entre l'oculaire & son foyer, les rayons qui tombent sur la lentille oculaire en sortent un peu divergens ; car la figure de l'œil myope les fera assez converger & réunir les rayons de chaque point de l'image sur un point situé au fond de l'œil, où se trouve la rétine qui n'est qu'une expansion du nerf optique.

Nous avons dit que les objets paroissent renversés dans les télescopes astronomiques ; mais en ajoutant deux autres lentilles, qu'on nomme aussi *oculaires*, l'objet paroît droit, & l'on a une lunette d'approche propre à faire appercevoir les objets terrestres (fig. 116.). Les quatres lentilles ont un axe commun & le foyer de chacune concourt ordinairement avec ceux des autres entre lesquelles elle se trouve.

159. LA force des *microscopes* dépend des mêmes principes. Soit M N (fig. 117) une lentille convexe de deux côtés, placée de maniere que son foyer se confonde avec le point O de l'objet O B ; les rayons qui partent de ce point & qui traversent la lentille M N en sortent parallèles , & forment au fond d'un bon œil une image vive. Le point B du même objet est assez proche de l'axe pour qu'on puisse le regarder comme situé au foyer ; de sorte qu'il envoye des rayons qui entrent dans l'œil sensiblement parallèles, mais d'autant plus inclinés à l'axe que la distance du foyer est plus petite ; C'est pourquoi si l'œil est placé au point *o* de l'axe par lequel passe le rayon *principal* B C (c'est celui qui passe par le centre de la lentille) , l'objet O B sera vu distinctement sous l'angle B *o* O. Supposons maintenant que les objets ne sont vus d'une maniere claire s'ils ne sont éloignés de l'œil d'environ 7 à 8 pouces , & que *o b* représente cette distance, on jugera que cet objet

eſt placé en cb, & la grandeur apparente ſera augmentée dans le rapport de $oc : o$O (*). C'eſt pourquoi la grandeur apparente des objets qu'on conſidére à travers une lentille dépend auſſi de la conformation de l'œil. On fait auſſi des microſcopes avec de très-petits globes de verre : en effet ſi dans la formule générale dont on a parlé ci-deſſus on fait $p = 3$ & $q = 2$, ce qui a lieu à peu-près dans le paſſage de l'air dans le verre, on trouvera en faiſant encore l'épaiſſeur e du verre $= 2r$, on trouvera dis-je $x = \frac{r}{2}$; c'eſt-à-dire ſi un objet eſt placé dans l'axe d'une petite ſphère de verre à la diſtance d'un quart de ſon diamètre, les rayons de lumiere après avoir traverſé la ſphère en ſortiront parallèles ; c'eſt pourquoi non-ſeulement on appercevra cet objet clairement, mais on le verra d'autant plus grand qu'il ſera plus près de l'œil.

Il y a d'autres microſcopes compoſés de deux lentilles convexes (fig. 118) dont la lentille objective M N a un foyer plus court. Un peu au-delà de cette lentille on place l'objet O B, afin que ſon image ſoit éloignée & groſſie à proportion : on fait enſuite tomber le foyer de l'oculaire ſur cette image afin qu'on puiſſe voir l'objet diſtinctement. Cette conſtruction fait voir que la diſtance de l'image de l'objet par rapport à l'objectif varie beaucoup par un petit déplacement de l'objet. Enfin la grandeur apparente de l'objet change à proportion que l'image ob s'approche de l'objectif & qu'elle diminue. Par les principes, ci-deſſus on peut eſtimer l'augmentation apparente des objets vus à travers un téleſcope ou un microſcope. L'extrémité B d'un objet (fig. 115) eſt vue par un faiſceau F P de rayons parallèles, & l'extrémité O par le faiſceau K F ; ainſi le téleſcope fait voir l'objet ſous l'angle P F K ; & parce que l'image ob eſt ſituée au foyer de l'oculaire P Q, les rayons qui partent du point b doivent ſortir de l'ocu-

(*) Lorſque rien ne s'oppoſe au jugement que nous portons ſur la grandeur d'un objet éloigné, nous l'eſtimons par l'angle optique, c'eſt-à-dire, par l'angle que font deux rayons viſuels menés de l'œil aux extrémités de l'objet.

laire parallèles au rayon principal bK; ainsi l'angle $PFK = bKo$, & parce que le rayon BD ne souffre aucune réfraction, un œil situé en D verroit sans télescope, l'objet OB sous l'angle $BDO = bDo$. C'est pourquoi l'angle sous lequel on voit un objet par le moyen du télescope, est à celui sous lequel on le verroit sans télescope comme l'angle $bKo : bDo$. Mais en prenant bo pour rayon, oK sera la cotangente de l'angle bKo, & oD la cotangente de l'angle bDo; donc les cotangentes des angles bKo, bDo sont entr'elles comme $oK : oD$, & leurs tangentes sont comme $oD : oK$. Et parce que les grandeurs apparentes des objets, sur-tout éloignés, dépendent principalement des angles sous lesquels on voit leurs demi-diamètres, le demi-diamètre d'un objet vu à travers un télescope est au demi-diamètre du même objet vu sans télescope, comme la longueur du foyer de l'objectif est à celui de l'oculaire; de sorte que les grandeurs apparentes des objets, sont en raison directe des longueurs des foyers des objectifs, & en raison inverse de celles des oculaires.

Il est évident encore que s'il s'agit d'un objet fort éloigné vu sous un petit angle, d'un degré par exemple, ou moindre, les distances de cet objet par rapport à l'œil du spectateur, sont en raison inverse des sinus des angles sous lesquels ont les voit, ou en raison inverse des angles optiques; car les petits angles sont proportionnels à leurs sinus, aussi-bien qu'à leurs tangentes.

160. SUPPOSONS que l'ouverture de l'objectif restant la même, on employe successivement plusieurs lentilles oculaires, le même objet paroîtra d'autant plus obscur que le foyer de l'oculaire sera plus court. La raison en est évidente; car les faisceaux de rayons parallèles de quelle couleur qu'ils soient, qui se coupent dans l'œil, forment une espèce de cône dont la base est sur l'oculaire & le sommet dans l'œil (*);

(*) Supposons qu'ayant fait un trou de la grosseur d'une plume à écrire au volet d'une fenêtre, on introduise dans une chambre obscure un rayon de soleil, si l'on intercepte ce rayon, en lui présentant une des faces Q R d'un prisme triangulaire de verre (fig. 119), tellement que son axe soit perpendiculaire à celui de ce faisceau;

or cet angle eſt d'autant plus grand que le foyer de l'oculaire eſt plus court; c'eſt pourquoi les rayons entrent dans l'œil plus ou moins diſperſés & peignent l'image de l'objet au fond de l'œil d'une maniere moins réguliere lorſque cet angle eſt trop grand. D'un autre côté l'ouverture de l'objectif reſtant la même, l'obſcurité eſt d'autant plus grande que la denſité de la lumiere eſt moindre ; de ſorte que l'obſcurité ſuivra la raiſon de ſon aire, c'eſt-à-dire que l'obſcurité ſera comme les quarrés des diamètres apparens, ou en raiſon des quarrés des longueurs des foyers des oculaires : puiſque les demi-diamètres apparents ſuivent la raiſon inverſe des longueurs des foyers des oculaires lorſque l'objectif ne varie pas. Avec un peu d'attention il eſt

alors l'image blanche D (qu'on verroit ſans l'interpoſition du priſme) ſe change en une figure lumineuſe FG placée plus haut ſur la muraille blanche LK, oblongue, arrondie par les deux bouts, & compoſée de ſept couleurs, *rouge*, *orangé*, *jaune*, *verd*, *bleu*, *pourpre*, *violet*. Cette expérience fait voir que la couleur blanche qui ſe peignoit en D avant l'interpoſition du priſme eſt un aſſemblage ou mêlange des ſept couleurs dont nous venons de parler. Le rayon rouge déſigné par *r* eſt celui qui s'écarte le moins de ſa direction primitive; l'orangé déſigné par *o* s'écarte un peu plus ; le jaune déſigné par *j* s'écarte encore plus, & ainſi de ſuite juſqu'au violet (indiqué par *v*) qui eſt le plus refrangible. Ce ſont les gouttes de pluie, qui en tombant d'un nuage expoſé au ſoleil, produiſent en ſéparant les rayons de la lumiere, les belles couleurs de l'arc en ciel. Les corps qui abſorbent certains rayons, qui ne réflexiſſent ou qui ne tranſmettent qu'une eſpece de rayons, comme les rouges, par exemple, doivent paroître rouges ; tandis que ceux qui abſorbent tous ou preſque tous les rayons, excepté les bleus, paroiſſent bleus, &c. Cependant les rayons de la même couleur ont des nuances & ne ſont pas également refrangibles. Mais ſi l'on ſépare le rayon rouge, par exemple, pour le faire paſſer par un ſecond priſme, il demeurera de la même couleur, ce qui prouve que cette couleur lui eſt naturelle, & qu'elle ne vient pas du priſme.

aisé de comprendre que les rayons parallèles M *m* (fig. 120) qui traversent une lentille N P ne vont pas tous se réunir au même point F ; mais qu'il y en a plusieurs qui vont rencontrer l'axe en *r* ; de maniere que le foyer a une petite longueur *v r*. Ainsi l'image de chaque point de l'objet O B se peint sur chaque point de la ligne *v r*, ce qui rend la vision un peu confuse. On remédie à cet inconvénient, en diminuant l'ouverture de l'objectif par le moyen d'un *diaphragme*, c'est-à-dire d'une surface plane, noire & opaque, percée d'un trou rond : car le diaphragme absorbe les rayons superflus & ne laisse passer que ceux qui peuvent former un foyer assez petit pour que la vision n'en soit pas troublée. On a soin de peindre en noir la surface interne du télescope afin d'absorber les rayons qui étant entrés avec trop d'obliquité pourroient être réfléchis vers l'oculaire par la surface du télescope. Il y a encore une autre cause d'imperfection, je veux parler de la différente réfrangibilité des rayons (*) ; car la lumiere est composée de sept rayons *rouge*, *orangé*, *jaune*, *verd*, *bleu*, *pourpre*, *violet*. Mais ces couleurs ont des nuances, c'est-

(*) La figure 121 fait voir que l'image d'un objet S Q peinte au fond de l'œil, occupe un espace *q r s*, d'autant plus grand que l'angle optique ou son opposé au sommet *q p s* est plus grand : or c'est principalement par cet angle qu'on estime la grandeur des objets un peu éloignés. La vision sera confuse si l'image de l'objet se peint au fond de l'œil d'une maniere irréguliere, ce qui arrive lorsque l'angle optique est trop grand, parce que les rayons qui partent des différens points de l'objet ne peuvent pas par les réfractions qu'ils souffent en traversant les humeurs de l'œil, aller se réunir justement sur la *rétine*, qui tapisse le fond de l'œil, & peindre convenablement les points, mais ils se réunissent en-deçà, ou bien leur point de réunion est au-delà de la surface de cette rétine, que je suppose être l'organe de la vue, quoiqu'il y ait des Physiciens très-habiles qui donnent cette fonction à la *choroïde* qui est une membrane noire recouverte en partie par la rétine ; mais ceci regarde la Physique.

à-dire que tous les rayons rouges ne se réfractent pas également, de maniere que le sinus de réfraction étant exprimé par 1, dans le passage de l'air dans le verre, celui d'incidence des rayons rouges varie depuis 1.54 jusqu'à 1.5425; celui des rayons orangés depuis 1.5425 jusqu'à 1.544; celui des rayons jaunes depuis 1.544 jusqu'à 1.54667; celui des verds depuis 1.54667 jusqu'à 1.55; celui des bleus depuis 1.55 jusqu'à 1.55333; celui des pourpres depuis 1.55333 jusqu'à 1.55555; & enfin celui des violets depuis 1.55555 jusqu'à 1.56. Si dans la formule ci-dessus, on suppose $e = o$, $r = R$ & $D = \infty$, on aura $x = \frac{qr}{2p - 2q}$, si l'on fait $q = 1$, & successivement $p = 1.54$ pour les rayons rouges, puis $p = 1.56$ pour les violets, on aura $x = \frac{qr}{2p - 2q} = 0.9259\,r$, pour les rayons rouges & $x = 0.8928\,r$ pour les violets. La différence 331 entre les co-efficiens de r, est la vingt-huitieme partie du plus grand; donc lorsque l'objet est à une grande distance, la longueur du spectre coloré formé par la différente réfrangibilité de la lumiere est le $\frac{1}{28}$ de la longueur du foyer de la lentille; & parce que la lumiere est la plus dense, & la moins séparée qu'il est possible vers le milieu F du foyer, on peut supposer que l'image des objets blancs tels que sont les astres, est située en F, & que dans un télescope les limites de la vision confuse occasionnée par la différente refrangibilité des rayons sont de part & d'autre du vrai lieu de l'image de l'objet éloignées à $\frac{1}{55}$ environ de la longueur du foyer de l'objectif. Mais à cause des triangles semblables vCD, vPN, on a CD : Dv :: PN : vN; donc DC $= \frac{1}{55}$. PN; c'est-à-dire le diamètre CN des franges colorées qui entourent l'image F d'un point fort éloigné, est $\frac{1}{55}$ de celui de l'ouverture de l'objectif. Ces franges, ou iris, ou nébulosités rendent confuses les images des objets, & c'est pour diminuer cette confusion qu'on diminue les ouvertures des objectifs (*); mais comme par ce moyen on perd

(*) L'Ingénieux Dollond ayant pris du verre blanc-

de la lumiere, & par conséquent de la clarté dans l'image, il faut régler les ouvertures des objectifs, de sorte qu'il y entre suffisamment de lumiere, que les images soient nettes, sans iris sensibles, ce qu'on peut déterminer par expérience, selon la bonté des verres dont

---

d'Angleterre dont on se sert pour les télescopes ordinaires, il en fit un objectif MN (fig. 122) plan concave, le foyer de cet objectif pour un télescope de trois pieds est de 12. 6 pouces. La concavité qui étoit tournée du côté de l'oculaire recevoit la convexité antérieure d'une lentille convexe de deux côtés faite d'un verre dont la force refrangible étoit différente (le *flintglass* est un verre qu'on fait en Angleterre, qu'on a voulu imiter en France à cause de son utilité pour la construction des télescopes, mais dont on n'a pu encore trouver la véritable composition : dans ce verre le rapport moyen du sinus d'incidence au sinus de refraction est celui de 1. 5 9 8 : 1, mais dans le verre Anglois ordinaire *crowanglass*, ce rapport est égal à celui de 1.54 : 1), & dont le foyer étoit de 8. 9 pouces; ainsi l'objectif de cette lunette est composé de deux verres qui ont des réfractions différentes; de maniere que l'une des réfractions corrige l'autre, comme cela arrive dans les humeurs de l'œil, & les couleurs ne se séparent pas. Or quoique la lumiere qui traverse cet objectif ne se décompose pas en différentes couleurs, il s'en fait cependant une petite séparation lorsqu'elle traverse les oculaires, mais les iris ne sont sensibles que vers les bords des lentilles & non vers le milieu. Quelquefois les rayons rouges, d'autres fois les jaunes ou les bleus se font remarquer dans ces sortes de télescopes; néanmoins on observe les objets d'une maniere très-distincte, on les voit sous un grand champ; car dans ces sortes d'instrumens, le rayon de l'oculaire peut être plus court & l'ouverture de l'objectif plus grande que dans les télescopes ordinaires, à cause que les couleurs ne se séparent pas dans l'objectif, & l'œil n'est point fatigué par une longue observation. Ces sortes de télescopes dont les objectifs sont composés de différens verres, de maniere que la lumiere qui les traverse ne se décompose pas en couleurs, sont connus sous le nom de *lunettes achromatiques*.

on

on se sert. On peut même placer le foyer F entre les foyers des rayons jaunes & orangés, point qu'on trouve en faisant dans la formule des foyers des verres, $p = 31$ & $q = 20$. La raison en est que les rayons pourpres, violets, & même les rayons bleus, & les rayons rouges situés vers r sont assez foibles à moins que la lumiere ne soit très-vive, de sorte qu'au lieu d'un $\frac{1}{55}$ PN on peut substituer une quantité plus petite, peut-être même $\frac{1}{250}$ PN.

161. A l'égard de la proportion qu'il doit y avoir entre la longueur du foyer de l'objectif & celle de l'oculaire, elle varie beaucoup selon les circonstances de la perfection des verres & la lumiere de l'objet. Nous ajouterons seulement ici les dimensions que nos meilleurs Ouvriers donnent aux lunettes ordinaires.

Pour une Lunette à quatre verres.

Longueur du foyer des objectifs.	Diamètre de l'ouverture des objectifs.	Longueur du foyer des oculaires.	Diamètre du diaphragme au foyer de l'objectif.	Augmentation des diamètres apparens des objets.
1 *pied.*	4 *lign.* $\frac{1}{2}$	16 *lign.*	4 *lign.*	9 *fois.*
2	$6\frac{1}{2}$	22	$5\frac{1}{2}$	13
3	9	26	$7\frac{1}{2}$	17
4	11	28	9	21
5	12	30	10	24
6	13	31	$10\frac{1}{2}$	28
7	14	34	11	30
8	15	36	$11\frac{1}{2}$	32

Cette table suppose que les objectifs sont bons, sans être des plus excellens; car ceux-ci pourroient supporter des oculaires d'un foyer plus court, & des ouvertures plus grandes à l'objectif aussi-bien qu'au diaphragme du foyer.

Pour les Lunettes Astronomiques.

Longueur du foyer des objectifs.	Diamètre de l'ouverture des objectifs.		Longueur du foyer de l'oculaire.		Augmentation des diamètres apparens des objets.
pieds.	*pouces.*	*lignes.*	*pouces.*	*lignes.*	*environ*
1	0	$6\frac{1}{2}$	0	8	20 fois
2	0	9	0	10	28
3	0	$11\frac{1}{2}$	1	$0\frac{1}{2}$	34
4	1	1	1	$2\frac{1}{2}$	40
5	1	$2\frac{1}{2}$	1	4	44
6	1	4	1	6	49
7	1	$5\frac{1}{2}$	1	$7\frac{1}{2}$	53
8	1	$6\frac{1}{2}$	1	$8\frac{1}{2}$	56
9	1	8	1	$9\frac{1}{2}$	60
10	1	9	1	11	63
11	1	10	2	0	66
12	1	11	2	2	69
14	2	$0\frac{1}{2}$	2	3	75
16	2	2	2	5	79
18	2	4	2	7	85
20	2	$5\frac{1}{2}$	2	$8\frac{1}{2}$	89
25	2	8	3	0	100
30	3	0	3	$3\frac{1}{2}$	109
35	3	3	3	7	118
40	3	6	3	10	126
45	3	8	4	$0\frac{1}{2}$	133
50	3	10	4	3	141

Lorsque les objectifs sont excellens, on peut leur donner des ouvertures plus grandes, & des oculaires d'un foyer plus court. C'est ainsi qu'un objectif excellent de 34 pieds, travaillé par Campani, porte aisément un oculaire de deux pouces & demi de foyer, & une ouverture de quatre pouces de diamètre : alors il amplifie 163 fois les diamètres apparens des objets célestes qui conservent une clarté suffisante.

S'il est question d'un microscope à trois verres, l'oculaire doit être d'un pouce de foyer, & d'environ 9 lignes de diamètre ; le verre du milieu placé à huit lignes de dis-

tance de l'oculaire, doit avoir 18 lignes de foyer, & un pouce de diamètre. On y peut ajuster différentes lentilles objectives de rechange, par exemple, de 6, de 4, de 2, de 1 lignes de foyer; cependant les ouvertures de ces lentilles doivent être très-petites & assujetties à la bonté des verres. Leur distance à l'oculaire peut être d'environ six pouces (*).

(*) La premiere espece de télescope, qu'on appelle *Lunette de Hollande*, ou *Lunette de Gallilée* (c'est celle qui a été inventée la premiere, vers l'an 1609, & qui a été seule en usage pendant près de quarante ans) a pour oculaire un verre concave ou plan-concave PQ (fig. 123), placé entre l'objectif MN & son foyer *o*, de maniere que les axes des deux verres concourrent en une même droite A*o*, & leurs foyers en un même point *o*.

Par cette construction il est visible 1°. que parce que la surface de l'objectif peut être beaucoup plus grande que l'ouverture de la prunelle, il peut tomber sur l'objectif une quantité de rayons partis d'un même point d'un objet, beaucoup plus grande que celle qui pourroit entrer dans l'œil. 2°. Que l'objet étant comme infiniment éloigné, les rayons incidens & parallèles (représentés ici par AD, & par ses parallèles), qui par la réfraction faite en traversant l'objectif MN, convergeroient au point *o*, redeviennent parallèles après avoir traversé l'oculaire; mais que comme l'oculaire a été placé vers la pointe *o*, du cône des rayons réunis par l'objectif, & que les rayons sont fort denses vers cette pointe, ces mêmes rayons sont fort denses en sortant de l'oculaire. 3°. Que par conséquent, si au sortir de l'oculaire, ils sont reçus dans un œil d'une vue excellente, ou dans un œil presbyte, ils doivent y former une image du point de l'objet d'où ils sont partis, laquelle est d'autant plus vive, que le faisceau des rayons sortans de l'oculaire est plus dense qu'il n'étoit en rencontrant l'objectif, & que l'ouverture de l'objectif est plus grande que celle de la prunelle.

Pour ce qui regarde les points B de l'objet OB, qui sont situés hors de l'axe A*o* du télescope, il est clair qu'ils envoyent des rayons parallèles, (représentés ici par CD,

De l'intensité de la lumiere qui traverse des milieux diaphanes.

162. Supposons qu'on ait un flambeau & une chandelle, qu'on regarde le flambeau à travers un milieu dia-

---

& par ses parallèles) que l'objectif tend à réunir au point *b*, proche du point *o*, & qui rencontrant l'oculaire PQ, en sortent sensiblement parallèles & très-denses; de maniere qu'un œil presbyte ou un œil d'une vue excellente, en doit recevoir une image très-vive du point B: mais parce qu'au sortir de l'oculaire, le faisceau qui forme cette image, diverge du faisceau qui forme celle du point *o*, un même œil ne peut recevoir en même tems ces deux images, à moins que sa prunelle ne soit assez ouverte & assez proche du concours F des directions de ces deux faisceaux; d'où il suit qu'*en regardant un objet par le moyen de ce télescope, on voit un nombre de ses parties, d'autant plus grand, que l'œil est plus proche de l'oculaire, & que l'ouverture de la prunelle est plus grande.* Et parce que l'ouverture de la prunelle est naturellement fort petite, & qu'elle se rétrecit involontairement à proportion de la lumiere qui y entre, il est clair que *le champ de ces sortes de télescopes est d'autant plus petit que l'objet est plus lumineux, & que l'oculaire est d'un plus grand foyer.* Enfin parce que la nature de la lumiere ne permet pas de mettre des oculaires d'un aussi petit foyer qu'on veut, qu'au contraire les foyers des oculaires doivent être plus longs, à proportion de la longueur des foyers des objectifs, il suit que *le champ de ces sortes de télescopes est d'autant plus petit que le télescope est plus long.* C'est cet inconvénient qui en a aboli l'usage pour les objets fort éloignés, & qui par conséquent demandent de longues lunettes: on n'en fait plus gueres de cette espece, que ceux qui doivent être fort courts, pour ne pas trop grossir les objets, tels que sont ceux qu'on nomme vulgairement *Lorgnettes d'Opéra.*

On voit encore, par la construction de ce télescope, que les objets y doivent paroître droits: car le faisceau *c* des rayons qui font voir l'extrémité B de l'objet qui est au-

phane & qu'on éloigne la chandelle ou qu'on l'approche de l'œil jusqu'à ce que la chandelle & le flambeau paroissent également lumineux, on pourra juger de l'intensité de la lumiere du flambeau.

---

dessous de l'axe A K, est aussi reçu par l'œil dans une direction *c*F, qui vient de dessous l'axe.

Parlons maintenant des *télescopes catadioptriques*. Un *télescope catadioptrique* a la propriété de détourner les faisceaux de rayons partis de l'objet, qui s'étant réfléchis sur la concavité d'un miroir sphérique, convergent pour former une image *f* (fig. 124.) de cet objet sur l'axe ou près de l'axe du miroir & du même côté que l'objet, ce qui l'empêche d'être vue directement par le moyen d'un ou de trois oculaires; car il faudroit que le spectateur plaçât sa tête entre lobjet & l'image, ce qui empêcheroit la lumiere de l'objet de parvenir au miroir en assez grande quantité, & assez près de l'axe.

Pour éviter cet inconvénient, on place un petit miroir plan *m* H, incliné à l'axe du miroir sphérique de 45 degrés; ce miroir plan renvoye en *o* la pointe du cône des rayons réfléchis où est l'image, & on ajuste un ou trois oculaires dans la ligne *o* F, selon que l'on veut voir cette image renversée ou droite; pour cet effet, on perce le côté M N tuyau du télescope.

Le principal avantage de ce télescope, qu'on appelle *Newtonien*, c'est de faire le même effet que les télescopes à réfraction, quoiqu'il soit beaucoup plus court que ceux-ci; ce qui vient de ce que l'image formée par l'objectif, n'en est éloignée dans le miroir sphérique, que du quart de l'axe de sphéricité (l'objet étant supposé à une distance infinie), tandis qu'elle est éloignée du verre également convexe du demi-axe de sphéricité; de ce que cette image ne se trouve pas placée entre l'objectif & les oculaires, comme dans les télescopes astronomiques; mais surtout de ce qu'un même miroir objectif peut supporter des oculaires de foyers fort différens entr'eux, & même d'un foyer extrêmement petit; ce qui fait qu'un même Télescope Catadioptrique équivaut à plusieurs Lunettes à réfraction de

Soit la premiere distance de la chandelle dans laquelle le flambeau & cette chandelle paroissent avoir la même force $= a$, la seconde $= b$, l'intensité de la lumiere dans le premier cas sera à l'intensité de la lumiere dans le second cas comme $b^2 : a^2$; car plus la

---

différentes longueurs, parce que ces dernieres ne peuvent gueres être bonnes, qu'en leur donnant des oculaires dont les foyers ayent certains rapports avec ceux des objectifs; & les limites de ces rapports sont assez étroites.

Dans l'usage de ce télescope, on voit que le miroir plan mH doit être mobile, pour faire tomber les images des objets au foyer de l'oculaire, puisque cette image s'éloigne du miroir objectif à mesure que l'objet s'en approche. Il faut aussi que l'oculaire puisse couler le long du tuyau MN du Télescope, en même tems que le miroir plan mH se meut en-dedans de ce tuyau, afin que cet oculaire ait son foyer placé au sommet du cône des rayons détournés par le miroir plan Hm.

On voit encore que les myopes doivent rapprocher un peu le miroir Hm, afin qu'en plaçant l'image entre l'oculaire & son foyer, les rayons sortent de l'oculaire en divergeant autant qu'il est nécessaire pour la leur faire voir distinctement.

Il y a encore une autre espece de télescope Catadioptrique, moins simple, & propre à voir les objets terrestres ainsi que les objets célestes, on l'appelle *Grégorien*. On présente à un objet un miroir sphérique-concave AB (fig. 125) & un peu au-delà de l'image F, qui s'en forme sur l'axe OF de ce miroir, on pose un autre miroir sphérique-concave CD, d'un foyer plus court, & d'une ouverture beaucoup plus petite, mais dont l'axe est dans la même droite que celui du premier miroir AB: l'image F est à l'égard du miroir CD, comme un objet placé entre son foyer G, & son centre E; c'est pourquoi il s'en forme sur le même axe une seconde image H, laquelle est d'autant plus éloignée au-delà du centre E, que la premiere image F est plus près du foyer G du petit miroir; mais en approchant ce petit miroir de l'image F ou en l'en

chandelle doit être éloignée pour trouver la force de la lumiere réfractée plus l'intensité de sa lumiere sera diminuée. Ainsi le savant Bouguer a trouvé que les distances *a* & *b* de la chandelle doivent être comme 1 à 15.5

écartant, on porte la seconde image H à la distance qu'on veut. On a coûtume de la placer un peu en deçà du miroir A B, qu'on perce vers son milieu I, afin que l'image H puisse être vue à l'aide d'un oculaire P Q; & il est évident que cette image doit paroître droite. Car elle est renversée à l'égard de l'image F, laquelle est elle-même renversée à l'égard de l'objet.

Lorsque l'objet est fort lumineux, on peut, pour aggrandir la seconde image, la faire tomber vers O au-delà du miroir A B, & placer en O le foyer d'un oculaire P Q, afin que les rayons qui tendent à former l'image vers O, tombant sur cet oculaire, en sortent parallèles, & soient reçus ensuite sur un autre oculaire placé au-delà du point O, qui les fasse converger en un point où il faut mettre l'œil.

On peut voir que dans ces deux especes de télescopes le petit miroir placé dans l'axe du grand, arrête nécessairement tous les rayons parallèles à l'axe, qui tomberoient sur le milieu du miroir objectif; de sorte qu'il est indifférent qu'en cet endroit le miroir soit percé, ou non.

Les désavantages de ces télescopes sont, qu'ils ont peu de champ; qu'ils sont difficiles à diriger vers les objets; qu'ils demandent des précautions extraordinaires, tant dans leur construction que dans leur usage; qu'ils sont d'une très-grande dépense, & très-faciles à gâter.

M. Cassegrain a un peu perfectionné le télescope Grégorien en faisant le petit miroir convexe au lieu de le faire concave; ce qui fait que les rayons devenant moins convergents font paroître l'objet plus grand, & que le tube peut être plus court. Les Astronomes préferent communément la lunette astronomique à deux verres à celle qui en a plus; 1°. par ce qu'elle est capable d'un plus grand champ; 2°. qu'elle peut supporter un oculaire d'un plus court foyer, & qu'elle grossit davantage les objets; 3°. qu'elle est plus courte; 4°. qu'il y a moins de perte de lumiere à cause qu'il n'y a que deux verres à traverser.

lorsqu'il regardoit le flambeau à travers 16 lames de verre commun dont l'épaisseur étoit de 9. 5 lignes. C'est pourquoi les intensités de la lumiere réfractée & non réfractée étoient comme 1 : 240 : de sorte que la lumiere

---

Les grands télescopes qui grossissent 100 fois ou plus ne sont pas bons pour les objets terrestres, mais seulement pour les astres ; parce que la lumiere des objets terrestres plus sensible que celle des astres, se trouve alors trop dispersée dans les larges images que forment les objectifs. D'ailleurs cette lumiere qui rase la terre est continuellement détournée par les vapeurs grossieres qui flottent dans l'air, d'où résulte un tremblement dans les parties de l'image qui paroît mal terminée.

L'expérience a fait voir que les images formées par réflexion n'étoient pas à beaucoup près si sujettes à être confuses que celles qui sont formées par la réfraction. On conçoit en effet que puisque les rayons, après s'être séparés par la réfraction, vont en s'écartant de plus en plus, les différens faisceaux qu'ils forment doivent se distinguer de plus en plus par leurs couleurs. Mais dans la réflexion, la séparation des rayons parallèles ne se fait pour ainsi dire que dans le point d'incidence, ou que dans l'intervalle compris entre le point d'incidence & le point de réflexion. Après la réflexion ces rayons très-peu séparés sont encore sensiblement parallèles, ce qui fait qu'on ne peut appercevoir cette séparation de rayons : il arrive seulement que les faisceaux de rayons réfléchis sont tant soit peu plus gros qu'auparavant. On ne doit donc pas appercevoir des iris dans les télescopes catadioptriques, mais seulement un peu de confusion dans les images, causée en partie par ce renflement de faisceaux, & en partie par la sphéricité des miroirs. D'où il suit qu'on peut donner une ouverture beaucoup plus grande aux miroirs objectifs des télescopes, qu'aux verres objectifs de même foyer, ce qui doit rendre les images par réflexion, beaucoup plus vives, & par conséquent distinctement visibles à l'aide d'une lentille d'un foyer fort court : elles peuvent donc paroître très-grandes sans cesser d'êtres claires, avantages qu'on ne peut se procurer avec des télescopes par réfrac-

qui traverse 16 lames de verre formant une épaisseur de 9. 5 lignes, perd les $\frac{119}{140}$ de sa force. On a de même trouvé que la lumiere qui traverse une masse d'eau de mer de dix pieds de longueur perd les $\frac{1}{5}$ de sa force.

---

tion, à moins qu'ils ne soient d'autant plus longs (comme les Tables ci-dessus le font voir,) & par conséquent d'autant plus incommodes à manier.

Dans l'usage des télescopes catadioptriques Newtoniens on se sert de différens oculaires, selon la lumiere de l'objet que l'on veut voir, & selon la grandeur dont on veut que son diamètre apparent soit augmenté. Voici les dimensions qu'on peut donner aux parties de ce télescope, pour faire un bon effet.

Longueur du foyer du miroir concave.	Diamètre de l'ouverture du miroir.		Longueur moyenne du foyer de l'oculaire.		Augmentation des diamètres apparens des objets.
pieds.	*pouces.*	*lignes.*	*lignes.*	*centiemes.*	*environ*
$\frac{1}{2}$	0	11	2.	00	36 fois
1	1	6	2.	39	60
2	2	6	2.	83	102
3	3	3	3.	13	138
4	4	1	3.	37	171
5	4	10	3.	54	202
6	5	7	3.	73	232
7	6	3	3.	88	260
8	6	11	4.	01	287
9	7	7	4.	13	314
10	8	2	4.	24	340
11	8	9	4.	34	365
12	9	4	4.	44	390

A l'égard du petit miroir plan *m* H (fig. 124) il doit être ovale, & il coupe sous un angle de 45° l'axe A*o'* du cône D*o'* D de rayons incidens parallèlement à l'axe : ses dimensions dépendent de l'espace que tous les rayons réfléchis occupent à l'endroit où on doit poser le miroir, pour faire usage de l'oculaire, dont le foyer est

toujours une raison constante entre la différence des logarithmes de deux ordonnées également éloignées, & la portion de l'axe interceptée.

Un corps est plus diaphane qu'un autre, lorsqu'ayant une plus grande épaisseur il n'absorbe cependant pas plus de lumiere que l'autre. Si les épaisseurs des deux corps qui absorbent la même quantité de lumiere sont entr'elles comme 1 : 3, l'un sera trois fois plus diaphane que l'autre. De sorte que les transparences suivent la raison des grosseurs lorsque la quantité de lumiere absorbée est la même. Soit une sous-tangente $=$ B, deux ordonnées A & g, la partie de l'axe comprise entre ces ordonnées $=$ X, l'on aura $B = \frac{X}{L.A - L.y}$ Soit une autre sous-tangente $= b$, l'abscisse $= x$, les ordonnées a & y, nous aurons $b = \frac{x}{L.a - L.g}$. Pour comparer les transparences il est nécessaire que les intensités de la lumiere ayent été diminuées à travers les deux milieux dans la même raison, c'est-à-dire qu'on doit avoir $\frac{A}{g} = \frac{a}{y}$, ou $L.A - L.g = L.a - L.y$; ainsi l'on aura $B : b :: X : x$. Mais les transparences sont comme $X : x$ donc elles sont aussi comme les sous-tangentes B & b. M. Bouguer a trouvé que l'intensité de la lumiere qui traversoit une épaisseur d'air de 7469 toises diminuoit dans le rapport $\frac{1681}{2500}$. On aura donc $x = 7469$ toises, $a = 2500$, $y = 1681$; & par conséquent la sous-tangente b de l'air sera $= \frac{7469}{0.1723723} = 43678$. La sous-tangente de l'eau marine se trouvera aussi facilement par l'expérience dont nous avons parlé ci-dessus; car en faisant $x = 10$ pieds $= 1.666$ toises, $a = 5$, $y = 3$, b sera $= 7.5$. les transparences de l'eau marine & de l'air sont donc entr'elles $:: 7.5 : 43678 :: 1 : 5823$. Ainsi l'air est 5823 fois plus transparent que l'eau marine.

On peut par-là trouver facilement quelle doit être l'épaisseur d'une tranche d'air qui pût affoiblir la lumiere autant qu'une tranche d'eau marine de dix pieds. Car l'on a $b = 43678$ toises, & si l'on fait $a : y :: 5 : 3$

pour avoir $x = b\,(\text{L.}\,a - \text{L.}\,y) = b\,(\text{L.}\,5 - \text{L.}\,3) = 9682$ toises, on aura l'épaisseur cherchée.

164 L'*opacité* des corps consiste en ce que la quantité de lumiere qu'ils transmettent n'est pas suffisante pour être apperçue par l'œil ; de sorte qu'à proprement parler il n'y a aucun corps qui soit absolument opaque. Cette théorie s'accorde très-bien avec la nature de la courbe de réfraction ; car l'axe de la logarithmique est son assimptote, ainsi les ordonnées de cette courbe ne peuvent jamais s'évanouir, c'est-à-dire l'intensité de la lumiere qui traverse un milieu quelconque ne peut être réduite à zero.

M. Bouguer a trouvé qu'un corps composé de 80 lames de verre ne laissoit passer aucune lumiere sensible, de sorte que ce corps étoit parfaitement opaque, tandis que 16 lames de 9. 5 lignes d'épaisseur ne laissoient passer que $\frac{1}{140}$ de lumiere.

165. PROBLÊME. *Trouver dans quel rapport la lumiere doit être diminuée pour qu'un corps devienne opaque.* Si nous supposons $a = 240$, $y = 1$, $x = 9.5$ lignes, nous aurons la sous-tangente $b = \frac{9.5}{2.3802112} = 4.988$ lignes. l'épaisseur des 80 lames dont nous avons parlé ci-dessus étoit de 47. 5 lignes que je suppose $= x$, pour avoir $4.988\,(\text{L.}\,240 - \text{L.}\,y) = 47.5$; d'où l'on tire $\frac{47.5}{4.988} - \text{L.}\,240 = - \text{L.}\,y = -7.1446388$. Le nombre correspondant à ce logarithme est $= 0.0000001389$; c'est pourquoi nous avons $a : y :: 240 : 0.0000001389 :: 1720662420 : 1$. Si la lumiere du Soleil est diminuée dans ce rapport, c'est-à-dire, si sa densité 1 se change en $\frac{1}{1720662420}$, on ne pourra plus l'appercevoir, & le corps à travers lequel la lumiere souffrira un tel affoiblissement deviendra opaque.

166. PROBLEME. *Mesurer les décroissemens de la lumiere lorsqu'elle traverse un milieu diaphane qui n'est pas partout également dense.* Le milieu *a b c h* (fig. 128 & 129) peut être comparé avec le milieu ABPT, en divisant ce premier milieu en tranches *t c q p*, *q* N *x p*, &c. dont les masses respectives soient égales aux masses des tranches MP, LN, &c. du second milieu homogène. Mais alors les épaisseurs *c q*, *q* N ne seront pas égales entr'elles, & les ordonnées *b a*, N *n*, &c. ne seront pas non plus égales aux ordonnées correspondantes de la

logarithmique bf. Décrivons une autre courbe QS dont les ordonnées bQ, Nz, &c. représentent les masses d'air comprises entre les ordonnées ab & nN, nN & Mq, &c.; il est visible que l'aire $bQSc$ représentera la masse d'air contenue entre l'ordonnée ba & l'ordonnée ch. Ayant mené MR parallèle à nz & infiniment proche de cette seconde ligne, nm exprimera le décroissement de la lumiere nN, décroissement qui dépend de la densité de l'air Nz, & de l'épaisseur Nq que la lumiere traverse; ainsi nm sera comme $yzdx$, en faisant $nN = Mq = y$, $Nz = qR = z$, $Nq = dx$, parce que nous supposons $bN = x$; ou en supposant que a est une quantité connue par l'expérience, nm sera $= dy = \frac{yzdx}{a^2}$. Menons la tangente nV à la ligne de réfraction ac, nous aurons la soustangente $NV = \frac{ydx}{dy}$. Mais $\frac{a^2}{z} = \frac{ydx}{dy} = NV$; donc les sous-tangentes de la ligne de réfraction doivent être en raison inverse des densités. Mais dans l'air les densités sont en raison inverse des dilatations du moins sensiblement & auprès de la surface de la terre; donc dans la ligne de réfraction de l'air; les sous-tangentes suivent les rapports des dilatations de l'air.

Puisque $\frac{a^2dy}{y} = zdx$, il est évident qu'étant donnée la courbe des densités QzS, on peut construire la courbe de réfraction anc, & réciproquement. Si nous supposons avec M. Mariotte que les densités de l'air suivent la raison des poids comprimants, la densité correspondante au point N sera proportionnelle à l'aire $bQzN = S.zdx$, aussi-bien qu'à l'ordonnée $Nz = z$. Donc on aura $S.zdx = bz$; & en différentiant, $zdx = bdz$, d'où l'on tire $dx = \frac{bdz}{z}$, & en intégrant, $x = bL.z$; ainsi la courbe des densités est une logarithmique dont la sous-tangente est b, quantité que l'expérience doit déterminer (v. le n°. 134).

De plus $\frac{a^2dy}{y} = z\,dx = b\,dz$; donc $a^2\,L.y = bz$, & $\frac{a^2}{b}\,L.y = z$. De ce que $\frac{a^2\,dy}{y} = z\,dx$ ou $a^2\,L.y = S.z\,dx$, il ſuit que les logarithmes des intenſités de la lumiere correſpondants à différentes hauteurs de l'atmoſphère, ſont proportionnels aux maſſes d'air que la lumiere traverſe.

Théorie des forces Phyſiques.

167. POUR bien comprendre la théorie que nous allons développer, il eſt néceſſaire d'avoir quelque connoiſſance de la loi de continuité. *La loi de continuité dont il eſt ici queſtion, conſiſte en ce que chaque quantité, qui d'une grandeur paſſe à une autre grandeur, doit paſſer par toutes les grandeurs intermédiaires de même genre.*

Les mouvemens des corps ſe font dans des lignes continues & non-interrompues. Les planètes & les comètes ſe meuvent dans des orbites continues, les rétrogradations ſe font peu à peu & non par ſauts; le jour vient peu à peu par l'aurore, & la nuit eſt précédée du crépuſcule, qui eſt une lumiere qui diminue peu à peu en paſſant par tous les degrés intermédiaires entre ce qu'on appelle jour & ce qu'on nomme nuit. Le diamètre du Soleil monte ſur l'horiſon & deſcend au-deſſous non par un ſaut, mais par un mouvement continu. De même les corps qu'on lance en l'air ſe meuvent dans des lignes continues. Tous les mouvemens qui dépendent de la cauſe de la gravité, de l'élaſticité, de la force magnétique obſervent la loi de continuité comme les forces qui les produiſent. La force de la gravité ſuit à peu-près (dans les diſtances un peu conſidérables) la raiſon renverſée des quarrés des diſtances, c'eſt-à-dire qu'elle diminue d'autant plus que le quarré de la diſtance augmente, de maniere, par exemple, que ſi à la diſtance de la Lune, cette force eſt exprimée par 1, à une diſtance double ou à la diſtance exprimée par 2, cette force qui pouſſe les corps vers la terre ſera quatre fois

plus petite ou sera un quart de ce qu'elle étoit à la premiere distance, & à une distance triple elle sera neuf fois plus petite. La gravité dépend donc des distances & comme les distances ne peuvent changer par saut, la force de la gravité doit changer en passant par tous les degrés intermédiaires. Nous voyons pareillement que la force de l'aimant dépend des distances par une loi continue qui n'est jamais interrompue ; la force élastique ou du ressort dépend de l'inflexion comme dans les lames élastiques ou à ressort, ou bien elle dépend de la distance comme dans les parties de l'air comprimé dont le ressort augmente selon une certaine loi continue, à proportion que les parties se rapprochent davantage. Dans les mouvemens naturels les changemens de direction se font peu à peu, & il n'y a aucun angle rigoureux dans les corps ; mais leurs pointes présentent une courbure qu'on apperçoit par le moyen du microscope. Cette courbure se trouve dans les angles des bords des rivieres, dans les feuilles des arbres & les branches, les pointes des cristaux que forment les sels, &c.

168. Il y a cependant des cas dans lesquels cette loi paroît n'être pas observée : cela arrive lorsque le commencement de la seconde grandeur est éloigné d'un certain intervalle du commencement de la premiere. Ainsi en considérant le jour comme un intervalle entre le lever & le coucher du Soleil, le jour précédent dans certains tems de l'année, differe du jour suivant de plusieurs secondes, & il paroît qu'il se fait un saut sans qu'il y ait un jour intermédiaire qui differe moins du jour précédent ; mais ces jours conçus ainsi ne forment pas une série ou suite continue. Si l'on imagine un parallèle de la terre sur lequel soient situés sans interruption tous les lieux qui ont une même latitude géographique, tous ces lieux auront des jours dont les commencemens & les fins coulent continuellement jusqu'à ce qu'on revienne au même lieu dont le jour précédent est placé au premier terme de cette série & le suivant au dernier terme de la même série. Les grandeurs de ces jours coulent continuellement sans aucun saut, & c'est nous (en omettant les jours intermédiaires) & non pas la nature, qui faisons le saut.

Il

169. Il y a des gens qui objectent le cas où un homme tenant une pierre dans sa main lui communique tout-à-coup une vîtesse finie en un instant. Mais il est visible qu'il n'y a point ici de vîtesse finie produite dans un instant indivisible. Il faut un tems fini (quoique fort court) pour que les esprits animaux acquierent une vîtesse finie, se répandent dans les nerfs & les muscles & tendent les fibres ; c'est pourquoi pour pouvoir donner une vîtesse finie à la pierre, nous retirons la main & retenant la pierre pendant un certain tems, nous accélérons continuellement son mouvement. Lorsqu'on tire un canon le mouvement ne se communique au boulet que successivement ; car la poudre ne s'enflamme & l'air ne se dilate que successivement ; ainsi le fluide igné (non plus que l'air) ne peut par son élasticité, agir sur le boulet qu'en lui communiquant successivement le mouvement & ce mouvement fini doit passer par tous les degrés intermédiaires. On peut voir encore clairement cette succession dans le mouvement qu'un ressort communique à un globe qu'il pousse. Plus l'élasticité est grande, plutôt, mais jamais dans un instant indivisible, la vîtesse est produite dans le globe. Lorsqu'on ôte le bouchon qui fermoit un orifice fait vers le fonds d'un vase, quelque adresse que l'on ait, le mouvement du bouchon est successif & non instantané, & l'eau acquiert aussi sa vîtesse successivement, quoique dans un petit intervalle de tems. En effet la pression de l'eau a besoin de tems pour produire son effet, & ne peut produire une vîtesse finie que dans un tems fini, si court qu'on veuille le supposer.

170. Ajoutons à ce qu'on vient de dire que quand il s'agit d'une continuité, il doit y avoir une limite commune qui divise ce qui suit de ce qui précéde, limite qui, considérée comme limite, doit nécessairement être indivisible : c'est ainsi qu'un même point sépare les deux parties d'une même ligne : c'est ainsi qu'un seul & même instant indivisible sépare le tems futur du tems passé, & il ne sauroit y avoir deux instans contigus ; mais entre un instant & un autre instant il doit y avoir un tems, une durée divisible à l'infini. Dans une même ligne il ne peut y avoir deux points immédiatement contigus ; car ils se confondroient & ne se-

roient qu'un seul & même point ; de sorte qu'entre deux points quelconques d'une même ligne, réellement différens, il y a toujours une petite ligne divisible à l'infini. Bien plus, dans ce genre de quantités dans lesquelles il ne sauroit y avoir deux grandeurs ensemble, on voit avec plus d'évidence qu'il ne peut y avoir de saut d'une grandeur à l'autre ; car dans l'instant que le saut devroit se faire & la suite être interrompue par un accession momentanée, il devroit y avoir deux grandeurs differentes, dont l'une fût la derniere de la série précédente & l'autre la premiere de la série suivante. Cela se voit encore plus clairement dans ces états de choses dans lesquels d'un côté il doit toujours y avoir un état, tandis que d'un autre côté la chose ne sauroit avoir deux de ces états à la fois.

171. ET c'est la raison pour laquelle le mouvement local ne sauroit se faire que par une ligne continue. En effet si la ligne du mouvement étoit interrompue en quelque endroit, le moment où le mobile se trouve au premier point de la seconde ligne seroit postérieur ou antérieur au moment auquel il se trouve dans le dernier point de la ligne antérieure, où ces deux momens seroient le même ? Dans les deux premiers cas il y auroit entre ces deux instans, un tems divisible à l'infini pendant lequel le corps ne seroit nulle part ; & dans le second cas le corps se trouveroit à la fois dans deux lieux différens.

172. IL se présente contre ce raisonnement une difficulté ; car il paroît qu'on peut en conclure que la création & l'annihilation d'une chose sont impossibles ; puisque selon notre raisonnement, à l'instant auquel une chose est créée elle devroit joindre ensemble deux états incompatibles, l'être & le non être, & à l'instant de son annihilation, elle devroit avoir en même-tems l'existence & la non-existence. La réponse est facile : le rien n'a aucune véritable propriété, il est exclus immédiatement par l'être, & une suite d'états dont chacun est rien n'exige aucun terme qui la termine ; c'est pourquoi au premier & au dernier instant du tems qu'une chose est supposée durer, elle existe, & ne joint pas ensemble l'existence & la non-existence. Mais si une chose qui

a une certaine densité & qui a duré pendant une heure, doit durer la seconde heure avec une densité double, au moment qui sépare la premiere heure de la seconde il y auroit à la fois une densité double & une densité simple, ce qui est absurde.

173. Si les choses sont ainsi, il est évident que lorsqu'un corps va frapper un autre corps en mouvement, le choc doit se faire de maniere qu'il ne se fasse point de saut dans la communication du mouvement. On sait par les loix du mouvement dont on a parlé ci-dessus qu'un corps sans ressort qui, avec seize degrés de vîtesse va frapper un autre corps égal & aussi sans ressort, mu dans le même sens avec quatre degrés de vîtesse, doit lui en communiquer six degrés, de maniere qu'après le choc les deux mobiles doivent avoir chacun dix degrés de vîtesse ; mais selon la loi de continuité la vîtesse du corps choqué ne peut pas passer de quatre à dix degrés dans un instant indivisible & par un saut ; il faut donc que dans le choc le mouvement ne se communique pas dans un instant, mais peu à peu. D'un autre côté si la surface antérieure du corps choquant atteignoit avec seize degrés de vîtesse la surface postérieure du corps choqué, à l'instant du contact mathématique les surfaces devroient aller avec la même vîtesse, c'est-à-dire chacune avec 10 degrés de vîtesse & il se feroit un saut ; il paroît donc qu'il n'y a point de vrai contact mathématique, mais seulement un contact Physique, qui consiste en ce qu'entre les corps qui se choquent, il y a à l'instant du contact un petit espace, quoiqu'insensible, entre leurs surfaces ; mais s'il y avoit un contact mathématique, il n'y auroit dans le moment de ce contact aucun espace entre les corps qui se choquent. Les corps agissent donc les uns sur les autres sans parvenir au contact mathématique, & le seul contact Physique a lieu dans la nature : ainsi lorsque dans la suite nous parlerons du contact, ou du choc des corps, nous entendrons toujours le contact Physique, à moins que nous ne nommions expressément le contact Mathématique. Mais comment un corps pourra-t-il agir sur un autre corps & lui communiquer du mouvement sans le toucher mathématiquement ? C'est ce que nous expliquerons dans la suite

après avoir développé la nature des forces attractives & répulsives.

174. QU'ON ne dise pas que quand la vîtesse du corps choquant dont on vient de parler passe de 16 degrés à 10 degrés, les 10 degrés subsistent & que les 6 sont anéantis, & qu'ainsi il n'y a pas de saut dans la durée des 10 premiers degrés, & que dans l'anéantissement le saut ne répugne pas, puisqu'on n'a pas en même-tems l'être avec le non-être, l'existence avec la non-existence; car les 16 degrés de vîtesse du corps choquant ne sont pas une chose composée de 16 choses réellement distinctes dont 10 restent après le choc & 6 sont détruites par le choc; mais ce sont une seule & simple détermination à exister dans des points de l'espace éloignés d'un certain intervalle comme, par exemple, de 16 toises, & cela après un certain tems déterminé, d'une minute, par exemple.

175. ON doit cependant faire attention que la loi exacte de continuité n'a pas lieu dans les choses qui ne sont pas continues, mais qui sont l'assemblage de plusieurs grandeurs séparées. Cela arrive dans les bâtiments qui croissent comme par sauts par l'accession de nouvelles pierres, ou de nouvelles pieces de bois; mais la loi de continuité est cependant observée dans les mouvemens des parties primitives de ces pierres & de ces pieces de bois. Dans l'accroissement des plantes & des corps animés, les nouvelles accessions de matiere observent aussi la loi de continuité dans les mouvemens & vîtesses; mais dans la grandeur des plantes & des corps animés la nature affecte une continuité du moins apparente, continuité que nous observons dans la série des substances à commencer par les corps inanimés, passant ensuite aux végétaux, de là à quelques demi-animaux immobiles; ensuite aux animaux de plus en plus parfaits par degrés jusqu'aux singes si semblables à l'homme. Mais il est visible qu'entre deux espèces voisines, il pourroit y avoir encore une infinité d'autres espèces qui différeroient moins entr'elles que ces deux là, & qu'ainsi il n'y a dans cette progression qu'une continuité affectée & apparente, mais non pas exacte.

Il y a des arcs de courbe, ainsi qu'on l'a vu dans la

premiere partie de cet ouvrage (courbes transcendentes n°. 4) qui sont composés de points séparés les uns des autres, & qui ne forment pas une courbe continue, mais qui ont l'apparence d'une telle courbe : ainsi la loi de continuité est observée dans ce cas là, du moins en apparence ; mais elle est exactement observée dans les mouvemens & les vîtesses des corps, ce qui suffit pour la théorie que nous nous sommes proposés de développer (*).

(*) La loi de continuité peut servir à trouver le rapport suivant lequel la vîtesse de l'eau décroit dans les tuyaux. Soit un tuyau A V T D (fig. 130) partagé en six parties égales aux points B, C, G, F, M, & imaginons que les vîtesses à l'origine A & aux points suivans B, C, &c. sont désignées par les ordonnées de la courbe *a m*. Supposant A B = x, B b = y, je fais $y = a + bx + cx^2 + Dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$. Pour connoître les coefficients a, b, c, &c. je remarque qu'en supposant $x = o$, l'on doit avoir $y = a = Aa$; mais x = AB donne $y = Bb$, x = AC donnant $y = Cc$, &c. Connoissant donc les ordonnées Aa, Bb, &c. on aura l'équation de la courbe cherchée. Supposons que la hauteur de l'eau dans le réservoir est constamment d'un pied, & que le tuyau A V T D est de 16 lignes de diamètre, & prenons AB = 30 pieds que je représenterai par 1, c'est-à-dire, que je ferai l'unité de mesure = 1 ; ainsi l'abscisse AB sera = 1, l'abscisse AC = 2, &c. Cela posé, supposons que notre tuyau est composé de plusieurs pieces, de maniere qu'on puisse le terminer en B, C, G, &c. L'expérience apprendra que dans une minute de tems la quantité d'eau écoulée (exprimée en pouces cubes), lorsque la longueur du tuyau est = AB, AC, &c. est respectivement égale à 2778, 1957, 1587, 1351, 1178, 1052 ; ainsi que le rapporte M. Bossut dans son *Hydrodinamique*. Mais si l'on employoit en A un tuyau très-court, de 3 pouces, par exemple, la quantité d'eau seroit de 6330. Ces dépenses, qui sont comme les vîtesses, étant liées par la loi de continuité, nous aurons les équations $6330 = a$; $2778 = a + b + C + D + e + f + g$; $1957 = a + 2b + 4c + 8D + 16e + 32f + 64g$; $1587 = a + 3b + 9c +$

De l'existence des forces attractives & répulsives.

176. TOUTES les fois qu'un corps inanimé s'approche d'un autre corps sans l'action d'une cause extrinseque qui puisse produire ce mouvement, il y a ce qu'on appelle *attraction*. Dans plusieurs occasions on observe que les corps tendent les uns vers les autres, sans qu'on puisse assigner aucune impulsion matérielle qui produise cette tendance ; & celui qui voudroit bannir l'attraction ~~de la Physique~~ devroit faire voir que les corps ne s'approchent jamais qu'en vertu d'une impulsion, impulsion qu'il faudroit prouver par des expériences ou des observations, ou enfin par un raisonnement démonstratif tiré de la nature des causes physiques dont l'existence est reconnue & sans avoir recours à des suppositions ou des fictions, appuyées sur des pures possibilités; mais aucun mortel jusqu'ici n'a donné de telles preuves contre l'attraction.

Les parties des corps sont adhérentes entr'elles & s'attirent mutuellement. Cette attraction ne dépend pas de la pression de l'air environnant ; car dans la machine de Boyle (*), après avoir pompé l'air, les corps solides ne perdent pas leur fermeté. Elle ne dépend pas non plus de l'action de ce fluide qu'on nomme *æther*, ni de ce fluide que les Cartésiens appellent *matiere subtile* & dont ils ne sauroient démontrer l'existence ; car si

$27D + 81e + 243f + 729g$; $1351 = a + 4b + 16c + 64D + 256e + 1024f + 4096g$; $1178 = a + 5b + 25c + 125D + 625e + 3125f + 15625g$; $1052 = a + 6b + 36c + 216D + 1296e + 7776f + 46656.g$; par le moyen desquelles on tâchera de déterminer les inconnues b, c, D, &c. ; car $a = 6330$. C'est pourquoi en substituant ces valeurs, l'équation $y = a + bx + cx^2 + Dx^3 + ex^4 + fx^5 + g.x^6$, fera connoître à peu-près la vîtesse y en un point quelconque t du tuyau DTVA, (voyez les courbes algébriques n°. 3).

(*) C'est une machine par le moyen de laquelle on ôte presque tout l'air d'une espece de cloche de verre qu'on nomme *récipient* : on appelle cela *faire le vuide de Boyle*.

cela étoit un tel fluide comprimeroit aussi les parties de l'air les unes contre les autres & rendroit l'air solide.

177. LA ténacité des fluides, la rondeur que leurs gouttes affectent, prouvent suffisamment qu'il y a une attraction entre leurs parties.

Les corps solides attirent les fluides & ceux-ci attirent réciproquement les corps solides : l'attraction est donc une propriété universelle puisqu'on l'observe soit dans les corps solides, soit dans les corps fluides.

178. QU'ON prenne deux miroirs de verre blanc, polis, bien nets & secs, qu'on applique l'un des miroirs sur l'autre ; si l'on veut ensuite séparer l'un de l'autre, on sentira une certaine résistance qui vient de la force avec laquelle ces miroirs s'attirent l'un l'autre, & ce n'est pas l'air qui produit cette attraction, comme on peut s'en convaincre en faisant l'expérience dans le vuide de Boyle. Si l'on prend de longs cheveux d'enfant, auxquels on suspende des lames très-minces de parchemin, de cuir, de bois, de fer de la longueur d'un pied, d'une demie-ligne de largeur dans une longue cloche de verre, afin d'empêcher l'agitation de l'air, qu'on approche ensuite extérieurement tels corps que l'on voudra de la cloche, ces lames s'en approcheront. On peut aussi observer les effets de l'attraction en appliquant les surfaces polies & nettes des métaux & demi-métaux, comme l'argent, le bronze, le fer, le plomb, l'étain, le zinc, le bismut, le régule d'antimoine, &c.

179. NON-SEULEMENT les corps s'attirent dans le contact, mais encore lorsqu'ils sont éloignés d'un certain intervalle ; car si entre les miroirs dont on a parlé ci-devant, on place un fil de soie tel qu'il est produit par le ver à soie, en liant avec ce fil à de grands intervalles l'un des miroirs, alors quoique ces miroirs soient distans entr'eux de toute la grosseur du fil, on éprouve néanmoins une force d'attraction considérable, & cela a lieu en prenant des miroirs fort épais à l'égard desquels on ne doit pas soupçonner que les parties comprises entre les intervalles des fils puissent se toucher. On peut aussi au lieu de deux miroirs em-

ployer des plaques de métal polies, seches, nettes & épaisses, si l'on veut, d'un ou deux pouces.

180. PRENONS un corps opaque quelconque *a* S *b* (fig. 131) terminé par un tranchant S, tel qu'un métal, une pierre, ou même un verre transparent, si l'on fait passer dans une chambre obscure & bien fermée des rayons solaires à travers un petit trou fait au volet de la fenêtre, & qu'on leur présente le tranchant S à une certaine distance, le rayon le plus proche en sera fortement attiré & se dirigera vers D, le rayon voisin en est moins attiré & se dirige vers *e*, le suivant est encore moins attiré, le rayon E*h* parvient en *h* sans se détourner de son chemin (*). Non-seulement l'attraction a lieu, mais encore la répulsion qui commence à une plus grande distance, de sorte que le rayon qui suit se dirige vers *i*, le rayon suivant plus éloigné de S étant moins repoussé, parvient en *k*, tandis que le plus éloigné conservant sa direction va en droite ligne en L. Cette attraction & cette répulsion de la lumiere est très-sensible lorsqu'on prend deux tranchans d'acier opposés & qu'on les fait approcher peu à peu, jusqu'à qu'il n'y ait plus qu'un petit intervalle.

LA rondeur des gouttes de la pluie qui tombe à travers l'air, la rondeur des gouttes d'huile qui nagent dans l'eau prouvent aussi démonstrativement la force attractive qui regne entre les parties de tous les fluides. Pareillement lorsque deux gouttes se touchent ou sont prêtes de se toucher, elles se portent l'une vers l'autre pour n'en faire qu'une (on peut l'observer sur-tout si ce sont deux goutes de mercure fort petites posées sur du papier ou sur un miroir de verre) : or ce mouvement ne peut venir de l'action d'un fluide environnant, puisqu'un tel fluide, remplissant les angles que forment les gouttes avant leur réunion, devroit plutôt empêcher cette réunion. De petites gouttes placées sur un plan vernissé ou sur une feuille de chou & qui ont une figure fort ronde s'applatissent si on les pose sur un plan plus dense & plus attirant.

(*) L'inflexion de la lumiere auprès des pointes de métal, de bois, de verre, n'est ni augmentée ni diminuée lorsqu'on électrise fortement ces pointes (nous verrons dans la suite ce que c'est que l'électricité) ; cet effet ne vient donc d'aucune atmosphère électrique.

181. METTEZ une très-petite goutte de mercure ſur du papier, faites-la toucher par un morceau de cryſtal, il enlevera cette goutte qui quittera le papier. Approchez cette goutte enlevée d'un autre très-petite placée ſur le même papier, celle-ci s'attachera à la premiere pour en former une plus groſſe qui ſera élevée par le cryſtal. Mais ſi vous approchez la goutte adhérente au cryſtal, d'une goutte de mercure aſſez groſſe pour ne pouvoir être enlevée par la force attractive du cryſtal, alors la petite goutte plus attirée par la groſſe goutte que par le cryſtal, abandonnera celui-ci pour ſe réunir à la groſſe goutte.

182. REMPLISSEZ de mercure par voie de ſuccion un tube de verre fort étroit, poſez-le horiſontalement, il en reſtera une petite portion dans le tube, qui ne tombera pas, même en élevant le tuyau; mais ſi vous approchez obliquement ce tube du vif-argent contenu dans un vaſe, tout ce qui eſt contenu dans le tuyau s'écoulera, à cauſe de l'attraction du mercure du vaſe plus forte que celle du verre.

Plongez en partie un tube de verre fort étroit (de ceux qu'on nomme capillaires) dans l'eau d'un vaſe, cette eau montera dans le tube beaucoup plus haut que le niveau de la ſurface de l'eau du vaſe. Si ſur la ſurface extérieure d'un tuyau capillaire, vous laiſſez tomber une goutte d'eau, elle deſcendra le long du tube; s'il eſt incliné elle parviendra à ſon orifice inférieur ou l'attraction de la ſurface interne la fera monter avec rapidité dans l'intérieur de ce tube, & cela arrive dans le vuide de *Boyle* comme dans l'air.

Qu'on prenne un morceau de ſapin qu'on vient de tremper dans l'eau, qu'on le mette en équilibre dans l'air à l'aide d'une romaine & qu'on en approche un vaſe plein d'eau par-deſſous, l'eau attirera ce ſapin de maniere que ſi la ſurface qui touche l'eau eſt d'un pouce quarré, il faut ajouter de l'autre côté de la romaine un poids de cinquante grains pour rétablir l'équilibre.

183. C'EST la force avec laquelle les parties des deux fluides s'attirent qui produit ce qu'on nomme *coagulum*: de l'eſprit d'urine très-ſubtil mêlé avec l'*alcool* (c'eſt-à-dire l'eſprit de vin rectifié au dernier degré) produit

subitement un corps solide semblable à la glace. L'alcool de vin mêlé avec le blanc d'œuf ou avec la sérosité du sang produit un coagulum.

Faites dissoudre quelque sel dans l'eau, mettez une goutte de cette dissolution sur un verre plan un peu chaud, afin que l'eau s'évapore lentement, alors vous pourrez voir par le moyen du microscope les parties salines d'abord petites, s'approcher peu à peu les unes des autres, se joindre ensemble pour former des crystaux dont la grandeur croît continuellement.

L'eau, le vin, le vinaigre de vin & de biere, les huiles des plantes qu'on tire par expression, &c. & d'autres liqueurs, étant versés séparément dans un vase de verre net & sec sont attirés par les côtes & s'élevent vers eux, leur surface étant concave & plus abaissée vers le milieu.

C'est par l'attraction que l'huile monte dans le coton d'une lampe, la même cause fait monter l'eau dans les fils de laine & dans les draps suspendus, & M. Petit a prouvé que cet effet a aussi lieu dans le vuide de Boyle.

184. NON-SEULEMENT il existe une force d'attraction entre les corps, on observe aussi qu'ils se repoussent. Nous avons rapporté ci-dessus une expérience dans laquelle un corps tranchant repousse la lumiere. Les parties des corps séparées par la fermentation, la combustion, l'effervescence imitent l'air qui est composé de parties qui se repoussent. Les huiles grossieres & l'eau se repoussent mutuellement & ne se mêlent pas, à moins que le principe acide ou le phlegme ne commencent à dominer dans ces huiles. Certains insectes par les pieds desquels il transpire une certaine huile, marchent sur l'eau sans s'enfoncer. Les plumes des oiseaux aquatiques repoussent l'eau qui ne les mouille pas.

On sait que la rosée ne tombe pas sur les métaux polis, mais qu'elle en est repoussée. Avec les poils de certains animaux, comme les chevaux, les boucs, on fait des étoffes qui résistent à la pluie qu'elles repoussent.

Le cuivre fondu jetté dans l'eau en est repoussé avec une grande violence au grand péril des assistans.

Nous pourrions rapporter bien d'autres exemples d'at-

tractions & de répulsions; mais ceux que nous venons d'indiquer sont plus que suffisants pour convaincre tout homme non prévenu qu'il existe dans la nature des forces, soit répulsives soit attractives. Il nous reste à parler de leur cause & des loix qu'elles suivent.

185. LES Collecteurs des actes de *Leipsick* comprirent enfin en 1710, qu'on ne peut expliquer par la compression d'un fluide environnant les effets que les Attractionaires attr?uent à l'attraction, & qu'il faut les rapporter à un principe propre aux corps mêmes. Ce principe selon eux consiste dans des atmosphères invisibles qui pénètrent la substance des corps, & se répandent autour de leur surface. » Il existe sans doute (dit le » savant Auteur des Institutions Neutoniennes, seconde » édition, pag. 251,) de pareilles atmosphères. C'est » par elles que deux objectifs de télescope sont soute- » nus l'un au-dessus de l'autre sans se toucher; c'est par » elles qu'une aiguille sèche, un très-petit globule de » mercure, surnagent à la surface de l'eau, en faisant » dans ce fluide, & tout à l'entour de ces corps un » creux proportionné à leur étendue ou diamètre «.

Nous sommes bien éloignés d'attribuer les effets dont nous venons de faire mention à de pareilles atmosphères, dont l'existence n'est nullement prouvée. (Il ne s'agit pas ici des attractions qu'on pouroit attribuer à l'électricité ou à la force magnétique, nous en parlerons dans la suite). Car d'où viennent ces atmosphères? quelle est leur origine, leur nature? Comment agissent-elles? d'où tirent-elles leur force? quelle cause les retient autour des corps? ont-elles du mouvement, & d'où leur vient-il? si elles n'en ont point, comment operent-elles? Voilà des questions auxquelles je ne crois pas qu'on puisse répondre quelque chose de raisonnable, & capable de faire impression sur un homme sensé & un peu instruit.

Dirons-nous qu'il y a dans les corps un principe interne qui les pousse les uns vers les autres, ou qui les repousse selon les différentes occasions, puisqu'on n'a pu jusqu'ici trouver aucune matiere qui produise cet effet? J'aimerois autant dire qu'il y a un principe interne qui produit l'irritabilité des fibres

d'un corps animé, qui assimile les alimens aux corps des animaux, qui les nourrit & les fait croître, qui régénere la peau des plaies, unit les vaisseaux ensemble, reproduit dans certains animaux des animaux entiers par le moyen des parties coupées, qui produit la végétation des semences, & ce qu'on appelle la vie des plantes, &c. Quel pouroit-être ce principe interne? d'où tire-t'il son origine? quelle est sa nature? qui peut prouver son existence?

186. Les espaces célestes dans lesquels les planètes & les comètes font leurs révolutions sont un vuide presque parfait, puisque les planètes ni les comètes ne trouvent aucune résistance sensible dans leurs mouvemens de la part du milieu ou espace qu'elles traversent, quoique les comètes se meuvent du Nord au Midi, du Midi au Nord, d'Orient en Occident, &c. D'où il suit que l'attraction qui retient les corps célestes dans leurs orbites, ne peut être l'effet de l'impulsion d'un fluide quelconque (*).

(*) Un fluide quelconque ne peut agir sur les corps d'une maniere proportionnelle à leur masse, puisqu'il ne peut pas choquer deux parties dont l'une seroit au-dessous de l'autre; cependant nous savons que dans le vuide de Boyle les corps pesans ou légers descendent avec la même vîtesse, preuve certaine que toutes leurs parties sont poussées par une cause qui produit le même effet sur chacune d'elles. Cette cause n'est donc pas un fluide, pas même un fluide discret, c'est-à-dire, un fluide dont les parties ne se toucheroient pas immédiatement & mathématiquement les unes les autres, fluide par le moyen duquel un Physicien moderne prétend vainement expliquer la cause de l'attraction: car un tel fluide feroit perdre beaucoup de mouvement aux planètes.

En effet, soit t la terre transportée dans son orbite tBD (fig. 132), si comme on le prétend dans ce systême, il y a un fluide discret qui tend de tous côtés vers le soleil S, & qui retient la terre dans son orbite en la poussant continuellement vers cet astre, & l'empêchant de suivre la tangente tA, il est visible que le fluide At, at doit pousser les corps terrestres vers la terre & être la cause de leur pesanteur. La terre choque donc à chaque instant le fluide discret qui tend

Qu'on cherche tant qu'on voudra, qu'on imagine des fluides de toutes les espèces, élastiques ou non élastiques, on ne prouvera l'existence d'aucun qui puisse produire les phénomènes des attractions & des

vers le soleil & le choc se fait selon la tangente *t* A, c'est-à-dire, dans la direction *t* A ; donc la terre doit continuellement perdre de son mouvement, ce qui n'est pas. Qu'on ne dise pas que le fluide *a t* répare le mouvement détruit par le fluide A *t* ; car quand on supposeroit que ces fluides ont des vîtesses égales mais opposées, il s'ensuivroit que leurs efforts mutuels se détruiroient si la terre étoit en repos ; mais elle perdra de son mouvement si elle se meut dans le sens *t* A, parce qu'alors allant contre la direction du fluide A *t*, elle doit éprouver beaucoup de résistance, de maniere que sa vîtesse après le choc de l'un & de l'autre fluide doit être plus petite qu'auparavant. Mais pour mieux éclaircir ce point, supposons une seule particule de la terre choquée par un seul atôme du fluide qui va selon la direction A*t*, tandis qu'elle est choquée en même-tems par un pareil atôme du fluide qui va selon la direction *a t*, & soit supposée la vîtesse de la particule terrestre, dont on vient de parler, selon la direction *t* A, exprimée par l'unité, la vîtesse des atômes choquans, étant si l'on veut, exprimée par 100 (on peut employer un nombre plus grand si celui-là ne plaît pas, le raisonnement sera toujours le même), supposons de plus que la particule terrestre choquée est de même masse que chacun des atômes choquans. Par les loix du mouvement, après le choc de l'atôme *a*, la particule terrestre aura une vîtesse exprimée par la somme des deux mouvemens 100 & 1 de l'atôme & de la particule terrestre, divisée par la somme des masses ; ainsi en supposant que la particule terrestre & l'atôme sont représentés chacun par l'unité de masse, ce mouvement sera $= \frac{101}{2}$, & considérant l'atôme & la particule terrestre, comme ne faisant plus qu'une même molécule, cette molécule aura un mouvement = 101. L'atôme A = 1, qui a, en sens contraire, un mouvement = 100, choquera cette molécule avec une vîtesse = 100, & après le choc

répulsions, & qui en même-tems ne fasse aucune résistance du moins sensible aux mouvemens des planètes & des comètes. Au contraire tout nous porte à croire que l'attraction & la répulsion dépendent d'une loi immédiate de la nature, par laquelle le Créateur auroit établi que les particules des corps s'attireroient ou se repousseroient d'une maniere dépendante de la distance qu'il y auroit entr'elles. 1°. On ne peut sans absurdité nier que le grand Etre ait pu établir une telle loi. 2°. Un grand nombre de phénomènes qu'on a rapportés ci-dessus. 3°. La loi de continuité, qui ne permet pas qu'un corps qui va en choquer un autre, arrive jusques à lui avec toute sa vîtesse & qu'il y ait un contact mathématique, prouvent suffisamment que les corps agissent les

---

la vîtesse commune sera $= \frac{101-100}{3} = \frac{1}{3}$; c'est-à-dire, que la particule terrestre n'aura plus que le tiers de la vîtesse qu'elle avoit; de sorte qu'à chaque instant la terre perdroit les $\frac{2}{3}$ de son mouvement annuel, ce qui est contre l'observation. De plus que deviendront les atômes choquans après le choc? resteront-ils unis à la terre? dans ce cas comme chaque particule de la terre doit être choquée à chaque moment par un atôme égal, autrement la pesanteur des corps ne sauroit être proportionnelle à la masse, notre globe seroit déja d'un volume immense & il croîtroit continuellement, ce qui est encore contre l'observation. Dira-t-on que les atômes du fluide choquant sont élastiques & ont un ressort qui les fait réflexir? d'où vient ce ressort? d'ailleurs en se réflexissant ils seroient choqués de nouveau par ceux qui les suivent, & il y auroit une confusion inexprimable dans ces chocs continuels & réitérés. D'un autre côté quelle preuve a-t-on qu'il existe dans la nature une si grande quantité d'atômes en mouvement, & que ces atômes ont leur direction vers notre systême comme vers un centre?

Le systême du fluide discret dont on vient de parler suppose de l'imagination dans celui qui l'a trouvé; mais nous demandons des preuves & non une pure hypothèse, qui, même en l'admettant, ne pourroit satisfaire aux phénomènes de la nature.

uns sur les autres, qu'ils s'attirent & se repoussent sans se toucher mathématiquement. Dieu a donc voulu qu'à telle distance une particule de matiere en attirât une semblable, & qu'à une distance différente il y eût une répulsion au lieu d'une attraction. Cherchons maintenant s'il est possible, selon quelles loix les corps s'attirent ou se repoussent.

187. Je remarque d'abord que si une particule de matiere que je désignerai par *a* (fig. 133) attire ou repousse, la particule *b* égale, celle-ci à son tour doit attirer ou repousser la particule *a*. Car par la même raison que *a* attire ou repousse *b*, *b* doit aussi attirer ou repousser *a*; de sorte que l'attraction & la répulsion doivent être réciproques entre les parties de la matiere, & par conséquent entre les corps composés de ces particules.

En second lieu, si l'on suppose la particule *c* égale & située tout auprès de la particule *a*, de maniere qu'on puisse sans erreur assignable, considérer les lignes *cb*, *ab* comme coincidentes & n'en faisant qu'une, il est visible que chacune des particules *a*, *c* exerçant une égale force d'attraction sur la particule *b*, celle-ci doit s'approcher deux fois plus vite des particules *a*, *c* que les particules *a* & *c* ne s'approchent de *b*. Ainsi l'attraction (& il en de même de la répulsion) est proportionnelle à la masse attirante, c'est-à-dire, qu'une masse attire par toutes ses parties, & l'attraction est la somme des attractions de toutes les parties; de même l'attraction est proportionnelle à la masse attirée, puisque toutes les parties de cette masse sont attirées. Mais il peut se faire que l'attraction d'une masse double ne soit pas double de celle d'une masse sous-double; parce que les parties attirées de cette masse étant inégalement distantes des parties attirantes d'une autre masse, l'attraction de chaque partie ne sera pas la même. Ainsi quand on dit que l'attraction est proportionnelle aux masses attirantes & aux masses attirées, cela doit s'entendre dans le sens qu'on vient de l'expliquer. Cependant s'il s'agit des globes supposés parfaits & homogènes, il est démontré (68) qu'en supposant aussi que l'attraction suive la raison renversée des quarrés des distances, c'est-à-dire qu'en supposant que l'attraction soit d'autant plus

petite que le quarré de la distance est plus grand, ces globes s'attirent de la même maniere que si toute leur matiere étoit réunie à leur centre.

188. LORSQU'IL s'agit des grandes distances l'attraction suit à peu-près la raison inverse ou renversée des quarrés des distances. En effet il est visible que la Lune ne peut tourner autour de la Terre à moins qu'elle ne soit attirée vers la Terre. Ainsi si T (fig. 134) représente la Terre, A représentant la Lune, il est évident que si rien ne poussoit la Lune vers la Terre, la Lune suivroit la tangente AB de son orbite, mais au contraire si la Lune est poussée par deux forces l'une selon AB (c'est la force tangentielle), l'autre selon AM (c'est la force avec laquelle la Terre attire la Lune, force qui agit continuellement), par l'action composée de ces forces, la Lune décrira l'arc A*m*, qu'on peut, si l'on veut, considérer comme la diagonale du parallèlogramme AB*m*M. Or les Géomètres démontrent que la ligne B*m*, ou son égale AM qui exprime l'attraction de la Terre est à peu-près de 15 pieds, lorsqu'il s'agit d'un arc A*m* décrit par la Lune dans une minute de tems. En effet la Lune faisant sa révolution en 27 jours 7 heures 43 minutes à peu-près, si on réduit tout en minutes, & qu'après avoir multiplié la longueur de la circonférence d'un grand cercle de la Terre par 60 (parce que le rayon de l'orbite lunaire est à peu-pres 60 fois plus grand que celui de notre globe), on divise le produit par le nombre des minutes du tems de la révolution lunaire, on aura l'arc A*m* décrit dans une minute. Maintenant ayant tiré les cordes A*m*, *mb*, & l'ordonnée *m*M, il est visible (par la propriété du triangle rectangle), que AM = *m*B est égale au quarré de la corde A*m* ou de l'arc A*m* qui se confond sensiblement avec cette corde, divisé par M*b* = A*b*, car ces quantités different fort peu l'une de l'autre. Si l'on fait cette division on trouvera environ 15 pieds au quotient. Mais auprès de la Terre un corps décrit dans une seconde par la force de l'attraction de la Terre un espace d'environ 15 pieds, & selon ce qu'on a dit ci-dessus (115), le même corps décriroit dans une minute ou 60 secondes, un espace 3600 fois plus grand, parce que les espaces parcourus par la cause de la gravité (c'est la même

chose

chose que l'attraction) sont auprès de la Terre dans le rapport des quarrés des tems, & que 3600 est le quarré de 60, 1 étant le quarré de 1. Or en considérant l'orbite lunaire comme un cercle, ce qui est permis ici, son rayon sera à peu-près 60 fois aussi grand que celui de la Terre; donc les espaces que la Lune & un corps situé auprès de la surface de la Terre parcouroient en allant vers le centre de la Terre, suivent à peu-près la raison inverse des quarrés des distances par rapport à ce centre. Ainsi dans les grandes distances l'attraction suit à peu-près la raison inverse des quarrés des distances.

189. LA même chose n'a pas lieu dans les petites distances. Car nous avons remarqué ci-devant (180) que certains rayons de lumiere (fig. 131) étoient attirés & les autres repoussés. Le rayon E*h* n'est ni attiré ni repoussé non plus que le rayon EL, mais tous ceux qui sont entre ces deux-là sont repoussés, tous ceux qui passent entre le tranchant S & le rayon E*h* étant attirés. Donc dans les petites distances la répulsion peut succéder à l'attraction. Mais il y a un point mitoyen, auquel il n'y a ni attraction ni répulsion. D'un autre côté parce que les corps ne parviennent pas au contact mathématique par les principes de la loi de continuité (173), il doit y avoir une répulsion par rapport aux rayons E*x* qui iroient raser le tranchant S; mais ces rayons étant en petit nombre, ils ne pourront faire une impression suffisante sur les yeux pour être apperçus. Il doit aussi y avoir entre les rayons E*x* & ED un point dans lequel il ne se fasse ni attraction ni répulsion. & s'il y a un rayon qui passe par ce point, il doit suivre sa direction sans se détourner à droite ni à gauche; mais parce qu'un seul rayon ne peut suffisamment ébranler l'organe de la vue, on ne l'appercevra pas. Cependant dira-t-on peut-être, on apperçoit le rayon E*h* qui est un rayon simple. Le rayon E*h* est un rayon composé de plusieurs autres dont celui du milieu ne change pas de direction, tandis que les collatéraux de droite & de gauche changent de direction, mais d'une maniere insensible, ce qui n'a pas lieu par rapport au rayon qu'on supposeroit passer entre les rayons E*x* & ED.

190. POUR se former une idée plus claire de la loi

des forces attractives & répulsives ; ou plutôt de la force unique naturelle avec laquelle les corps agissent les uns sur les autres & qui selon les distances devient attractive ou répulsive, supposons une courbe DEFGHKMOQSTV (fig. 135) rapportée à la ligne AR que nous apellerons l'axe de la courbe, de maniere qu'en menant des perpendiculaires (à cet axe) terminées à la courbe, telles que *ag*, *br*, *hd*, &c. que nous appellerons ordonnées, & prenant le point A pour l'origine des abscisses A*a*, A*b*, A*d*, &c. comprises entre l'origine A & les différentes ordonnées, les points de matiere situés à des distances exprimées par ces abscisses s'attirent ou se repoussent avec une force désignée par les ordonnées correspondantes. Mais pour distinguer les répulsions des attractions, nous supposerons que les ordonnées *ag*, *zt*, &c. (*) élevées au-dessus de l'axe & que nous appellerons ordonnées positives, désignent les répulsions, tandis que les ordonnées *hd*, *il*, &c. menées en sens contraire, c'est-à-dire en-dessous de l'axe (& qu'on nommera ordonnées négatives) indiquent les attractions. Cela posé, puisque dans les grandes distances, l'attraction suit à très-peu-près, la raison renversée des quarrés des distances, nous pourrons supposer que l'arc T*p*V a des ordonnées *po*, *sv*, &c. qui diminuent comme les quarrés des abscisses A*o*, A*v* augmentent ; mais parce que les corps ne peuvent pas parvenir au contact immédiat, la répulsion doit devenir d'autant plus grande que les corps se rapprochent davantage, afin d'empêcher le contact mathématique en détruisant la plus grande vîtesse naturelle que les corps puissent acquerir. Il pourra donc se faire que très-près du contact, à la distance désignée par A*a*, la répulsion exprimée par *ag* soit excessivement grande & la répulsion ira encore en augmentant lorsque l'abscisse sera plus petite que A*a*, de maniere que les corps éprouvant

(*) On doit imaginer une infinité d'ordonnées dont chacune correspond à un point de la courbe, les unes positives, les autres négatives ; de maniere qu'il n'y ait aucun point de la courbe qui n'ait son ordonnée.

des répulsions qui vont toujours en croissant excessivement, elles les empêcheront de parvenir au contact mathématique avec un autre corps ; mais aux points E, G, I, L, N, P, R les ordonnées positives & négatives étant égales à zéro il n'y aura ni répulsion ni attraction. Entre le point E & le point G, la courbe n'ayant que des ordonnées négatives, deux points de matiere situés l'un en A & l'autre en *i* s'attireront avec une force *i l*, ainsi ils s'approcheront l'un de l'autre par un mouvement qui ira toujours croissant jusqu'à ce que leur distance soit représentée par A E ; car dans tous les points compris entre G & E, la force attractive désignée par l'ordonnée correspondante, pousse ces points l'un vers l'autre ; ainsi au point *h*, la force *h d* se communiquant à la vîtesse avec laquelle les corpuscules s'approchoient déja l'un de l'autre, augmentera cette vîtesse. Lorsque la distance sera égale à l'abscisse A E, l'attraction sera $=0$, cependant les points continueront de s'approcher en vertu du mouvement acquis ; mais la force répulsive venant à agir continuellement retardera d'abord, arrêtera ensuite le mouvement & enfin repoussera les points qui se rapprocheront par la force attractive comme la premiere fois, & se repousseront ensuite, de maniere qu'ils feront des oscillations en s'approchant & en s'éloignant alternativement : mais si la distance A G est insensible, les oscillations seront insensibles, & l'on ne pourra les observer.

Si deux points de matiere se trouvent à la distance A *m* corespondante à un arc G H I répulsif, ils se repousseront & parviendront à la distance A I avec une force égale à celle qui est représentée par la somme des forces répulsives correspondantes à la partie *m* I de l'axe, c'est-à-dire avec une force représentée par l'espace *m n* H I (*). Passant ensuite à une distance plus

(*) Si on conçoit que chaque ordonnée située entre *m* & I a une largeur infiniment petite, la somme de ces ordonnées ou la somme des forces répulsives correspondantes à *m* I, sera représentée par l'espace *m n* H I, compris entre la partie de l'axe *m* I, l'ordonnée *m n* & l'arc *n* H I.

grande que AI, ils s'attireront mutuellement ; mais si l'espace ou l'aire IKL est moindre que *mn* HI, la force qui tendra à les faire approcher ne pourra pas détruire tout leur mouvement répulsif, ils passeront dans un nouvel arc répulsif LMN, & ensuite dans l'arc attractif suivant. Si l'aire comprise entre cet arc & l'axe est plus grande que la force accumulée de répulsion avec laquelle les corpuscules ou points matériels ont franchi la distance AN, ils ne pourront franchir cet arc ; mais ils seront attirés de nouveau l'un vers l'autre. Si cette aire est justement égale au mouvement de répulsion qu'ils avoient à la distance AN, lorsqu'ils seront arrivés en P, ce mouvement se trouvant entierement détruit, les corpuscules s'arrêteront à cette limite. Si cette aire est moindre que le mouvement dont on vient de parler, les corpuscules franchiront la distance AP entreront dans l'arc répulsif PQR, & ensuite dans l'arc attractif RSTV. On voit par là qu'il y a deux especes de limites, j'appelle *limite de cohésion*, celle dans laquelle la distance augmentant, la force attractive tend à rapprocher les points, & *limite de non-cohésion*, celle dans laquelle la distance venant à augmenter la force répulsive agit pour éloigner davantage les points.

191. De ce qu'on vient de dire il semble suivre que deux points de matiere ne peuvent parvenir à un contact immédiat & mathématique & que par conséquent les élémens des corps ou leurs parties primitives sont indivisibles & simples. On pourroit cependant dire que les élémens ou les parties primitives dont les corps sont composés ont une très-petite étendue, & que les loix de la répulsion n'ont lieu qu'entre ces élémens & non entre les particules mêmes de l'assemblage desquelles résultent ces mêmes élémens ; de maniere qu'entre ces élémens & non entre les particules mêmes de l'assemblage desquelles résultent ces mêmes élémens, il y a seulement des forces attractives & non des forces répulsives. Il est vrai que si on supposoit qu'une particule située au milieu d'un élément fût anéantie, les autres particules étant supposées séparées par cette opération s'approcheroient par leur force attractive & se choqueroient de maniere que la loi de continuité seroit violée ; mais on peut répondre,

1°. que cela ne peut se faire naturellement, & qu'il ne s'agit ici que des effets naturels. 2°. Que si on supposoit aussi que Dieu détruise la force répulsive, la même loi de continuité seroit violée dans le choc des corps. 3°. Que rien n'empêche de dire que Dieu ait établi deux especes de cohésion, l'une entre les élémens des corps, & l'autre bien différente entre les particules mêmes de ces élémens.

Il faut cependant convenir qu'il est difficile de prouver que les premiers élémens de la matiere sont étendus & divisibles; car il n'existe aucune partie de matiere, qu'on la suppose simple, déterminée ou indéterminée qui exige l'existence d'autres parties voisines & hors d'elle; ainsi rien n'empêche de dire que les élémens des corps ne se touchent pas, qu'ils sont placés à certaines distances les uns des autres & retenus par des forces attractives qui les empêchent de s'éloigner, tandis que les forces répulsives les empêchent de s'approcher les unes des autres (*).

(*) Les anciens Scholastiques, au lieu de donner l'explication & la cause d'un effet ou d'un phénomène, disoient souvent qu'un tel effet étoit produit par une cause intrinsèque propre à un tel corps, sans prouver d'ailleurs l'existence de cette cause : & c'est ce qu'on appelle une *qualité oculte*.

Quelqu'un pourroit objecter contre la théorie qu'on vient d'établir, que les forces mutuelles avec lesquelles nous faisons agir les corps les uns sur les autres, sont des qualités occultes, & qu'elles établissent une action entre des corps éloignés les uns des autres. Mais nous ne prétendons pas qu'un corps agisse sur l'autre par une force qui lui soit particuliere, nous voulons dire seulement que Dieu en créant cet univers visible, a voulu que les corps fussent déterminés à s'approcher ou à s'éloigner les uns des autres, selon qu'ils se trouveroient plus ou moins distants. Ce sont ces déterminations qui sont les effets de la loi des forces répulsives & attractives que les corps exercent les uns sur les autres. Or, ces déterminations ne sont pas des qualités occultes : chacun comprend ce que c'est que s'approcher, s'éloigner, ou rester dans la même place. Ainsi la loi des forces

192. PARMI les Phénomènes qu'on peut expliquer par les principes de l'attraction, on doit compter celui des tubes capillaires qui a tant exercé les Physiciens modernes. Si l'on plonge un tube capillaire de verre dans

---

que nous admettons ne peut être mise au rang des qualités occultes, ou des qualités & des propriétés dont on n'a aucune idée distincte. D'ailleurs je voudrois bien qu'on me dît de bonne-foi si l'on comprend bien comment un corps pourroit agir sur un autre corps & lui communiquer du mouvement par un contact mathématique, & comment par le moyen d'un tel contact le mouvement peut passer d'un corps dans un autre. Si l'on dit que cela est ainsi, j'avoue que je n'ai pas assez de pénétration pour le comprendre, & qu'il n'est pas probable que le même mouvement qui n'est qu'une modification d'un corps, puisse devenir la modification d'un autre corps. Si l'on dit que lorsqu'un corps en choque un autre, Dieu pour éviter que les corps ne se pénétrent, c'est-à-dire, n'occupent le même lieu, détruit une partie du mouvement dans le corps choquant & qu'il en donne au corps choqué; pourquoi ne voudroit-on pas aussi que pour éviter la pénétration, aussi bien que pour maintenir la loi de continuité, Dieu détruise du mouvement dans le corps choquant avant qu'il touche immédiatement & mathématiquement le corps choqué.

On auroit tort aussi de prétendre avec le savant Euler que la force d'inertie est incompatible avec l'attraction, & qu'un corps qui est doué de la force d'inertie ne peut avoir en même-tems la force attractive, comme un corps qui est déja teint d'une certaine couleur, ne peut pas en même-tems avoir d'autres couleurs. Car, un corps est susceptible de plusieurs forces partielles, il est susceptible de la force d'inertie & de la force attractive, & ces deux forces ne s'excluent pas mutuellement. En effet, un corps A résiste à son changement d'état par son inertie, mais cela n'empêche pas qu'il ne puisse attirer un autre corps B par la force attractive. Cela n'empêche pas non plus qu'il ne puisse être attiré par un autre corps; parce que le corps A n'est pas attiré vers le corps B par un principe ou force intrinsèque au corps

l'eau, il prend la place d'un égal volume de fluide ; mais parce que les parties du verre ont plus de densité & de force attractive que celles de l'eau, les particules d'eau qui se trouvent précisément au-dessous du

A. Supposons un corps A en mouvement ou en repos, l'inertie empêche-t-elle qu'on ne puisse le tirer par l'action d'une cause extrinsèque, d'une corde, par exemple ? je ne crois pas que personne ose le dire. Mais un corps qui a une couleur déterminée ne peut avoir en même-tems une couleur différente comme cela est évident ; aussi l'on ne peut comparer la force d'inertie aux couleurs des corps, ni prétendre que comme une couleur exclud l'autre dans le même corps, la force d'inertie exclud la force attractive. Il faudroit pour cela que la force d'inertie fût la collection de toutes les forces que peuvent avoir les corps, ce qui n'est pas.

J'avoue qu'il y a encore beaucoup de choses inconnues dans la loi des forces que nous admettons, comme le nombre des intersections de la courbe des forces avec son axe, la forme & la grandeur des arcs intermédiaires repulsif & attractif. Ce sont là des choses qui surpassent de beaucoup les forces de l'intelligence humaine, & dont l'Etre suprême semble s'être réservé la connoissance. Mais cela ne détruit pas ce que nous avons déja avancé, & l'on ne doit pas rejetter ce qui est clair à cause de ce qui est obscur.

En comparant cette théorie avec les Physiques les plus accréditées & les plus estimées en France, on conviendra sans peine que la théorie des forces attractives & répulsives, donne une facilité admirable pour expliquer des phénomènes dont on ne sauroit rendre aucune raison satisfaisante, en admettant l'impulsion immédiate & mathématique.

Qu'on ne dise pas que dans cette théorie des forces que nous admettons, on commet le saut que nous voulons éviter, & que le passage de l'attraction à la répulsion se fait par un saut : ceux qui feroient une telle objection ne comprendroient nullement en quoi consiste cette fameuse loi de continuité de laquelle nous avons parlé ci-dessus. Le saut que nous voulons éviter par cette théorie, consiste en ce que l'on passeroit d'une grandeur à l'autre,

tube sont attirées vers le haut plus qu'elles ne l'étoient quand au lieu du verre il n'y avoit que de l'eau ; ainsi la colonne d'eau qui répond à l'ouverture du tube est soulevée par l'attraction du tube, de maniere qu'elle

---

sans passer par les quantités intermédiaires. Cela n'arrive pas dans notre théorie, selon laquelle en prenant une force répulsive si petite que l'on voudra, & une force attractive quelconque déterminée, il y a toujours entr'elles toutes les forces répulsives moindres jusques à zéro où l'on a une détermination à conserver l'état précédent de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite ; & ensuite depuis zéro jusqu'à la force attractive déterminée dont on vient de parler, succèdent des forces attractives intermédiaires. C'est ainsi qu'on va de la force répulsive *mn* à la force attractive *il*, en passant par les forces répulsives intermédiaires qui se trouvent entre *m* & G, où la force répulsive est zéro ; depuis G jusques en *i* on trouve les forces attractives intermédiaires qui empêchent le saut dont il est parlé dans l'objection. On ne peut pas dire non plus que l'on passe du dernier degré de répulsion au premier degré d'attraction immédiatement & par un saut ; car on passe par un degré intermédiaire zéro dans lequel il n'y a ni attraction ni répulsion. Mais je demande s'il y a un degré d'attraction premier ou dernier, s'il y a une ordonnée *mn* si petite qu'elle soit qui soit la premiere ou la derniere ou la plus petite d'un arc répulsif? Etant donnée une force répulsive si petite qu'elle soit, étant donnée une ordonnée si petite qu'on voudra, il y en a toujours de plus petites à l'infini sans aucune derniere. Ainsi celui qui se représente un dernier & un premier terme dans les grandeurs des lignes, dans la force, dans la vîtesse, celui-là, dis-je, ne comprend nullement en quoi consiste la loi de continuité que nous admettons dans la nature.

Quelqu'un pourra peut-être penser que notre courbe des forces (fig. 135) est trop compliquée, irréguliere & composée de parties qui n'ont aucune connexion, aucun rapport entr'elles. Il y en a même qui prétendent que l'attraction & la répulsion sont des forces de différens genres, qu'il vaut mieux n'en admettre que d'une espece, & expliquer la répulsion par une attraction moindre.

ne peut plus faire équilibre avec les autres colonnes d'eau voisines, à moins qu'en devenant plus longue l'excès de sa hauteur ne compense sa légéreté. Il est donc nécessaire que cette colonne monte dans le tube

---

Quoique la courbe des forces soit composée de plusieurs arcs, néanmoins elle est continue, ses différentes parties sont très-bien liées entr'elles & leur figure dépend du rapport qu'il y a entre les ordonnées & les abscisses. Quand à ce qui regarde la répulsion & l'attraction, en admettant que les forces soient de différens genres, on ne peut pas conclure qu'elles n'ont pas lieu dans la nature; puisque les phénomènes démontrent leur existence. Mais il n'est pas plus facile de prononcer que l'attraction & la répulsion appartiennent à différens genres de forces, que de faire voir que le mouvement vers l'orient & le mouvement vers l'occident sont de genres différens. Les quantités négatives & positives étant du même genre, & les attractions & les répulsions pouvant être regardées comme des quantités, dont les unes sont positives & les autres négatives, on doit conclure que la répulsion & l'attraction sont des forces du même genre.

Nous avons démontré ci-dessus que les globes homogènes & dont les parties s'attirent en raison renversée des quarrés des distances, s'attirent aussi dans le même rapport inverse des quarrés des distances entre leurs centres. C'est à cause de cette perfection ou de cette propriété que le savant Maupertuis a pensé que l'Auteur de la nature avoit choisi cette loi de préférence à toute autre.

Mais quand il s'agit des loix de la nature, les causes finales ne peuvent pas être d'un grand secours. Quel est le mortel qui connoît toutes les fins que l'Etre suprême a pu se proposer en créant cet univers visible? d'ailleurs cette loi par l'effet de laquelle les globes s'attireroient en raison inverse des quarrés des distances qu'il y a entre leurs centres, n'est d'aucun usage dans la nature; puisqu'il n'y a aucun globe parfait dans le monde. La terre est hérissée des montagnes, son tissu est composé de couches de différentes natures, qui n'ont pas par-tout la même densité, & nous pouvons conclure par analogie que la même chose

& s'éleve au-dessus du niveau des autres. Soit BG (*fig.* 136) un tube de verre plongé dans l'eau du vase SV jusqu'en E, une particule d'eau A, par exemple, placée au-dessous de ce tube est attirée par la masse

---

a lieu dans les planètes & les comètes. On sait aussi que la Terre, Jupiter, & toutes les planètes qui tournent sur un axe doivent être un peu aplaties; ainsi cette détermination des Géomètres ne peut avoir lieu exactement pour les corps célestes, en supposant même que les élémens de la matiere s'attirent selon la loi qu'admet Maupertuis.

Mais pourquoi, dira-t-on peut-être, les montagnes & les édifices n'attirent-ils pas les corpuscules qui voltigent dans l'air? cela vient de ce que l'attraction de la terre est si grande respectivement à celle des plus hautes montagnes, qu'il est bien difficile de s'appercevoir des effets de celle-ci. (Voyez ce que nous avons dit sur l'attraction dans nos Institutions Mathématiques, seconde édition.)

La théorie qu'on vient de développer dans ce chapitre, nous paroît être la véritable clef de la Physique & de la Chymie. Nous nous contenterons pour le présent d'en faire quelques applications, nous réservant d'en faire voir l'usage dans différentes questions que nous traiterons dans la suite.

Les eaux raréfiées par la chaleur du soleil se levent en forme de vapeurs jusqu'à la région supérieure de l'air, & elles ne s'arrêtent que quand elles sont parvenues à un air de même densité & de même pesanteur; là elles composent des nuages qui prennent mille figures bisares. Bientôt par l'action des vents ou du froid qui condense ces vapeurs & leur fait occuper un moindre espace, elles perdent leur forme, se réunissent en gouttes, ou en flocons de neige & retombent sur la terre sous la forme de pluie, de neige ou de grêle. La plus grande partie de la pluie coule des montagnes & des lieux élevés, dans les rivieres & les fleuves qui la transportent à la mer où elle se convertit de nouveau en vapeurs: une partie s'insinue dans la terre & de-là dans les semences & les racines des plantes. La même eau entre dans la composition de corps bien différens: une partie passe dans le corps de la plante, l'autre partie sert à la

du verre plus qu'elle ne l'étoit par l'eau dont le tube a pris la place ; c'est la même chose pour toutes les autres particules d'eau situées au-dessous de B dans l'étendue de la sphère d'attraction du verre que je suppose s'étendre jusqu'en grand A.

---

composition des feuilles, du fruit, des fleurs. La même eau sert à former le chêne, le sapin & le pin, arbres si utiles à la navigation, le hêtre, les ormes, le cédre, l'érable, le tilleul qui est l'ornement des promenades publiques, & toutes les especes d'arbres qu'on voit sur la surface de la terre. Dans la même plante, la même pluie entre dans la composition de parties bien différentes. La forme de la racine du lin, par exemple, differe beaucoup du corps de la plante. Les ouvriers séparent la membrane qui recouvre la tige, & après l'avoir travaillée de mille manieres, ils en tordent les fibres en de longs fils dont on fait différentes toiles si utiles aux hommes. Ces toiles devenues inutiles par un long usage, sont mises dans l'eau & battues avec des marteaux de bois jusques à ce que réduites en un espece de pulpe, on en puisse faire du papier : ce papier étant jetté dans le feu, une partie se change en une poussiere subtile tandis que l'autre se dissipe en fumée. Tels sont les effets admirables qui résultent du changement de situation, de force attractive & répulsive dans les parties de la matiere.

Mais parcourons rapidement les divers changemens de la nature selon les différentes températures du ciel. Toutes les parties de notre globe changent continuellement de situation par rapport au soleil, reçoivent ses rayons tantôt plus tantôt moins obliques, tantôt plus tantôt moins long-tems; ce qui fait que presque toute la nature change alternativement de face. En automne les moissons se déssechent, les fruits mûrissent, les campagnes se dépouillent peu à peu de leur agréable verdure & les arbres de leurs feuillages qui garantissoient les troupeaux & les hommes des ardeurs de la canicule. En hiver la neige & le froid engourdissent la nature, les fleuves, la mer même peut porter des fardeaux, & les eaux, qui auparavant n'étoient accessibles qu'aux vaisseaux, portent des camps & des armées. A cette horrible saison succède l'agréable printems; la nature semble se déri-

Considérons maintenant l'eau qui est dans le tube B jusqu'en C, en supposant l'espace C B de la même longueur que B A ou que la sphère d'activité du verre, il est visible que si l'on prend une particule *a* à la moi-

der, les neiges disparoissent, les champs produisent de nouvelles herbes, les arbres se couvrent de feuilles, les animaux ne se plaisent plus dans leurs étables ni le laboureur au coin de son feu.

Nec stabulis jam gaudet equus nec arator igne.

La terre prend une face plus riante & l'année repasse à travers les ardeurs de l'été.

Il est certain que selon la figure, la masse, la force attractive, la force répulsive des particules des corps, la nature doit produire un nombre infini d'effets différens. Cependant les Physiciens ne sont pas d'accord touchant la nature des premiers principes des corps. Les uns prétendent que la matiere est homogène & de même nature dans tous les corps. Les autres soutiennent que la différence des parties primitives de la matiere constitue la différence des métaux, des pierres, des arbres &c; mais nous reprendrons cette question dans la Physique lorsque nous traiterons de la nature des corps, nous contentant pour le présent de rapporter une expérience dont le genre humain peut retirer une grande utilité.

Il est certain que le sel marin & le sel de tartre sont de telle nature qu'ils attirent puissamment les vapeurs sulphureuses & plusieurs exhalaisons pernicieuses : cette vertu peut être d'un grand secours dans certaines occasions. Plusieurs ouvriers, comme par exemple, ceux qui s'occupent à fondre le plomb, traitent des matieres nuisibles qui laissent évaporer des corpuscules pernicieux à la santé. Si ces ouvriers ont alors l'attention d'approcher de la bouche & des narines un linge mouillé dans une dissolution de l'un des sels dont on vient de parler, ils pourront éviter le danger de la vapeur. C'est pour la même raison qu'on conseille de se servir de vinaigre blanc contre les exhalaisons pestilentielles. Il seroit utile à ceux qui travaillent dans les mines & les autres lieux infectés de vapeurs mortelles, de faire usage de cette propriété du sel marin & du sel de tartre, pour di-

tié de l'intervalle A B, & une particule *c* à la moitié de l'intervalle C B, ces deux molécules seront également attirées, l'une par le tube B C, à la distance B *a*, l'autre par le verre C D à la distance C *c* :

minuer au moins le danger auquel ils sont exposés. Nous renvoyons à la *Statique des Végetaux* de l'illustre M. Hales ceux qui voudront en savoir davantage sur cette matiere.

Supposons que l'on admette une loi unique d'attraction en raison inverse sous-doublée des distances *x*, ou exprimée par $\frac{a}{xx}$, au point de contact la vîtesse seroit $= \infty$ si elle avoit été finie à une distance sensible. Donc un corpuscule de matiere en arrivant au point de contact auroit une vîtesse infinie. Mais la vîtesse est égale à l'espace E divisé par le tems T ; ainsi en supposant l'espace E fini, de 100 toises, par exemple, le tems T seroit $= 0$, c'est-à-dire, que le mobile parcourroit un espace fini dans un instant indivisible, ce qui est absurde ; puisque le mouvement étant successif, quelle que soit la vîtesse, le mobile sera plutôt arrivé au milieu de l'espace qu'il parcourt qu'à la fin. Si l'on vouloit que l'attraction fût composée de deux parties $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^4}$, ce qui pourroit peut-être avoir lieu, du moins à peu près pour la force qui pousse la lune vers la terre & les planetes vers le soleil, *b* étant une quantité qu'on ne peut déterminer que par les observations ; dans le contact, la force seroit infinie aussi bien que la vîtesse ; ainsi cette loi si elle existe dans certaines distances, n'a certainement pas lieu dans les petites. Ceux qui ont voulu exprimer la loi d'attraction par une formule semblable à celle-ci $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^3}$, n'ont pas fait attention qu'elle auroit l'inconvénient de celles dont on vient de parler ; de plus si l'on prend pour positives les distances *x* en allant vers la droite, les distances prises du côté de la gauche seroient négatives, & alors la formule deviendroit $\frac{A}{x^2} - \frac{B}{x^3}$, ou

car l'attraction du verre comprise dans la longueur C *c*, étant détruite par celle de la partie inférieure égale C B, la particule *c* est dans le même état par rapport à la partie C D du tube, & à la même distance que la particule *a* par rapport B C ; ainsi elle est également attirée par le verre C D de bas en haut. Il en est de même de toutes les particules d'eau comprises dans l'espace A B, comparées avec celles qui sont dans un espace égal C B. Il est donc visible qu'il y a deux tubes de verre ou deux portions de tube B C & C D qui agissent en même-tems pour élever l'eau & dont chacune est égale à la longueur de la sphère d'attraction du verre. A l'égard des parties du tube qui sont audessus du point D elles n'ont aucune force effective, parce que l'attraction des parties supérieures est anéantie par celles qui sont immédiatement au-dessous.

Mais il y a une troisieme cause d'élévation qui vient de la partie GE du tube qui est hors de l'eau & qui agit à la surface de l'eau intérieurement de bas en haut pour soulever les molécules voisines de l'eau. Il faut convenir cependant que la partie E B du tube qui est au-dessous du niveau de la surface de l'eau agit également en sens contraire ; mais on doit faire attention que celle-ci a pris la place d'un tube d'eau qui agissoit aussi dans l'état naturel, de sorte que la nouvelle attraction additionnelle qui vient de la partie E G du tube n'est pas toute détruite par la partie inférieure ; car les parties situées à la surface de la liqueur, ont, il est vrai de bas en haut, une attraction toute nouvelle qui n'existoit pas avant que le tube de verre y fût plongé, mais elles ont de haut en bas une attraction dont une partie existoit déja ; puisqu'il y avoit de l'eau à la place du verre. Avec un peu d'attention il est aisé de voir que cette nouvelle cause équivaut à un tube d'eau qui seroit placé au dessus de celle du vase & qui auroit le même diamètre que le tube de verre. En effet imaginons que le tube F E D tant au-dedans qu'au-dehors de l'eau soit converti en un tube d'eau. Cette

ce qui revient au même, à des distances égales, mais opposées l'attraction seroit différente, ce qui est absurde.

hypothèse ne change rien à l'égalité & à la destruction des forces opposées EF, ED ; mais alors tout se passe au-dedans du vase, comme dans l'état naturel ; donc le tube de verre qui faisoit le même effet étoit équivalent à un tube d'eau qui auroit été placé au-dessus du niveau du vase.

Soit a l'attraction totale d'un petit tube de verre BC d'une longueur égale à la sphère d'activité du verre, b l'attraction du tube d'eau de même longueur ; alors, selon ce que nous avons dit ci-dessus, les particules d'eau placées sous le tube de verre sont attirées par la partie BC, plus qu'elles ne l'étoient quand il y avoit de l'eau à la place du verre, de la quantité $a - b$, c'est la différence des attractions du verre & de l'eau. Nous avons encore remarqué qu'il y a aussi une semblable portion de verre CD qui doit produire le même effet & dont par conséquent la force est exprimée par $a - b$; de sorte que vers l'extrémité du tube il y a une force $2a - 2b$ qui souleve les molécules de l'eau & les pousse vers l'intérieur du tube. Il y a de plus au-dessus de la surface de l'eau une attraction de verre $= a$, tandis qu'il y a au-dessous une attraction contraire $= a - b$. Retranchant celle-ci de l'attraction a, il restera $+ b$ qu'il faut ajouter à la force $2a - 2b$, le résultat $2a - b$ exprime la force totale que le verre exerce sur l'eau du vase pour la faire monter dans le tube. Il est donc évident que l'eau monteroit encore en supposant que $2a$ fût $> b$, c'est-à-dire que a fût un peu plus grand que $\frac{1}{2} b$, ou la densité du verre un peu plus de la moitié de celle de l'eau ; aussi l'expérience apprend que les tuyaux de plume, quoique plus legers que l'eau, font cependant monter ce fluide.

Lorsqu'un tube ne fait que toucher l'eau, son action est toujours exprimée par la formule $2a - b$ comme quand le tube est à la surface de l'eau ; car les attractions des deux parcelles de verre BC, CD ont lieu sans aucune déduction ; puisque n'ayant pas pris la place de l'eau, comme dans l'autre cas elles forment une nouvelle action qu'il faut considérer en entier & qui est $= 2a$; mais aussi la colonne capillaire d'eau qui est dans le tube est poussée en sens contraire par l'attraction de toutes les molécules d'eau situées au niveau du

vase ; & cette action b qui a lieu sur cette colonne n'a pas de même lieu sur les autres. Donc la force qui tend alors à élever l'eau est $= 2a - b$.

Quelqu'un pensera peut-être que si la sphère d'attraction du verre est très petite, par exemple, d'un quart de ligne, il ne doit monter dans le tube que la valeur d'un quart de ligne d'eau. Cela arriveroit véritablement si l'attraction du verre ne faisoit simplement que diminuer la pesanteur des parties voisines & leur donner la facilité de monter dans le tube ; mais le verre exerce dans cet espace d'un quart de ligne une action beaucoup plus forte que le poids d'un quart de ligne d'eau ; ainsi ce quart de ligne d'eau en cédant à l'attraction du tube soulevera toute l'eau dont il est chargé & par son adhérence entraînera les parties qui la suivent.

On pourra demander encore pourquoi un tube plus épais ne fait pas monter l'eau plus qu'un tube mince, cela vient de ce que les seules parties du verre très-proches de l'embouchure peuvent agir efficacement pour faire monter l'eau dans le tube. Les autres parties qui ne sont pas extrêmement voisines de la lumiere du tube, quoiqu'elles soient allégées ou soulevées par l'attraction, ne recevront qu'une impression, qui communiquée à toutes les parties de l'eau du vase, se dispersera dans toute son étendue & ne produira aucun effet sensible.

Le savant M. de Lalande ayant fait rapporter au feu de lampe deux branches capillaires, qui s'ouvroient l'une & l'autre dans une troisieme branche comme on le voit dans la fig. 137, & qui faisoient entr'elles un fort petit angle, observa qu'en plongeant dans l'eau les deux branches AB, AC jusques en E, l'eau s'élevoit jusqu'en F à la même hauteur à laquelle la branche AB seule pouvoit la soutenir. Cela vient de ce que la partie A, c'est-à-dire, le sommet de l'angle des deux branches & toutes les parties environnantes agissent en sens contraire de haut en bas sur la colonne d'eau AF, & détruisent visiblement une partie des attractions qui avoient lieu vers B & C, de maniere qu'il ne reste que la valeur de l'attraction d'un seul tube.

Si l'on plonge dans du mercure un tube qui ait une densité moindre de plus de moitié que celle du fluide, celui-ci

celui-ci au lieu de s'élever restera au-dessous du niveau. Les partisans de l'attraction disent qu'alors les particules du mercure, moins attirées par le verre qu'elles ne l'étoient par un égal volume de mercure, doivent avoir moins de légéreté qu'auparavant & monter moins haut. Le pere Gerdil qui a fait un livre entier pour prouver l'incompatibilité de l'attraction avec les phénomènes des tubes capillaires, assûre que le mercure bien loin de monter dans un tube d'or, à peine arrive jusqu'au niveau, & que même il ne parvient pas au niveau lorsque le tube n'a qu'un tiers de ligne de diamètre : mais il convient que le frottement du mercure & la résistance qu'il oppose à la désunion de ses parties, est la véritable cause qui l'empêche de monter. Si l'on graisse l'intérieur d'un tuyau capillaire avec du suif ou de l'huile, l'eau n'y monte pas, ce qui vient d'une espece de force répulsive qui éloigne l'eau du suif ou de l'huile.

Il est aisé de comprendre que selon la nature du verre dont on se sert, & des liqueurs différentes dans lesquelles on plonge les tubes capillaires, l'ascension doit être différente, c'est-à-dire, que différentes liqueurs ne doivent pas monter à la même hauteur dans le même tube capillaire, & que la même liqueur ne doit pas monter à la même hauteur dans des tubes capillaires de même diamètre faits de matieres différentes ; parce que l'attraction de ces tubes doit être différente

Soit D le diamètre du tube, c la hauteur à laquelle le fluide est élevé dans le tube capillaire, a l'attraction de la matiere du tube, b celle des parties du fluide, p la circonférence d'un cercle dont le diamètre $=1$, $D.p$ sera la circonférence d'un cercle dont le diamètre $=D$. Si donc on multiplie $2a-b$ par $D.p$, le produit $D.p.(2a-b)$ désignera la force qui élève le fluide dans le tube capillaire ; mais cette force soutient une colonne de fluide représentée par $\frac{cpD^2}{4}$; donc on aura l'équation $D.p\,(2a-b)=\frac{cpD^2}{4}$,

D'où l'on tire $c = \frac{4(2a-b)}{D}$; & parce que $2a-b$ est une quantité constante lorsqu'on employe le même fluide & des tubes de même matiere, les hauteurs auxquelles le fluide doit s'élever dans les tubes capillaires suivent la raison renversée des diamètres de ces tubes. Si $2a-b$ est $=0$, l'on aura $c=0$; si b est $>2a$, le fluide descendra au-dessous du niveau, comme il arrive dans le mercure, par rapport aux tubes de verre. Nous reprendrons cette matiere dans notre Physique.

193. LES phénomènes du flux & du reflux de la mer s'expliquent avec la même facilité par les principes de l'attraction. Tous les jours au passage de la Lune par le plan du méridien ou quelques heures après on voit les eaux de l'Océan s'élever sur nos rivages : on assure qu'à Saint-Malo l'élévation est d'environ 45 pieds; elles se retirent ensuite peu-à-peu & dans six heures environ après leur plus grande élévation, elles sont dans l'état d'abaissement, après quoi elles montent de nouveau, lorsque la Lune a passé par la partie inférieure du méridien; de sorte que la haute mer & la basse mer s'observent deux fois le jour & retardent chaque jour de 48′ plus ou moins comme le passage de la Lune par le méridien. Les marées augmentent sensiblement aux nouvelles & pleines Lunes ou un jour & demi après, & cette augmentation se fait sur-tout remarquer lorsque la Lune est périgée. Il arrive aussi une augmentation vers les équinoxes, & les marées les plus considérables, quand il n'y a pas de causes accidentelles qui dérangent leur cours ordinaires, sont celles qui arrivent dans le cas d'une syzygie périgée dans le tems de l'équinoxe.

Supposons la terre B*ab*A (fig. 138) parfaitement sphérique, mais couverte par-tout d'une couche d'eau d'une certaine épaisseur, la Lune située en *m* attirera les eaux placées en N, *a*, *n* avec plus de force que le centre C de la terre, qui est plus éloigné de cet astre, mais le point C sera plus attiré que les eaux situées en A; donc les eaux N, *a*, *n* auront plus de tendance vers la Lune que le centre C de la terre, & le centre C plus de tendance que les eaux situées

en A. Il eſt donc viſible que les eaux placées en *a* s'éléveront à une certaine hauteur, tandis que les eaux A moins attirées que le centre C reſteront un peu en arriere. En effet puiſque la Lune & la terre ſe meuvent autour de leur commun centre de gravité (voyez dans la ſeconde édition de nos Inſtitutions la théorie des forces centrales), il eſt clair que les eaux A ne s'approcheront pas de la Lune, en s'écartant de la tangente de la courbe qu'elles décrivent, avec autant de vîteſſe que le centre C de la terre ; ainſi la force d'inertie les tiendra un peu éloignées du point A, où ce qui revient au même, le centre C de la terre s'approchera plus dans le même tems, de la Lune que les eaux A qui reſteront en T (*), c'eſt-à-dire que les eaux marines s'éleveront du côté oppoſé à la Lune auſſi-bien que du côté de cet aſtre. A l'égard des eaux ſituées en B & *b*, il eſt viſible que ſi on décompoſe la force B*m* qui pouſſe les eaux B vers la Lune, en BC & C*m*, la ſeule force C*m* agira pour les élever ; mais cette force doit être regardée comme égale à celle qui pouſſe le centre C vers *m*, ainſi elle ne peut produire aucun effet ſenſible ; puiſque les eaux ne doivent s'élever que par la différence des forces qui pouſſent ces eaux & le centre C vers la Lune *m*. Mais la force BC qui preſſe les eaux B vers la terre augmente leur peſanteur & diminue leur hauteur ; c'eſt pourquoi les eaux qui ſont en quadrature avec la Lune doivent s'abaiſſer, tandis que celles qui ſont en conjonction ou en oppoſition doivent s'élever en s'écartant du centre C de la terre.

Maintenant la terre en tournant ſur ſon axe, tend à

(*) Il arrivera cependant que ſi la Lune & le Soleil (car le Soleil influe auſſi ſur les marées comme on le verra dans la ſuite) ſont du même côté, les eaux en A ſeront un peu moins attirées que le centre C ; mais la différence d'attraction ſera moindre qu'elle ne l'eſt par rapport au point C & aux eaux ſituées en *a*. C'eſt pourquoi les eaux ſeront un peu plus élevées en *t* qu'en T comme l'obſervation le prouve.

éloigner de la Lune le sommet t du sphéroïde, tandis que la force attractive de cet astre tend à le ramener dans la ligne Cm, qui passe par les centres de la Lune & de la Terre; de sorte que ce sphéroïde est obligé de tourner autour de la terre, ce qui ne peut se faire à moins que chaque point n n'acquiere une force centrifuge proportionnelle au rayon Pn du cercle qu'il décrit; donc (voyez ce que nous avons dit ci-dessus 73) on pourra considérer le demi-sphéroïde Btb comme elliptique. Mais dans une ellipse qui différe peu d'un cercle les excès des rayons par rapport au petit demi-axe (*) sont comme les sinus des distances à ce petit axe; ainsi le sphéroïde aqueux faisant successivement avec la Lune tout le tour de la terre, les pays situés sous le grand axe seront inondés, ceux qui seront sous le petit axe auront basse mer & la différence entre la basse mer & la hauteur de l'eau pour un instant quelconque sera l'excès d'un des rayons Ci sur le petit demi-axe Cb de l'ellipse; de sorte que la hauteur de la marée au-dessus des basses eaux pour un lieu quelconque est égale à la plus grande hauteur at de l'eau multipliée par le quarré du cosinus de la distance du lieu au sommet de l'ellipsoïde dirigé vers l'astre. C'est pourquoi la basse mer a lieu quand l'astre est à l'horison, & la haute mer lorsqu'il est au méridien. Si l'astre & le lieu donné sont sous l'équateur, la hauteur de la marée sera comme le quarré du cosinus de l'angle horaire, c'est-à dire comme le quarré du cosinus de l'angle que font entr'elles les lignes tirées du centre de la terre à l'astre & au lieu donné.

Si le lieu donné est à quelque distance de l'équateur, la hauteur de la marée est comme le quarré du cosinus de la

(*) Par la propriété de l'ellipse, si l'on fait $b = at$, $Ca = 1$, l'on aura $Ca = 1 : at = b :: Pn = sin.\, nCb : nf = b.\, sin.\, nCb$. Mais parce que la demi-ellipse Btb differe très-peu du demi-cercle Bab, on peut supposer 1°. que la ligne Ci est perpendiculaire sur fi; 2°. que les triangles Cnp, fni sont semblables; ainsi l'on aura la proportion $Cn = 1 : Pn = sin.\, nCb :: nf : ni = b.(sin.\, bCn)^2$.

latitude; mais si la latitude est assez considérable pour que la Lune ne se couche pas dans certains tems, il n'y a alors qu'une seule marée dans un jour, parce que la Lune ne s'approche qu'une fois de l'horison dans l'espace d'un jour. Sous le pôle il n'y a aucune marée diurne, parce que la Lune est à peu près également éloignée du zénit pendant toute la journée; de maniere que le sphéroide aqueux tourne autour du pôle sans s'élever plus d'un côté que de l'autre. Dans les lieux qui ne sont pas si proches du pôle, il y a deux marées sensibles l'une répond à peu-près au passage de la Lune par la partie supérieure du méridien, l'autre au passage du même astre par la partie inférieure.

Si la Lune est capable de changer la surface des eaux marines en leur faisant prendre la figure d'un sphéroïde alongé, on sent bien que le Soleil doit produire un effet semblable. Aussi en ne faisant pas attention à la Lune, il est évident que si le Soleil n'est pas dans le plan de l'équateur, la marée pour un lieu situé sous ce cercle sera comme le quarré du cosinus de la distance de cet astre à l'équateur (cette distance est appellée *declinaison* par les Astronomes); car cette distance, en supposant comme nous le faisons ici l'astre & le lieu donné sous le méridien, est la même que la distance du zénit à l'astre, ou la distance angulaire du point donné au sommet de l'ellipsoïde. Si le lieu donné n'est pas situé sous l'équateur, la marée supérieure (c'est celle qui arrive lorsque l'astre est au-dessus de l'horison) sera la plus grande quand l'astre passera le plus près du zénit, ou ce qui revient au même, lorsque la déclinaison de l'astre sera du côté du pôle élevé, au contraire la marée inférieure (qui arrive lorsque l'astre est au-dessous de l'horison) sera alors plus petite que quand l'astre étoit dans le plan de l'équateur, parce que le point opposé à l'astre (ce point forme l'extrémité opposée de l'ellipsoïde) sera plus éloigné du zénit que de l'équateur, lorsque l'astre passera par la moitié inférieure du méridien. Cependant les vents du sud & de l'ouest qui sont plus fréquents & plus forts en Europe après les équinoxes que vers le solstice d'été contribuent peut-être à déranger cette théorie; car on observe dans cette partie du monde que les marées sont plus grandes en

général après les équinoxes que vers le solstice d'été. D'un autre côté la marée du solstice est plus resserrée entre le continent de l'Amérique & celui de l'Afrique que celles des équinoxes ; & ainsi elle doit être moins sensible sur nos côtes. Ajoutons encore que la force centrifuge sous le tropique étant moindre que sous l'équateur, les eaux y sont plus pésantes & obéissent plus difficilement à l'action de l'astre attirant.

Les marées participent des mouvemens du Soleil & de la Lune. Dans les syzygies, c'est-à-dire dans les nouvelles & pleines Lunes, le sphéroïde aqueux produit par la force du Soleil & celui qui est produit par l'attraction lunaire sont dirigés dans le même sens : ainsi l'allongement du sphéroïde est la somme des allongemens particuliers que la Lune & le Soleil peuvent produire séparément.

Mais dans les quadratures les axes de ces sphéroïdes se coupent à angles droits, de maniere que le grand axe du sphéroïde solaire étant situé sur la même ligne que le petit axe du sphéroïde lunaire, le Soleil élève les eaux là où la Lune les abaisse, & réciproquement ; ainsi les marées de syzygies sont la somme des effets des forces attractives du Soleil & de la Lune ; mais les marées des quadratures en sont la différence. L'action de la Lune pour élever les eaux (il en est de même de celle du Soleil) étant une force décomposée dans le sens du rayon de la terre, elle suit la raison inverse des cubes des distances (*). Et si la force moyenne de la Lune est exprimée

(*) Soit T A (fig. 139) l'orbite de la Terre, S le Soleil, N F l'orbite de Jupiter. Décomposons la force avec laquelle Jupiter situé en N attire la Terre T, en deux autres, dont l'une soit dirigée selon TP parallèlement à S N, & l'autre selon la direction S T du rayon vecteur. La force absolue de Jupiter pour attirer la Terre est comme sa masse N divisée par le quarré de la distance N T à la Terre, ou est $= \frac{N}{\overline{NT}^2}$. Ayant construit le parallèlogramme P N S T, il est visible que la force selon N T peut se décomposer en

par 2 $\frac{1}{2}$, la force périgée sera = 3 & sa force apogée, = 2. En effet les cubes des parallaxes extrêmes ou de 53′ 51″, & de 61′ 29″ sont à peu-près comme 2 & 3; or ces paralaxes sont en raison inverse des distances (*). Les cubes des distances du Soleil à la terre en hiver &

---

deux autres, l'une selon T P, l'autre selon T S. Or le triangle P T N donne N T : T P = S N :: $\frac{N}{\overline{TN}^2}$ (force selon T N) : $\frac{N.SN}{\overline{NT}^2}$. Mais cette force qui tend à éloigner la Terre du Soleil selon une direction parallèle à S N, est inutile pour notre objet. Le même triangle P T N donne T N : P N = S T :: $\frac{N}{\overline{NT}^2} : \frac{N.ST}{\overline{NT}^3} = \frac{M.r}{D^3}$, en faisant la masse N de Jupiter = M, le rayon S T de l'orbite terrestre = r, & la distance T N de la Terre à Jupiter = D. Cette expression nous apprend que la force perturbatrice qui agit dans la direction du rayon vecteur, & qui modifie la force centrale de la planète, suit la raison inverse du cube des distances. Maintenant la force qui agit en n (fig. 138) pour élever les eaux vers m est dans le même cas, puisqu'on peut la décomposer en deux autres dont l'une agisse dans la direction du rayon C n.

(*) La parallaxe horisontale d'un astre (qu'on désigne ordinairement sous le nom de *parallaxe* sans ajouter horisontale), est le plus grand angle sous lequel on peut voir le demi-diamètre terrestre à la distance de l'astre; la plus grande parallaxe est celle de la Lune qui ne va pas à un degré. Mais par les principes d'optique lorsque les angles sont assez petits, les distances d'un même objet vu à différentes distances, sont en raison inverse des angles optiques sous lesquels ils sont vus. C'est pourquoi l'on peut dire que la distance de la Lune à la Terre est à celle du Soleil à la Terre comme la parallaxe du Soleil est à celle de la Lune.

en été sont entr'eux comme 1 : 1. 106 ou à peu-près comme 1 : 1. 1 ; de sorte qu'en hiver la force du Soleil est d'un dixieme environ plus grande qu'en été.

Quand la Lune & le Soleil sont à quelque distance l'un de l'autre, chacun de ces astres produit une élévation différente dans un lieu donné & la somme de ces élévations donne la hauteur de la marée. La force de la Lune étant environ $2\frac{1}{2}$ fois aussi grande que celle du Soleil, le sommet du sphéroïde acqueux doit approcher environ $2\frac{1}{2}$ fois plus de la ligne qui joint les centres de la Lune & de la Terre, que de celle qui va du centre de la Terre à celui du soleil, & le point de la haute mer n'est jamais éloigné de la Lune de 15 degrés ; de sorte que le passage de la Lune au méridien est la principale circonstance qui influe sur le tems de la haute mer, & dans une mer libre & ouverte l'intervalle entre le tems de la haute mer (n'ayant pas égard à l'inertie des eaux) & le passage de la Lune au méridien peut aller jusqu'à 1 heure 3′ environ, lors même que la Lune est apogée & qu'elle est éloignée du Soleil de 60°. Soit M N *m* T fig. 140) le sphéroïde acqueux dont le sommet N désigne le point de la haute mer, le Soleil étant situé en S & la Lune en L. Supposons la distance *m* M de la Lune au Soleil (ou l'angle L C S mesuré par *m* M) = 60°, si l'on fait = 1 l'élévation que peut produire la seule action du Soleil, *cos.* N M représentera l'élévation produite en N par la seule action solaire, & supposant que la Lune est périgée, 3 *cos.* N *m* exprimera la hauteur produite par la force de la Lune, & les deux forces ensemble donneront la hauteur totale produite en N. Si l'on suppose N M de 51° & N M de 9°, on aura les deux quantités 0. 3961 & 2. 9266 dont la somme 3. 3227 exprimera la hauteur totale de la marée. Si l'on suppose *m* N = $9^\circ\frac{1}{2}$, on trouvera 2. 9183 & 0. 4046, ce qui fait 3. 3229. Enfin *m* M étant toujours de 60°, si on fait *m* N = 10°, l'on aura 2. 9095, & 0. 4132, ce qui donne 3. 3227 pour la hauteur de la marée, & soit qu'on fasse l'arc *m* N plus petit ou plus grand que $9^\circ\frac{1}{2}$, l'arc *m* M étant toujours supposé de 60° & la Lune périgée, on trouvera que l'élévation des eaux sera plus petite que lorsque *m* N = $9^\circ\frac{1}{2}$. On peut voir par là comment on peut s'y prendre dans les autres situations du Soleil

& de la Lune pour trouver le point de la haute mer.

Le retardement diurne du passage de la Lune par le meridien étant de 1 h. 16 minutes lorsque la Lune est périgée, 9° ½ correspondent à 40′ de tems. C'est pourquoi la haute mer précédera de 40′ le passage de la Lune par le plan du méridien. Quand la Lune est apogée sa force étant alors double de celle du Soleil, la haute mer, pour 60° de distance entre ces astres, sera exprimée par 2.366, & le sommet du sphéroïde acqueux sera à 15° de la Lune. Ces 15° font 62′ ¼ en tems lunaire; de sorte que dans l'apogée il y a environ 63′ de différence entre le passage de la Lune par le méridien & l'instant de la haute mer.

Pour faire comprendre aux commençans comment on a pu déterminer (à peu-près, car on ne doit pas regarder toute cette théorie comme bien rigoureuse) le rapport des forces du Soleil & de la Lune pour élever les eaux de la mer, supposons que dans les distances moyennes mN réponde à 14′ & MN à 34′ de tems, il est aisé de sentir que ces deux quantités sont en raison inverse des forces de la Lune & du Soleil; donc la force de la Lune sera à celle du Soleil comme 34 : 14 ou à peu-près comme 2 ½ : 1 ou comme 5 : 2 (*). M. Newton

(*) Si la Lune étoit transportée à la distance du Soleil, sa force pour élever les eaux diminueroit comme le cube de la distance auroit augmenté; mais la parallaxe moyenne de la Lune est environ 57′ 3″, celle du Soleil étant 8″.5 à peu-près, (M. l'Exell l'a fait de 8″.63, mais la différence avec 8″.5 n'étant que de 0.13″ on peut la négliger ici). Donc la distance moyenne 1 de la Lune à la Terre est à la distance du même astre transporté au Soleil comme 8″.5 : 57′ 3″; ainsi cette distance est exprimée par $\frac{57'.7''}{8''.5}$. Si l'on divise la force actuelle de la Lune = 2 ½ par le cube de cette derniere quantité, l'on aura la masse L de la Lune, celle du Soleil étant supposée = 1. Si nous supposons la masse de la Terre = $\frac{1}{365412}$ (dans le Traité des Forces Centrales dans nos Institutions Mathématiques,

ayant comparé les marées des ſyzygies équinoxiales avec celles des quadratures qui ſont produites par la différence des actions du ſoleil & de la Lune, conclut que la force de la Lune eſt à celle du Soleil comme 4.4815 : 1. M. Daniel Bernoulli ayant comparé les marées des ſyzygies qui arrivent à Saint-Malo, avec celles des quadratures en avoit conclu le rapport des forces de la Lune & du Soleil comme 13 : 7. Il eſt aiſé de comprendre que la haute mer des ſyzygies équinoxiales étant ſuppoſée $= A$, & celles des quadratures équinoxiales $= D$, la force x de la Lune eſt $= \frac{A+D}{2}$, & que la force z du Soleil eſt $= \frac{A-D}{2}$; puiſque de deux quantités la plus grande eſt égale à la moitié de leur ſomme, la plus petite étant égale à la moitié de la différence. Mais les mouvemens poſtérieurs de la mer ſont altérés par les précédens; c'eſt pourquoi les eaux agitées & troublées quelques jours après les ſyzygies & les quadratures, s'élevent plus que ne le demande le rapport des forces de la Lune & du Soleil. D'un autre côté ſur les côtes où l'on a fait ces obſervations, les flux ſont augmentés par la figure des rivages & les réflexions des eaux, ce qui les rend plus grands que dans une mer libre; de ſorte que les rapports des forces lunaire & ſolaire qu'on voudroit conclure des obſervations faites en différens ports ne s'accorderont nullement entr'elles: la force d'inertie, & les circonſtances locales empêchant que les marées ne ſuivent la proportion qu'exigeroit la théorie. C'eſt l'inertie qui fait que la plus

---

nous avons donné la méthode de connoître la peſanteur & la maſſe du Soleil, celle de Jupiter, &c.), celle du Soleil étant toujours priſe pour l'unité, & que nous diviſions la maſſe L par cette fraction, nous aurons $\frac{1}{71}$, c'eſt-à-dire, que le rapport de la maſſe de la Lune à celle de la Terre ſera comme 1 : 71; ainſi en ſuppoſant la maſſe de la Terre $= 1$, celle de la Lune n'en ſera qu'environ la $\frac{1}{71}$ partie.

grande élévation a lieu deux ou trois heures après le passage du Soleil & de la Lune au méridien, que les plus grandes marées de chaque mois arrivent environ deux ou trois jours après les nouvelles & pleines Lunes, & les plus petites deux ou trois jours après les quadratures.

Si les mers sont fort étroites les eaux ne peuvent pas s'élever sensiblement. Ce qui élève les eaux, c'est leur communication entr'elles, l'augmentation de leur poids dans les quadratures, & sa diminution dans les syzygies. Si l'étendue de la mer est peu considérable, il ne peut y avoir en même tems des eaux qui soient en quadrature avec celles qui répondent à l'astre qui passe par le méridien ; si elle est encore moins considérable, toutes les eaux sont sensiblement attirées avec la même force, & comme il n'y en a pas vers le rivage qui puissent prendre la place de celles qui l'abandonneroient elles doivent rester tranquilles ; c'est pour cette raison que dans la mer Pacifique les marées sont plus grandes que dans l'Océan Atlantique, & que dans la zône torride entre l'Amérique & l'Afrique où la mer est plus resserrée, elles sont moins considérables que dans les zônes tempérées. Dans la mer Atlantique l'eau ne peut s'élever sur un rivage qu'elle ne baisse sur l'autre. La Méditerranée n'ayant environ que 60° en longitude ne doit éprouver qu'un flux très-petit ; il est cependant plus sensible dans la mer Adriatique qui a assez de largeur. Les marées sont fort compliquées aux environs du Détroit de Gibraltar : on y remarque des lisieres qui ont des mouvements différents ; celles qui sont sur les côtes de chaque côté paroissent venir des marées de la Méditerranée & les deux autres qui les touchent de celles de l'Océan. La mer Caspienne & la mer Baltique n'ont point de marées à cause de leur peu d'étendue. Mais dans les mers ouvertes & qui s'étendent beaucoup d'Occident en Orient, comme la mer Atlantique, l'Océan Pacifique & la mer d'Ethiopie l'eau s'éleve à 6, 9, 12, & quelquefois même jusqu'à 15 pieds. Les rivages, les golfes, les bayes, les détroits, les bancs de sable doivent faire varier beaucoup les marées. On conçoit en effet facilement que si une lame d'eau de 8 pieds de hauteur & de 10 lieues de largeur vient à être poussée dans un

détroit, qui aille en se rétrecissant, de maniere que cette masse d'eau soit obligée de se resserrer dans la largeur d'une lieue par exemple, elle s'élevera considérablement, & formera une marée très-haute. Dans la mer Atlantique & sur les côtes occidentales d'Europe le flux & reflux arrive assez comme le demande la position de la Lune, & l'eau parvient communément à sa plus grande hauteur environ trois heures après le passage de cet astre par le méridien sur les côtes d'Espagne, de Portugal & sur celles de l'Occident d'Irlande; de là elle s'écoule par les détroits adjacents, se répand par deux courans au Midi de l'Angleterre & au Nord de l'Ecosse, s'élève plutôt où elle arrive plutôt, & commence à baisser dans certains endroits, tandis que les courans avancent encore dans d'autres lieux plus éloignés. Quand ces courants reviennent ils ne produisent point de marées, par ce que l'eau s'écoule trop rapidement, jusqu'à ce que par un flux poussé par le vaste Océan le retour du courant soit arrêté & que l'eau commence à s'élever de nouveau. On sent donc qu'il doit y avoir de grandes différences pour le tems de la marée, comme il y en a pour la hauteur par la situation des rivages, selon qu'ils sont plus ou moins escarpés, qu'ils ont plus ou moins de sinuosités pour retenir l'eau, & qu'ils se présentent plus ou moins directement aux courants. Aux embouchures de la Garonne & de la Loire qui sont dirigées vers le grand Océan, aux tems des nouvelles & pleines Lunes, le flux arrive environ trois heures après le passage du Soleil & de la Lune par le méridien ou trois heures après midi, ce qui est le tems où il doit naturellement arriver; ainsi la marée n'a pas été retardée par les côtes, mais y est produite par les eaux qui viennent directement de l'Océan, il n'en est pas de même à Ostende, au Havre, à Saint-Malo, à Dunkerque, le flux n'arrive dans ces lieux que par les courants qui se forment sur les rivages & par conséquent successivement, savoir à six heures à Saint-Malo, à neuf heures au Havre, à minuit à Dunkerque & à Ostende. A Dunkerque la haute mer s'observe souvent à minuit aux tems des syzygies; mais ce flux est une suite de celui qui a été produit par le précédent passage du Soleil & de la Lune au mé-

ridien, & qui n'arrive à Dunkerque qu'environ 12 heures après ce passage. A Batsham, port du Royaume de Tonquin, il y a deux entrées, l'une par la mer de la Chine entre le Continent & *Manille*, l'autre par l'Océan Indien entre le Continent & l'Isle de *Borneo*; le flux arrive par l'une de ces entrées à la troisieme heure de la Lune; & six heures après par l'autre entrée, c'est-à-dire, à la neuvieme heure de la Lune, à cause de leur différente situation. C'est pourquoi si les marées sont égales, l'une arrivant tandis que l'autre se retireroit, l'eau doit rester tranquille sans aucun mouvement. C'est aussi ce qui arrive lorsque la Lune est dans le plan de l'équateur, parce qu'alors les marées du matin seront égales à celles du soir; mais si la Lune commence à décliner du même côté de l'Equateur que Batsham (situé à 20° 50′ de latitude septentrionale) les marées qui se suivent ne seront point égales; de sorte que celle qui arrive d'un côté surpassera celle qui vient de l'autre côté, la marée durera douze heures, & l'on n'aura qu'un flux & un reflux par jour. Ce sera la même chose lorsque la Lune aura une déclinaison australe, avec cette différence que dans le premier cas les eaux auront leur plus grande hauteur environ vers les six heures après le coucher de la Lune, & qu'elles seront basses à son lever, tandis que dans le second cas elles seront hautes au lever & basses au coucher de la Lune.

Maintenant si nous voulons trouver la hauteur à laquelle le Soleil peut élever les eaux, nous y parviendrons au moyen des réflexions suivantes. La pésanteur p d'un corps ou sa tendance vers un autre corps attirant m situé à la distance D, est comme $\frac{m}{D^2}$ (voyez la théorie des forces centrales dans nos Institutions Mathématiques); ainsi l'on a $p = \frac{m}{D^2}$. Si l'on suppose que le corps attiré tourne autour du corps m supposé immobile, avec une vîtesse v, l'on aura $p = \frac{vv}{D}$. En effet le sinus verse A M (fig. 134) qui indique la quan-

tité dont la force centrale rapproche le mobile A dans le tems employé à parcourir l'arc infiniment petit A m, est égal au quarré de cet arc, divisé par le diamètre; puisque si l'on conçoit une petite corde qui se confonde avec cet arc, l'on aura un triangle rectangle A mb dans lequel le quarré du côté A m sera moyen proportionnel entre A M & M b = A b; donc A M = $\frac{\overline{Am}^2}{2.AT}$;

ainsi p = A M est comme $\frac{\overline{Am}^2}{AT}$, ou comme $\frac{vv}{D}$, à cause que l'espace A m est comme la vîtesse laquelle est constante dans un cercle. Mais la vitesse est comme la circonférence divisée par le tems t employé à la parcourir, & les circonférences sont comme les rayons; donc $v = \frac{D}{t}$ & $vv = \frac{D^2}{tt}$, d'où l'on tire $p = \frac{vv}{D}$ $= \frac{D}{tt} = \frac{m}{DD}$, ou $m = \frac{D^3}{tt}$; c'est-à-dire, que si un corps circule autour d'un autre, la masse du corps attirant est comme le cube de la distance entre les deux corps divisé par le quarré du tems périodique de celui qui circule : c'est de ce théorême que nous avons tiré la méthode de peser les astres dans nos Institutions Mathématiques.

Supposons maintenant que LNm (fig. 141) représente l'orbite lunaire, T la Terre, S le Soleil, & décomposons la force SL du Soleil en LT=SM & LM=TS, cette seconde force qui tend à approcher la Lune L du Soleil selon une direction LM parallèle & égale à celle selon laquelle la terre tend vers le Soleil nous étant inutile, considérons la force LT; il est visible qu'elle augmente la pesanteur de la Lune sur la Terre, & que cette augmentation est à la force avec laquelle la Lune (ou la Terre) pese vers le Soleil, comme la distance de la Lune à la Terre est à sa distance au Soleil, c'est-à-dire, que la force qui augmente la pesanteur de la Lune sur la Terre dans les quadratures, est à la pesanteur de la Terre sur le Soleil comme le rayon de l'orbite lu-

naire à celui de l'orbite terrestre ou comme $r:R$, en faisant le rayon $TL = r$ & $SL = ST = R$. Mais selon ce qu'on a dit ci-dessus, la pesanteur de la Terre sur le Soleil est à la pésanteur originaire de la Lune sur la Terre, comme $\frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, en supposant les tems périodiques des révolutions de la Terre & de la Lune désignés par T & t; donc l'augmentation de la pesanteur de la Lune par l'action du Soleil dans les quadratures est à sa pésanteur naturelle en raison composée de $r:R$ & de $\frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$ (puisque dans ces raisons R & $\frac{R}{T^2}$ expriment une même chose, je veux dire la pésanteur de la Terre sur le Soleil) ou comme $\frac{r.R}{T} : \frac{R.r}{t^2}$, ou comme $t^2 : T^2$, ou en raison inverse du quarré du tems périodique de la Terre autour du Soleil au quarré du tems périodique de la Lune autour de la Terre. L'on sait que T = 365 jours 6 h. 9′ 14″, & t = 27 jours 7 heures 43′. Donc $t^2 : T^2 :: 1 : 178.73$; de sorte que la pésanteur de la Lune dans les quadratures augmente de la $\frac{1}{178}$ partie de sa pésanteur.

Maintenant si nous avons les deux quantités 1 & $1 + b$, b étant est une quantité très-petite, les quarrés 1 & $1 + 2b + b^2$ seront entr'eux comme 1 & $1 + 2b$, c'est-à-dire différeront du double de la différence entre les racines 1 & $1 + b$. Si b représente la distance de la Lune à la Terre, & 1 celle de la Terre au Soleil, qui est environ 400 fois aussi grande que la premiere; on pourra supposer que les quarrés de ces distances ne different entr'eux que de la quantité $2b = \frac{1}{200}$. D'où il suit que la différence de l'action du Soleil sur la Lune située en m ou en N, c'est-à-dire en conjonction ou en opposition, & par conséquent la diminution de la pésanteur de la Lune sur la Terre dans les syzygies, est comme $2b$,

ou comme le diamètre de l'orbite lunaire (*), tandis que l'augmentation dans les quadratures est comme le rayon de la même orbite ; de forte que la diminution de la pésanteur est double de l'augmentation qui est $= \frac{1}{178}$. Ainsi la diminution est $\frac{1}{89}$ de son poids. Mais la pesanteur de la Lune est à la pésanteur des graves à la surface de la terre comme 1 : 3600 en supposant le rayon de l'orbite lunaire 60 fois plus grand que celui de la terre ; donc l'augmentation du poids de la Lune dans les quadratures est à la pésanteur des graves à la surface de la Terre comme 1 : 178 × 3600 : : 1 : 640800. Maintenant si nous supposons que le Soleil agit sur les eaux *n* situées sur la surface de la Terre, & qui sont en quadrature avec cet astre, sa force pour les comprimer, ou pour les pousser vers le centre T de la Terre sera comme le rayon T *n* de notre globe ou sera = 1, la force T L ou l'augmentation de la pésanteur de la Lune étant désignée par 60 : d'où il suit que l'augmentation du poids des eaux placées en quadrature avec le Soleil est à leur pésanteur naturelle sur la Terre comme 1 : 640800 × 60 : : 1 : 38448000. La diminution sous le Soleil & dans le point opposé est double, & comme cette diminution & cette augmentation contribuent à élever les eaux, l'on peut dire que la force du Soleil pour élever les eaux marines, est à leur pésanteur naturelle comme 3 : 38448000 : : 1 : 12816000, ou comme 1 : 12868200, selon le calcul de M. Newton plus exact que le précédent en ce que nous avons supposé la distance de la Lune à la Terre de 60 demi-diamètres terrestres au lieu de 60 $\frac{1}{2}$. Nous avons prouvé dans la seconde édition de nos Institutions Mathématiques

(*) Dans la conjonction, la Lune *m* est plus attirée vers le Soleil que la Terre T, & dans l'opposition la Terre T est plus attirée que la Lune N ; donc dans le premier cas la pesanteur de la Lune sur la Terre est diminuée ; dans le second cas, la Terre tend vers le Soleil selon la direction T S avec plus de vîtesse que la Lune, qui par conséquent pese moins sur la Terre.

que

que la force centrifuge ſous l'équateur eſt $\frac{1}{229}$ à peu-près de la péſanteur. Donc l'action du Soleil pour élever les eaux eſt à la force centrifuge ſous l'équateur comme $1 : \frac{12868200}{289} :: 1 : 44527$; ainſi l'action du Soleil pour élever les eaux eſt à peu-près le $\frac{1}{44527}$ de la force centrifuge. Mais celle-ci (73) éleve les parties de l'équateur de 14199 toiſes ou de 85194 pieds ; donc $\frac{85194}{44527}$ pieds exprimera la quantité de l'élévation des eaux produite par le Soleil ; or cette quantité eſt à peu-près 23 pouces ou environ 2 pieds ; donc le Soleil peut élever les eaux de l'Océan à la hauteur d'environ 2 pieds, la Lune périgée ayant une force triple les élevera la hauteur de $5\frac{1}{4}$ pieds, tandis que la Lune apogée ne pourra les élever qu'à la hauteur d'environ 4 pieds ; mais lorſque la Lune ſera dans la moyenne diſtance, ſa force, qui eſt alors $2\frac{1}{2}$ auſſi grande que celle du Soleil, les fera monter à la hauteur d'environ 5 pieds. Ainſi les marées moyennes doivent en pleine mer être d'environ 7 pieds, les grandes d'environ 8 pieds & les plus petites d'environ ſix pieds ; de ſorte que les nombres 6, 7, 8 ſont un peu trop grands. Mais cette hauteur eſt ſouvent diminuée par la réſiſtance du fond ; car elle n'eſt que de trois pieds à l'Iſle de Sainte-Hélene, au Cap de Bonne-Eſpérance, aux Philippines & aux Molucques, & d'un pied (dit-on) dans le milieu de la mer du Sud. Au contraire elle eſt ſouvent augmentée par la ſituation & la figure des côtes, & à Saint-Malo la marée monte juſqu'à 45 pieds & quelquefois davantage.

Application de la théorie des forces Phyſiques à la Méchanique.

194. SOIENT ſuppoſés trois points A, C, B (fig. 142), ſi les points A, B ſe trouvent dans les limites de cohéſion, & que le point C ſoit auſſi dans les limites de cohéſion par rapport aux points A, B, ces points reſteront en repos comme il eſt évident. Mais ſi à la diſtance A C répond une force attractive L C, & qu'à la diſtance C B réponde la force attractive C K, le point C ſuivra la diagonale C F du parallèlogramme L C K F. Mais ſi les forces du point A & du point B étoient répulſives & exprimées reſpectivement par C N & C M, le point C ſuivroit la direction C H. Si au contraire la force du point B reſtant répulſive par rapport au point C,

celle du point A étoit attractive & désignée par C L, le point C suivroit la direction C *t*, c'est-à-dire se mouvepoit de côté. Il est aisé de voir que le point C suivroit la direction C G, si la force C N du point A étoit répulsive, tandis que la force C K du point B seroit attractive. Si le triangle A C B étoit isoscèle & que la base A B fût inassignable par rapport à la hauteur C D, la ligne C D couperoit l'angle A C B en parties égales, & à cause de l'angle infiniment petit L C K, C F seroit sensiblement le double de C L ou de C K, & C H seroit le double de C M ou de C N. Donc si les forces des points A & B étoient à la fois répulsives ou à la fois attractives, & que l'une de ces forces suivît la raison, doublée des quarrés, des distances, leur somme suivroit aussi la même raison. Si en supposant les forces des points A, & B attractives, & qu'elles doivent avoir lieu en prolongeant les lignes A B, A C d'une certaine quantité, on suppose en même-tems que le point C ait été un peu éloigné des points A & B, les forces attractives des points A & B le rapprocheront de la ligne A B; mais si ces forces sont répulsives, il pourra se faire que le point C après avoir été rapproché de la ligne A B en soit écarté par les forces répulsives des points A & B.

Si au lieu de trois points nous en considérons quatre, il est visible que la variété des mouvemens augmentera prodigieusement selon les positions & les distances différentes. Que seroit-ce si au lieu des points nous prenions des masses composées d'un nombre de points que personne ne connoît? De quelle analyse, de quelle géométrie n'aurions-nous pas besoin pour déterminer leurs mouvemens, qui cependant dépendent de cette loi simple dont nous avons parlé ci-devant. Néanmoins toute cette variété aura lieu dans les petites distances, dans lesquelles la courbe des forces coupe son axe; car dans les distances un peu grandes, les ordonnées suivent à peu près la raison renversée des quarrés des distances. Il est bon aussi de remarquer que la courbe des forces (fig. 135) a deux parties égales; l'une du côté des abscisses positives, l'autre du côté des abscisses négatives.

195. SOIENT maintenant dans la figure (143) trois points A, E, B, placés de maniere que les trois distances A B, A E, B E, soient les distances des limites de cohésion, en sorte que les deux dernieres soient égales. Supposons que

A & B représentent les foyers d'une éclipse qui passe par le point E, extrémité du petit axe E H. Soit dans la (fig. 135) A N = au demi premier axe D *m* ou = B E = A E, & soit D B < que n'est dans la figure 135 l'amplitude des arcs L N, N P, & soient supposés de plus dans la même figure 135 les arcs N M, N O semblables & égaux, afin que les ordonnées *u y*, *z t* également distantes du point N soient égales. S'il y a en E un point de matiere, il n'aura aucune force, puisque A E & B E sont égales à la distance A N de la limite N de la figure 135, & la même chose aura lieu pour un point placé en H. Il en sera de même par rapport au point *m*; car si l'on prend dans la figure 135 les lignes A *z*, A *u* égales aux lignes B *m*, A *m*; N *z*, N *u* seront égales respectivement aux lignes D B, D A & par conséquent égales entr'elles. C'est pourquoi les forces *z t*, *u y* seront égales, opposées & se détruiront mutuellement; & la même chose aura lieu pour un point placé en F : car ici A sera attiré & B sera repoussé par *m*. Mais si la limite qui répond à la distance A B est assez forte, ces points ne s'éloigneront pas sensiblement des foyers de l'ellipse & on pourra les considérer comme immobiles.

Ainsi un point placé aux extrémités du grand ou du petit axe restera immobile; & si on le place dans un point quelconque C du périmètre de l'ellipse, à cause des deux lignes A C, C B dont la somme est toujours égale au double du demi axe D *m*, la ligne A C sera d'autant plus longue que D *m*, que B C sera plus courte; de sorte que si maintenant dans la fig. 135, nous supposons A *u*, A *z* égales respectivement aux lignes A C, B C, nous aurons encore *u y*, *z t*, égales entr'elles. C'est pourquoi l'attraction C L sera égale à la répulsion C M, & L I M C sera un rhombe dans lequel la diagonale I C divisera en deux parties égales l'angle LCM; de sorte que l'angle A C P sera égal à l'angle B C Q opposé au sommet à l'angle P C M. Ce qui étant une propriété très-connue de la tangente de l'ellipse rapportée aux foyers, P Q sera tangente. Ainsi la force du point C sera dirigée de côté le long de la tangente ou le long de la direction de l'arc elliptique; de sorte que le point C étant placé sur le périmètre de l'ellipse,

suivra l'arc elliptique CE en se mouvant vers l'extrémité du petit axe.

Nous pouvons donc ici contempler des limites de cohésion & de non-cohésion analogues à celles qui ont lieu dans l'axe rectiligne de la figure 135. Il y aura des limites en E, en F, en H, en *m*, dans lesquelles la force sera nulle, tandis qu'elle aura lieu dans les points C intermédiaires. Mais en E & en H les limites seront telles que si on en éloigne un point de matiere en suivant le périmètre de l'ellipse, il reviendra vers ces limites comme il arrive dans la figure 135 par rapport aux limites de cohésion ; mais en F & en *m* les limites sont telles que si l'on en éloigne tant soit peu un point de matiere, il s'en écartera encore davantage, comme cela arrive dans la figure 135 dans les limites de non-cohésion.

Le contraire arriveroit si D *m* étoit la distance due à une limite de non cohésion : car alors la plus petite distance BC auroit une attraction CK, tandis qu'à la grande distance AC répondroit la répulsion CN, & la force composée CG exprimée par la diagonale du rhombe NCKG s'exerceroit dans la tangente CQ de l'ellipse. Dans les points E, H il y auroit véritablement des limites, mais le point C placé entre E & *m* se mouveroit vers *m* : au contraire il se mouveroit vers F s'il étoit placé entre E & F sur l'arc elliptique EF ; de maniere que les extrémités F & *m* du grand axe seroient des limites de cohésion, tandis que les extrémités E & H seroient des limites de non cohésion. Si D *m* est une ligne égale à la distance de la limite de cohésion AN dans la figure 135, & DB plus grande que l'amplitude NL, NP, à plus forte raison si DB dans notre figure surpasse plusieurs de ces amplitudes, & que l'égalité des arcs ait lieu de part & d'autre par tout cet espace, lorsque AC dans la fig. 143 sera égale à l'abscisse AP dans la fig. 135, BC dans la premiere de ces figures sera égale à AL dans l'autre. C'est pourquoi dans ce lieu il y aura une limite, & avant cet endroit du côté de A, à la distance AC répondra une répulsion, tandis qu'à BC répondra une attraction, la figure KCNG sera un rhombe, & le point C tendra vers *m*. Si dans quelque endroit plus près du point *m* les

distances AC, BC sont supposées égales aux abscisses AR, AI de la figure 135, il y aura dans cet endroit une limite ; mais dans un point placé à une moindre distance du point E il répondra une répulsion à la plus petite distance BC & une attraction à la plus grande AC ; & la force composée sera de nouveau dirigée vers l'extrémité E du diamètre conjugué.

196. ON peut aussi considérer une autre analogie avec ces limites, si lon conçoit plusieurs ellipses qui ayent les mêmes foyers, & dont un des demi axes soit égal à la distance de quelque limite de cohésion de la figure 135, l'autre demi axe répondant à la limite prochaine de non cohésion, ainsi de suite alternativement ; de maniere que l'excentricité commune soit plus petite qu'aucune des amplitudes des arcs compris entre les limites de la figure 135, afin que chaque ellipse ait seulement quatre limites situées aux extrémités des axes. Un point de matiere placé dans un des périmètres aura une détermination au mouvement dans la direction de ce périmètre ; mais s'il est placé entre deux périmètres, il tendra vers le périmètre indiqué par la limite de cohésion de la figure 135, en s'éloignant du périmètre indiqué par la limite de non cohésion ; c'est pourquoi si on éloigne ce point du périmètre du premier genre il fera un effort pour y revenir, mais si on l'éloigne du périmètre du deuxieme genre il s'en éloignera encore davantage & le fuira. Car soit dans la fig. 144 les demi-axes DO, DO′, DO″ égaux, le premier à la distance AL de la limite de non cohésion de la figure 135, le deuxieme à la distance AN de la limite de cohésion, le troisieme à la distance AP d'une limite de non cohésion, plaçons le point C un peu au de-là du périmètre du milieu : les lignes AC & BC seront plus grandes que si elles étoient terminées à ce périmètre ; c'est pourquoi dans la figure 135 ayant fait Au, Az plus grandes qu'elles n'étoient auparavant ; la répulsion ze diminuera, mais l'attraction uy augmentera ; ainsi dans le parallèlogramme CMIL, l'attraction CL sera plus grande que la répulsion CM ; la direction CI de la diagonale approchera plus de CL que de CM, & tendra par conséquent à rapprocher le point C du périmètre du milieu. Au contraire si le point C′

eſt placé entre le périmètre du milieu & celui de la plus petite ellipſe, ayant pris BC′, AC′ plus petites que ſi le point C′ étoit dans le périmètre du milieu, la répulſion C′M′ croîtra, & l'attraction C′L′ décroîtra; c'eſt pourquoi la direction C′I′ approchera plus de C′M′ que de C′L′, & le point C′ ſera repouſſé vers le périmètre moyen. Par une raiſon entierement ſemblable, ſi on place le point dans le voiſinage du premier ou du troiſieme périmètre, il s'en éloignera encore davantage: & de là ſuit la propoſition que nous avons avancée.

Mais parce que les arcs de part & d'autre de chaque limite ne ſont pas exactement égaux, quoique ſi ces arcs ſont très-petits en les conſidérant comme les prolongemens de la même tangente qui coupe l'axe dans les limites, leurs ordonnées doivent être ſenſiblement égales; la courbe dans la direction de la tangente de laquelle la force eſt continuellement dirigée ſera ſenſiblement une ellipſe lorſque l'excentricité ſera très-petite; cependant ce ne ſera pas une ellipſe rigoureuſe, à plus forte raiſon ſa forme ſera différente ſi les excentricités ſont grandes. Il y aura néanmoins toujours des courbes qui détermineront la direction continuelle des forces; il y aura même des courbes qui détermineront la trajectoire qui doit être décrite ayant égard même à la force centrifuge; ce qui fournit une immenſe variété de combinaiſons très-propres à exercer les Analyſtes.

197. MAIS ſans nous arrêter à des recherches plus curieuſes qu'utiles, examinons un cas qui peut être utile dans l'application de cette théorie à la phyſique. Si deux points A & B (fig. 143) ſont placés dans la diſtance d'une limite de cohéſion aſſez forte, & que le troiſieme placé au ſommet E du ſecond demi-axe ſoit auſſi dans une limite de cohéſion aſſez forte; la force qui le retient à ce ſommet pourra être aſſez conſidérable pour qu'on ne puiſſe l'en éloigner ſenſiblement qu'en employant une très-grande force. Alors ſi quelqu'un retient le point B (fig. 145) dans le lieu où il eſt, en faiſant tourner le point A autour de lui juſqu'à ce qu'il arrive en *a*, le point E parviendra en *e* & la forme du triangle A·E·B ſera conſervée; de ſorte que les trois points A, E, B oppoſeront une grande réſiſtance à leur ſéparation. Mais ſi les points A, B (fig. 143) étant ſuppoſés retenus par des forces qui empêchent leur mou-

vement, on éloigne un peu le point E du lieu qu'il oc-cupe; aussi tôt qu'on cessera de le retenir ce point re-viendra en E, & fera de petites oscillations autour du point E dans une courbe elliptique ou très-appro-chante de l'ellipse. Mais si la force qui éloigne le point E de sa position n'est pas capable de le faire parvenir jusques au premier axe, ce point rétrogradera & dé-crira moins qu'une demi-ellipse. Son mouvement sera accéléré en allant vers l'extrémité du petit axe & re-tardé en allant de l'extrémité du petit axe vers F ou vers m. Si ce point a assez de force pour passer jusqu'en n au-delà de m, il continuera de s'émouvoir dans le périmè-tre de l'ellipse, sont mouvement sera accéléré en s'appro-chant des extrémités H & E du petit axe, & sera retardé en s'en éloignant. N'arrive-t-il pas quelque chose de sem-blable lorsque les corps solides venant à être liquéfiés par l'action des particules ignées, leurs parties reçoivent une grande agitation; mais cette agitation cessant peu à peu par les forces qui chassent les particules ignées, les parties recouvrent une position semblable & forment de nouveau un corps solide.

198. Si nous supposons que les distances étant expri-mées par AB, AC, &c. (fig. 146), les forces sont comme les ordonnées BM, Cm, &c. il est visible que les quarrés des vîtesses seront comme les aires cor-respondantes BMmC, BMND (voyez le N°. 116). Donc si on suppose que le mobile B est arrivé en B avec une vîtesse A, & que le quarré de la vîtesse acquise en par-courant l'espace BD soit = BB, la différence des quar-rés des vîtesses que le mobile a en B & en D sera = BB — AA; elle sera = BB lorsque le mobile sera arrivé en B avec une vîtesse nulle. Si le mobile étant arrivé en D les forces correspondantes à la partie DT de l'axe étoient nulles, la différence c^2 des quarrés des vîtesses lorsque le mobile seroit parvenu en T seroit toujours = BB — AA, ou = AA — BB, selon que B sera plus grand ou plus petit que A; & BD étant sup-posé constant, c le sera de même.

Supposons maintenant que l'arc mN est sensible-ment une logistique ou logarithmique dont la sous-tangente fait = a, & imaginons une autre logistique dont la sous-tangente soit = b; selon ce que nous avons

dit dans la premiere section, les logarithmes d'un même nombre y pris dans ces logistiques sont entr'eux comme $a : b$, en supposant l'ordonnée de laquelle on commence à compter les abscisses $= 1$. Donc en appellant ces logarithmes x & x', l'on aura $a : x :: b : x'$; c'est-à-dire que les sous-tangentes des logarithmiques sont à l'intervalle compris entre deux ordonnées égales dont l'une passe par l'origine des abscisses, en raison constante; ainsi plus la sous-tangente est petite plus cet intervalle est petit. Si l'on suppose que x représente l'intervalle entre l'ordonnée $y = 1$ & l'ordonnée $y' = 2$, cet intervalle sera le même que celui qui sépare les ordonnées 10 & 20, parce que $1 : 2 :: 10 : 20$. Ainsi en diminuant la sous-tangente a, on pourra faire l'intervalle x entre l'ordonnée 1 & 2 aussi petit que l'on voudra. Cela posé si l'on suppose qu'à la distance AB répond la force répulsive BM, & que la compression d'un fluide de l'eau, par exemple, soit exprimée par le rapport de AB : AC, c'est-à-dire si l'on suppose que lorsque la distance AC entre les particules de l'eau se change en AB, la force répulsive Cm devient $=$ BM; il est visible que la distance BC entre les deux ordonnées Cm, BM peut changer très-peu ou que les lignes CA & BA peuvent approcher de la raison d'égalité, quoique les forces BM & Cm soient entr'elles dans tel rapport d'inégalité qu'on voudra. Mais lorsque l'ordonnée DN sera devenue fort petite, la courbe cessera de se confondre sensiblement avec la logistique, elle coupera l'axe AD, formera au-dessous un arc attractif, recoupera bientôt le même axe, & l'on aura un arc répulsif qui représentera ces forces énormes qu'ont les particules de l'eau lorsqu'elles sont réduites en vapeur par la fermentation & la chaleur.

Lorsqu'on ôte l'obstacle qui s'opposoit à l'écoulement de l'eau, les premieres parties descendent par la force répulsive qui soutenoit celles qui étoient situées au-dessus, les suivantes descendent par l'action d'une force semblable qui va toujours en diminuant, & il se produit dans toutes un petit mouvement qui est assez petit au commencement. Bien plus, quelquefois la force répulsive éloigne assez les molécules pour que la force attractive de celles qui s'écoulent accélère la vîtesse des sui-

vantes ; de forte qu'il y a de part & d'autre quelques petites oscillations.

199. Les vîtesses dans l'écoulement des eaux sont à peu-près en raison sous-doublée des hauteurs ou des forces comprimantes. Cela doit avoir lieu si les forces correspondantes aux différentes hauteurs, sont dans le rapport de la premiere force qui fait écouler les eaux, c'est-à-dire en raison sous-doublée des hauteurs ; car alors l'aire de la courbe des forces sera proportionnelle à la hauteur ; ainsi les quarrés des vîtesses seront (198) comme les hauteurs. Supposons encore que M*m*N représente l'arc d'une logarithmique, si l'on multiplie l'ordonnée BM par la sous-tangente *a* de cette logarithmique, le produit donnera l'aire BMND infiniment longue du côté de T. Si l'on multiplie C*m* par *a*, l'on aura l'aire comptée depuis le point C. Mais si l'ordonnée DN=Z est très-petite, le produit *a*Z sera très-petit, & l'on pourra regarder les aires BMND, C*m*ND comme égales respectivement à celles dont on vient de parler. Or ces dernieres aires sont entr'elles comme les forces initiales BM, C*m* qui déterminent l'écoulement des premieres tranches de la liqueur ; donc alors les quarrés des vîtesses sont comme les pressions ou comme les hauteurs. D'un autre côté pour que la vîtesse absolue soit la même que celle qu'un corps acquéreroit en tombant de toute la hauteur du liquide au-dessus de l'orifice, comme cela arrive sensiblement à l'égard de l'eau, l'aire des forces doit être égale à un rectangle dont la hauteur seroit égale à celle de l'eau, & dont la base représenteroit le poids *p* d'une molécule d'eau ou la force répulsive qu'une molécule peut exercer sur une autre molécule qui la presse ; parce qu'alors la derniere particule reçoit la même vîtesse accélératrice qu'elle auroit pu recevoir en tombant de toute la hauteur du fluide : ainsi tout le poids exprimé par BM doit être à cette force comme la hauteur du fluide est à la sous-tangente de la logistique, si *m*N est un arc de logistique. Mais le poids BM est à *p* comme le nombre de particules contenues dans la hauteur est à l'unité, & par conséquent comme cette hauteur est à la distance des premieres particules. Ainsi cette distance doit être égale à la sous-tangente *a* de la logarithmi-

que ; *a* est donc une quantité tres-petite. Mais cette vîtesse absolue est-elle la même dans les différens fluides, & les quarrés des vîtesses des écoulemens sont-ils proportionnels aux hauteurs ? C'est ce que les expériences pourront apprendre.

200. PASSONS maintenant à la réflexion & à la réfraction de la lumiere. Si un point mobile A (fig. 147) se meut dans la direction AN, lorsqu'il sera arrivé en B où les forces répulsives du plan RS commencent à agir, il abandonnera cette ligne pour décrire une courbe BQ dont la nature dépendra de la combinaison de la force tangentielle selon BN & de la force répulsive perpendiculaire au plan RS. Si cette force est capable de fléchir le mouvement du point A, de maniere que la courbe BQ devienne paralèlle au plan avant que ce point soit entré dans ce plan, il est visible que par l'action continue de la même force répulsive qui doit rendre au mobile la même vîtesse verticale qu'elle vient d'éteindre, tandis que la force horisontale ou parallèle au plan n'a pas été altérée, le mobile A décrira l'arc QD égal à QB ; arrivé en D, il continuera son mouvement le long de la ligne DM qui fait l'angle de réflexion *m*PM égal à l'angle d'incidence BN*n*, & parce que les points N & P sont très-proches l'un de l'autre, ils paroîtront se confondre. Si le plan RS a quelques aspérités, mais petites respectivement à la distance à laquelle s'étendent les forces répulsives, ces forces vers Q seront peu différentes de ce qu'elles seroient si le plan étoit parfaitement poli & l'angle de réflexion sera sensiblement égal à celui d'incidence, ce qui n'arrivera pas si les aspérités sont considérables.

Soient maintenant deux surfaces paralèlles AB, CD (fig. 148) telles qu'un point mobile situé hors de ces plans n'éprouve aucune force, tandis qu'entre ces plans il doit être exposé à l'action des forces perpendiculaires à ces plans & égales pour chacun lorsque les distances seront égales. Avant d'être arrivé en E le mouvement du mobile G sera rectiligne & uniforme, & sa vîtesse pourra être exprimée par HE qu'on peut décomposer en HS paralèlle & SE perpendiculaire à la surface AB. Le mobile étant arrivé entre les deux plans dont nous venons de parler, son mouvement

fera fléchi par l'action des forces de ces plans ; de maniere cependant que la vîtesse paralèlle ne sera point altérée, tandis que la vîtesse perpendiculaire sera augmentée ou diminuée selon que les forces tendront vers le plan C D ou vers la surface A B. Si la force perpendiculaire se trouve éteinte en X lorsque la direction est devenue parallèle aux plans, le mobile sortira de ces plans en décrivant la ligne X I M, qui fera avec la perpendiculaire L I l'angle L I M de reflexion égal à l'angle d'incidence H E S. Si cela n'arrive qu'en x, le mobile décrira la ligne xim dont la partie im est parallèle à I M. Si on suppose que G E représente un rayon de lumiere dans lequel il y ait des globules dont les directions deviennent parallèles aux surfaces A B, C D, aux points X, x, y, en supposant que les forces qui poussent ces globules vers A B, sont plus grandes dans ces points que celles qui tendent vers C D, ces globules décriront respectivement les lignes X M, xm, yn. Supposons maintenant que le mobile G étant parvenu en X, la force qui le pousse vers C D, l'emporte sur celle qui le pousse vers A B, ou si l'on veut encore supposons que la courbe E X O, ne devient jamais paralèlle à A B, dans ce cas il peut arriver que la vîtesse perpendiculaire soit diminuée ou augmentée, selon que les forces qui tendent à approcher le mobile du plan C D seront plus foibles ou plus fortes que celles qui agissent pour le rapprocher de A B. Dans le premier cas le mobile aura en sortant la vîtesse O N & dans le second la vîtesse ou. Supposons que le mobile suit la direction E X O N (& ce que l'on dira de ce cas fera comprendre ce qui doit arriver lorsque E X ou est la ligne décrite), & regardons la vîtesse H E comme constante, H S qui exprime la vîtesse parallèle, sera = P N qui exprime la même vîtesse après la réfraction, S E & O P désigneront les vîtesses perpendiculaires avant & après cette réfraction. Maintenant puisque les forces qui agissent entre les plans sont perpendiculaires à ces plans, si l'on appelle a la vîtesse S E, & b la vîtesse O P, la différence cc des quarrés de ces vîtesses sera constante (voyez le N°. 198). Soit H E = H, O N = h, H S = P N = m; l'on aura par la propriété du triangle rectangle, $H^2 = a^2 + m^2$,

& $h^2 = b^2 + m^2$; donc $H^2 - h^2 = a^2 - b^2 = c^2$; c'eſt-à-dire que la différence des quarrés des vîteſſes avant & après la réfraction ſera conſtante ; & parce que H & c ſont des conſtantes, h ſera conſtante. Maintenant en faiſant le rayon $= 1$, le ſinus de l'angle d'incidence HES $= p$, celui de réfraction PON $= q$, l'on aura $1 : H :: p : m$, & $1 : h :: q : m$; donc $p = \frac{m}{H}$ & $q = \frac{m}{h}$. C'eſt pourquoi $p : q :: h : H$ ou en raiſon conſtante (*), c'eſt-à-dire que les ſinus de l'angle de réfraction & d'incidence ſont toujours en raiſon conſtante (voyez ci-deſſus les Nos 5 & 6). Mais appliquons la théorie à la Phyſique.

Application de la théorie précédente à la Phyſique.

201. JE ne me propoſe pas de donner ici un traité complet de Phyſique, je me contenterai de parler ſuccinctement des queſtions qui me paroîtront mériter le plus d'attention, me propoſant de reprendre cette matiere lorſque je donnerai ma Phyſique.

L'impénétrabilité naturelle des corps s'explique facilement dans cette théorie ; car puiſque dans les petites diſtances les forces répulſives augmentent de maniere qu'elles ſont capables d'éteindre un mouvement quelconque, aucune force finie ne peut faire évanouir la diſtance qu'il y a entre deux points de matiere, ce qui

(*) Il faut concevoir que les ſurfaces AB, CD ſont celles entre leſquelles les forces commencent à agir ; de ſorte que ſi la lumiere paſſe de l'air dans le verre, lorſqu'il aura franchi la ſurface CD, il continuera de ſe mouvoir dans le verre ſelon la direction ou, par exemple. Si le premier milieu étoit de verre & le ſecond d'eau, le rayon s'émouveroit dans la ligne ON, par exemple, en s'éloignant de la perpendiculaire.

feroit cependant nécessaire pour la pénétration ; la seule puissance divine qui peut exercer une force infinie peut produire cet effet. S'il n'y avoit point de forces répulsives, une masse quelconque passeroit librement à travers une autre masse ; car le nombre des points de l'espace sensible, occupés par l'une quelconque de ces masses étant infiniment plus grand que celui des points de ces masses, il est infiniment plus probable qu'aucun des points de l'une des masses ne rencontreroit un des points de l'autre masse, qu'il ne l'est que cette rencontre auroit lieu ; & cela arriveroit par conséquent sans aucune vraie pénétration. Mais les forces répulsives empêchent cet effet. Si l'on conçoit un solide composé de différentes surfaces mises les unes audessus des autres, de maniere que les points qui composent ces surfaces soient dans les limites très-fortes de cohésion, & qu'il en soit de même par rapport aux points de ces mêmes surfaces considérées les unes par rapport aux autres, de sorte que les points de la surface supérieure soient tellement distants des points correspondants de la surface suivante qu'on ne puisse ni les éloigner ni les rapprocher sans de très-grandes forces, ces surfaces quoique distantes les unes des autres formeront un corps physique très-solide & très difficile à rompre.

202. ON sait qu'une balle de fusil traverse une porte demiouverte & très-mobile sur ses gonds sans la faire tourner, ce qui vient de ce que les parties de la balle s'étant approchées des parties du bois beaucoup plus que cellesci ne l'étoient entr'elles emportent ces particules avec elles, & la brièveté du tems ne permet pas aux forces qui retenoient les particules voisines du bois d'y produire un mouvement sensible. Que si la vîtesse étoit encore plus grande la balle traverseroit la porte sans y produire aucun changement sensible & sans y produire aucune véritable compénétration comme la lumiere passe à travers un milieu diaphane. C'est-là peut-être la raison pour laquelle l'Auteur de l'univers a donné aux globules de lumiere cette vîtesse prodigieuse qui leur fait parcourir la distance du Soleil à la Terre, c'est-à-dire environ 34 millions de lieues dans l'espace d'environ un demi-quart d'heure. Si nous pouvions nous pro-

curer une vîtesse assez considérable nous passerions à travers les portes fermées & les murailles sans trouver aucun obstacle & sans aucune vraie compénétration. Nous nous sommes donc formé l'idée de la solidité, parce que les forces répulsives ne permettent pas à nos mains & à nos membres de passer à travers les solides physiques, qui ne sont autre chose dans cette théorie, qu'un assemblage de points sans étendue retenus dans leurs distances respectives par les forces attractives & répulsives. Comme l'intervalle entre ces points n'est pas sensible, ils forment un continu physique & non mathématique. A l'égard de l'étendue géométrique elle n'est autre chose que l'espace pur ; de sorte que la Géométrie a pour objet l'étendue en longueur, largeur & profondeur : mais cette étendue continue est bien différente du solide physique qui est composé de points renfermés dans un certain espace qui a nécessairement des limites & par conséquent une figure. A l'égard de la masse elle doit s'estimer par le nombre des points qui appartiennent au corps ; de maniere que si le nombre des parties qui appartiennent au corps A est double du nombre des parties qui appartiennent au corps B, la masse du premier sera double de celle du second. Mais la densité est comme la masse divisée par le volume. Pour ce qui regarde l'inertie des solides physiques, elle tire son origine de celle des points qui les composent. Quant à la mobilité, tout le monde sait que cette propriété consiste en ce qu'un corps peut changer de lieu, & passer d'une partie de l'espace dans une autre partie de l'espace. Mais l'égalité de l'action & de la réaction vient de ce que dans le choc des corps, les forces répulsives agissent également sur le corps choquant & sur le corps choqué. Pour ce qui regarde la divisibilité de l'étendue pure, je ne crois pas qu'on puisse la révoquer en doute : car si on divise l'étendue d'un pied en 2 parties égales, qu'on prenne ensuite la moitié de la moitié & ainsi de suite, on ne parviendra jamais à la derniere division ; mais si il est question du solide physique, comme le nombre des points qu'il renferme est fini, on ne peut dire sans absurdité que la matiere est divisible à l'infini.

Mais la gravité que Newton met au rang des propriétés générales de la matiere & qui suit dans les distances

un peu considérables à très-peu près la raison renversée des quarrés des distances, est représentée par l'arc TV de la courbe des forces dans lequel les ordonnées sont à très-peu près en raison inverse des quarrés des distances.

On peut dans cette théorie répondre facilement à l'objection qu'on fait aux partisans de Newton, pourquoi l'attraction ne force pas les étoiles de s'approcher les unes des autres pour ne former qu'une masse. Plusieurs répondent que la distance entre les fixes est si considérable que l'attraction ne sauroit produire qu'un mouvement insensible dans ces astres, auquel par conséquent on ne doit faire aucune attention. Cependant il est aisé de voir que dans un très-grand nombre de siecles cette attraction pourroit produire un effet sensible & déranger le systême de l'univers. Mais dans notre théorie on peut supposer que le dernier arc de la courbe des forces qui représente la gravité, après s'être éloigné à une plus grande distance que les comètes de notre systême ne peuvent le faire, coupe de nouveau son axe de maniere que la force attractive se change en répulsive, ensuite en attractive & ainsi de suite; de sorte que rien n'empêche de supposer que les étoiles se trouvent dans les points des limites, & qu'elles ne peuvent ni s'approcher ni s'éloigner naturellement les unes des autres.

203. LA cohésion s'explique facilement dans cette théorie par les limites dans lesquelles on peut supposer placées les particules qui composent les corps. Mais pourquoi les parties séparées d'un bâton venant ensuite à être appliquées l'une contre l'autre n'acquierent-elles pas la même cohésion qu'elles avoient auparavant? Les Newtoniens disent que les aspérités des parties brisées qui ont été un peu dérangées, empêchent que le contact ne soit le même qu'auparavant. Cependant si les deux surfaces sont assez polies on sent d'abord une grande résistance, mais quand elles ont été assez comprimées l'une contre l'autre elles adhèrent ensemble avec une force beaucoup plus grande que le poids de l'air comprimant; parce qu'avant de parvenir à ce contact, il y a une grande force répulsive, que Newton lui-même a reconnu exister à quelque distance du contact quoique très-petite; à cette force répulsive, disent-

ils, succède une force attractive dans des distances encore moindres, & elle devient très-grande dans le contact; & parce que dans les marbres polis on obtient beaucoup de contacts en même-tems il n'est pas étonnant que leur cohésion soit assez forte. Dans la théorie dont il s'agit ici l'on peut dire que plusieurs particules des surfaces séparées ont avancé au-delà des limites qu'elles avoient auparavant, de maniere qu'elles exercent maintenant une répulsion qui empêche que les autres ne se rapprochent jusqu'aux limites qu'elles avoient avant la division. Mais dans les marbres polis, quoique les anciennes limites de cohésion n'ayent pas lieu, néanmoins il y a plusieurs particules qui sont dans des limites, foibles à la vérité, de cohésion; c'est la cause qui s'oppose à leur séparation perpendiculaire; quoique je ne veuille pas nier que la résistance de l'air n'y ait une grande part. Mais quand on fait glisser deux pieces de marbre polies l'une sur l'autre on sent seulement les forces attractives des bords des surfaces, & non des surfaces totales. Lorsque les marbres se sont formés, les parties insensibles se sont approchées peu à peu les unes des autres par les forces qui ont endurci le marbre; mais dans l'état actuel, avec quelque soin qu'on polisse les marbres, on ne peut se flatter d'enlever toutes les aspérités & les éminences qui empêchent que les surfaces parviennent à de fortes limites de cohésion. Il n'est pas plus difficile d'expliquer pourquoi un corps quelconque, un globe, par exemple, se brise si on le charge d'un trop grand poids. Car si l'action du poids comprimant l'emporte sur la force qui retient les particules dans les limites de cohésion, ces particules doivent s'éloigner & le corps se rompre. Mais on auroit tort de penser que toutes les parties d'un même corps ont une égale solidité. Car rien n'empêche de supposer qu'il y a dans les solides physiques des molécules de différens genres. Les premieres sont composées de points simples physiques, les secondes sont composées d'un certain nombre des premieres, celles du troisieme genre sont formées de l'assemblage d'un certain nombre de molécules du deuxieme genre & ainsi de suite. C'est pourquoi les molécules du premier genre seront plus solides que celles du second genre, & celles-ci beaucoup

coup plus que celles du troisieme genre, &c. Ceci nous fait voir qu'il peut y avoir des particules qui s'attirent les unes les autres, d'autres qui se repoussent mutuellement, comme nous l'avons vu ci-dessus en considérant ce qui se passe par rapport à 3 points que rien n'empêchoit de regarder comme composés de particules de différens genres. Mais si deux particules de matiere sont composées de points tellement situés qu'en les approchant l'une de l'autre les répulsions & les attractions se compensent, ces particules ne s'approcheront ni ne s'éloigneront l'une de l'autre. Bien plus il peut y avoir des endroits sur la surface d'une particule, même sphérique, qui attirent une autre particule, d'autres qui la repoussent, & des troisiemes qui ne la repoussent ni ne l'attirent, parce qu'il peut y avoir dans ces lieux plus de points ou moins de points que dans d'autres. Et ces points physiques peuvent être placés à différentes distances du centre & entr'eux.

204. LES corps solides sont composés de parties unies, de maniere que si l'on en pousse quelques-unes d'un certain côté les autres suivent. Les corps roides sont ceux dont la figure ne peut être changée qu'en employant une grande force ; mais les corps flexibles, comme les verges élastiques, n'opposent pas une grande résistance à leur flexion. Les fluides ne sont pas entierement privés de forces répulsives ou attractives. Tout le monde connoît la grande force répulsive de l'air qui résiste à sa compression en raison de sa densité, d'autres fluides comme l'eau & le mercure ont une grande force attractive, cependant leurs molécules un peu considérables se séparent facilement les unes des autres. Dans les poudres & les sables il n'y a aucune force sensible ni attractive ni répulsive, parce que les forces attractives & répulsives se compensent mutuellement A l'égard du mercure & de l'eau, on ne peut douter des forces attractives qui lient leurs molécules les unes avec les autres ; mais dans les fluides élastiques tels que l'air, les particules qui les composent se trouvent sans doute hors des limites & sous des arcs répulsifs. Et parce que dans ce fluide la force répulsive augmente à raison de la proximité des parties, on doit conclure que les ordonnées des arcs répulsifs dans lesquels se trouvent ses

particules, ſont dans le même rapport (*). Dans les fluides humides les particules ſe trouvent dans des limites de cohéſion aſſez fortes, mais il y a tout auprès un arc répulſif qui coupe la courbe des forces preſque à angle droit. C'eſt la raiſon pour laquelle l'eau réduite en vapeur a une ſi grande force répulſive.

205. SI les forces de part & d'autre de la limite dans laquelle ſe trouvent les particules d'un corps reſtent ſenſiblement les mêmes pendant un certain eſpace au-delà de cette limite, & qu'on fléchiſſe ce corps ; dès que la force fléchiſſante ceſſera d'agir il reprendra ſon premier état, comme il arrive aux corps élaſtiques. Si les forces ne s'étendent pas à une certaine diſtance, ou qu'il y ait dans cet intervalle un grand nombre de limites, on pourra fléchir le corps ſans le rompre, mais il ne fera aucun effort pour reprendre ſon premier état ; on pourra même l'allonger conſidérablement ſans le rompre comme cela arrive au plomb, à l'or &

(*) Concevons deux cubes A & B dont les volumes ſoient égaux, mais dont les maſſes d'air qu'ils renferment ſoient différentes, de maniere que la diſtance entre les centres des molécules du premier ſoit $= a$, & la diſtance entre les centres des molécules du ſecond ſoit $= b$; il eſt évident que les nombres des molécules d'air dans les côtés homologues des cubes A & B, ſeront comme $b : a$ (c'eſt-à-dire, en raiſon inverſe des diſtances) ; dans les ſurfaces comme $bb : aa$; dans les cubes comme $b^3 : a^3$. Maintenant les forces qui agiſſent ſur les ſurfaces égales de ces cubes pour retenir les particules d'air dans les diſtances qu'elles ont, ſont comme le nombre de ces molécules dans chaque cube, ou comme les denſités, & les forces qui tendent à les dilater ſont auſſi comme les denſités, & comme les forces comprimantes. Donc ces forces que j'appelle F & f ſont comme $b^3 : a^3$. D'un autre côté ces forces ſont en raiſon compoſée des ſurfaces ou du nombre des particules qui agiſſent contre elles, & des actions de chaque particule dans ces ſurfaces. Si donc on déſigne ces actions par m & n, nous aurons $F : f :: b^3 : a^3 :: mbb : naa$; ainſi $naab^3 = ma^3b^2$, ou $nb = ma$, ou $m : n :: b : a$.

à l'argent. A l'égard des corps visqueux outre la grande ténacité que leurs particules ont entr'elles, elles ont encore la propriété de s'attacher aux autres corps, parce-que leurs molécules peuvent facilement parvenir aux limites de cohésion avec celles des solides auxquels elles s'attachent.

206. LES Physiciens contemplent avec admiration la disposition qu'ont certains corps, par exemple, la glace, les petites étoiles que forme la neige à certaines figures; cette disposition est sur-tout remarquable dans les sucs qui forment les pierres précieuses & dans les parties organiques des végétaux & des animaux. Il est facile de rendre raison de cette disposition : car si les molécules attirent d'autres molécules par certains points de leurs surfaces, tandis qu'elles les repoussent par d'autres points, il est aisé de concevoir pourquoi les particules secondaires qui forment les corps sensibles se disposent dans un certain ordre, en se présentant les points dans lesquels elles s'attirent & s'arrangeant de maniere qu'elles puissent acquérir de fortes limites de cohésion : ce qui fait qu'elles ne peuvent former que certaines figures. Et parce que la même molécule qui attire par un de ses points la molécule A, repousse, à cause de sa différente disposition, la molécule B; lorsqu'une masse composée de plusieurs particules différentes vient à passer tout auprès, celles-là seules s'arrêteront qui pourront être attirées & acquérir de fortes limites de cohésion. Cette remarque fournit facilement l'explication des sécrétions, de la nutrition & de la végétation.

Pour déterminer la résistance & l'action des fluides il faudroit connoître exactement la loi des forces, le nombre & la disposition des points physiques qui forment les fluides, & avoir à sa disposition une Géométrie & une analyse bien supérieure à celle que nous connoissons. Cependant pour dire quelque chose sur une question qui paroît surpasser les forces de l'esprit humain, je remarquerai 1°. que la résistance vient du mouvement qu'on imprime aux molécules du fluide. En second lieu il y a une autre résistance qui doit son origine aux forces que les particules exercent les unes sur les autres lorsque l'une s'approche de l'autre en sortant des limites dans lesquelles elles étoient en équilibre;

or ces molécules acquierent des mouvemens très-différens, elles tournent, elles pouffent les autres, & dans les fluides élaftiques, fur-tout, du moins lorfque la vîteffe n'eft pas bien confidérable, celles qui font par derriere agiffent fur le mobile, tandis que celles qui font par devant retardent fon mouvement.

207. Si les limites dans lefquelles fe trouvent les particules d'un corps fe fuccèdent en affez grand nombre dans un certain intervalle, lorfque par une force extérieure on aura comprimé ou allongé une maffe en transportant les particules d'une limite de cohéfion à une autre, elles y refteront en équilibre fans faire aucun effort pour reprendre leur ancienne fituation : voilà ce qui arrive dans les corps mous. Mais fi les limites font affez écartées, de maniere qu'en diminuant la diftance la force répulfive fuccede à l'attractive, tandis que la force attractive augmente avec la diftance, il eft vifible que fi l'on comprime un corps ou qu'on faffe effort pour l'allonger, il fe rétablira dans fon premier état, & les parties recouvreront leur ancienne fituation dans le premier cas par l'action de la force répulfive, & dans le fecond par la force attractive. A l'égard des corps ductiles ils ne different des corps mous que parce qu'ils retiennent leur figure avec plus de force ; car les corps mous changent facilement de figure, au lieu que les corps ductiles comme les métaux, non-feulement changent de figure par l'action du marteau ; mais ils retiennent avec force celle qu'on leur a donnée.

208. La Terre, l'Eau, l'Air & le Feu, qu'on appelle vulgairement les quatre élémens, ne font autre chofe que des corps compofés de points homogènes différemment difpofés, des molécules defquels on peut former enfuite différens mélanges & différens corps. Certains corps font diffolubes par l'eau, comme le fucre, par exemple ; parce que leurs particules attirent celles de l'eau avec plus de force que celle-ci ne s'attirent entr'elles ; c'eft pourquoi les particules d'eau prenant la place des molécules féparées du corps folide, celles-ci doivent nager dans le fluide : telle eft la caufe de la diffolution. Mais fi on jette dans un fluide ainfi chargé de molécules qu'il vient de diffoudre, une autre fubftance dont les molécules attirent celles du fluide avec plus de force

& peut-être même à de plus grandes distances que ne peuvent le faire les particules du premier corps, cette seconde substance sera dissoute & les particules du fluide quitteront celles du premier corps pour s'attacher à celles du second; ainsi les molécules du premier corps tomberont par leur poids naturel au fond du vase à travers le fluide spécifiquement plus leger, & l'on aura ce qu'on appelle une précipitation.

209. Il est facile de comprendre dans cette théorie comment on peut mêler deux corps de différente nature comme l'eau & le vin; & comment en mêlant deux substances différentes, on obtient une masse dont le volume n'est pas égal à la somme des volumes des substances mêlées. En effet les particules des corps ne se touchant pas immédiatement, elles peuvent par l'interposition d'autres parties, s'approcher beaucoup plus qu'elles ne faisoient auparavant & former un volume plus petit que ne l'étoit celui de l'une des deux masses.

210. Si par l'interposition & l'agitation du fluide igné les particules d'un corps, de l'or, par exemple, changent leurs distances de maniere qu'une particule ait de petits mouvemens d'oscillation autour d'un axe ou de deux autres particules, ce corps deviendra fluide; mais si la force qui causoit l'agitation vient à cesser, ce corps pourra redevenir solide. Ce mouvement d'oscillation pourra cesser, soit par l'inégalité qu'il y a entre les forces de différens points d'une même molécule, soit par l'expulsion de la matiere ignée & la résistance du milieu ambiant. De même en dépurant certains corps, c'est-à-dire en leur ôtant les parties hétérogênes & difformes qui empêchoient le mouvement de leurs molécules, on pourra les rendre plus liquides. Ainsi il y a moins de viscosité dans le pétrole que dans le bitume; & la Chymie fait voir que dans ces substances la viscosité est d'autant plus grande qu'elles sont plus composées.

Si dans un corps devenu liquide par l'action du feu, les particules en s'écartant les unes des autres passent dans un grand arc répulsif, elles se fuiront tout à coup & le corps se volatilisera. La même chose arrivera si les molécules d'un corps fixe sont situées dans des distances de répulsion très-fortes, mais retenues par l'interposition des particules d'une autre substance dont les for-

ces attractives surpassent les forces répulsives dont nous venons de parler; car si par l'action du feu ces particules sont chassées du corps dans lequel elles étoient retenues, la force répulsive dissipera les molécules de ce corps. Cela paroît arriver à l'air qui semble former un corps fixe dans les calculs qu'on trouve dans la vessie ou dans les reins, & qui peut ensuite recouvrer son état volatil. On diroit même qu'il perd alors son élasticité; ce qui vient de ce que les particules interposées empêchent par leur attraction les effets de sa force répulsive. L'alternative des arcs répulsifs & attractifs de la figure 135 nous fait comprendre facilement d'où peuvent venir les évaporations, les fermentations, les déflagrations subites & les explosions. Si les particules d'un corps sont placées à des distances convenables, il pourra se faire que par l'interposition subite de quelques molécules externes, les points des particules de la masse s'écartent assez pour entrer dans de grands arcs répulsifs qui les dissiperont subitement: c'est ce qui paroît arriver dans l'explosion subite de la poudre; la même chose arrive, mais avec moins de violence dans les phosphores qui prennent feu par le seul contact de l'air.

211. TOUS les corps ne fermentent pas avec tous les corps, ce qui vient, comme nous l'avons insinué ci-dessus de ce que certaines molécules n'agissent pas sur toutes les autres molécules, mais seulement sur quelques-unes, tandis qu'elles exercent une grande force par rapport à d'autres. A l'égard du feu, on peut le regarder comme une espece de fermentation de la matiere sulphureuse avec celle de la lumiere; car les parties de la matiere sulphureuse par l'action d'une lumiere assez dense ou même d'une seule étincelle fermentent avec tant de violence que passant des limites de cohésion dans des arcs répulsifs, elles s'évaporent & la matiere lucide se dissout & s'envole. Ainsi si un oiseau en se posant sur une montagne détache un grain de sable, qui en tombant sur d'autres grains les entraîne dans sa chûte, & que ceux ci tombent sur de grosses pierres qui n'avoient presque aucun point d'appui, ils déterminent leur chûte, toute la montagne s'écroule dans la mer & produit une horrible agitation. C'est là l'image des forces intestines qui peuvent produire

des effets ſurprenans par le moyen d'un petit changement de diſtance dans les particules d'un corps.

212. Si le feu eſt produit par la ſeule fermentation de la matiere ſulphureuſe & de lumiere (*), là où il n'y aura point de ſoufre l'action du feu ne ſera pas à craindre. Il paroît que les corps terreſtres ne ſont diſſous par le fluide igné que parce qu'ils renferment des parties qui lient entr'elles des molécules inertes, c'eſt à-dire, des molécules qui n'exercent entr'elles ni répulſion ni attraction, parce que leurs forces répulſives & attractives ſe compenſent. Mais s'il exiſtoit un corps qui n'eût rien de ſemblable, il pourroit ſupporter l'action du feu le plus violent ſans être altéré. Il ſeroit donc poſſible qu'il y eût dans le Soleil même des animaux vivans, mais dont les corps ſeroient compoſés d'une matiere bien différente de celle de nos animaux terreſtres; par la même raiſon cet aſtre pourroit avoir des végétaux & des minéraux qui lui ſeroient propres

La grande effervеſcence qu'il y a dans les corps qui brûlent écarte les particules de la lumiere qui, dès qu'elles ſe trouvent dans de grands arcs répulſifs, ſe diſſipent avec une vîteſſe prodigieuſe; & parce que les molécules lucides ne parviennent à ces arcs que ſucceſſivement, le corps enflammé ne doit pas ſe diſſiper tout-à-coup, mais il fournit de la lumiere pendant un tems plus ou moins conſidérable. D'un autre côté la quantité de lumiere qui vient du Soleil pouvant avoir avec la maſſe de cet aſtre une raiſon inaſſignable; le Soleil pourroit éclairer l'Univers pendant des millions de ſiecles, ſans que ſon diamètre en fût diminué d'un demi pouce. La vîteſſe de la lumiere dépend de la gran-

(*) Les Chymiſtes modernes entendent par fermentation un mouvement inteſtin qui s'excite à l'aide d'un degré de chaleur & de fluidité convenables, entre les parties intégrantes & conſtituantes de certains corps très compoſés, & dont il réſulte de nouvelles combinaiſons des principes de ces mêmes corps : c'eſt ainſi que le vin en fermentant ſe change en vinaigre. Mais nous prenons le nom de fermentation dans un ſens plus étendu, en déſignant par ce mot les fermentations chymiques & les effervеſcences.

deur de l'arc répulsif qui produit son émission. A l'égard des rayons de différentes couleurs, on peut supposer que les molécules dont ils sont composés sont un peu différentes entr'elles, & que les forces répulsives agissent sur elles à peu-près également & leur communiquent des vitesses sensiblement égales. Mais dans la théorie dont il s'agit ici, ces particules peuvent facilement traverser les milieux homogènes en ligne droite; car les milieux ne sont autre chose qu'un espace pur dans lequel il y a infiniment plus de points sans matiere que de ceux où se trouve la matiere; de sorte qu'il est infiniment probable, c'est-à-dire, certain, qu'un globule de lumiere ne rencontrera jamais sur son chemin un point physique ou matériel de ce milieu. De même l'espace à travers lequel se meut la lumiere dans tant de sens différens, contenant un nombre de points infiniment plus grand que celui de tous les globules de lumiere qui existent dans la nature, il est infiniment probable qu'aucun de ces globules ne se trouvera jamais sur le chemin de l'autre, & qu'il n'y aura aucun choc entr'eux. Lorsque le milieu est fort hétérogène, les parties qui le composent, ayant des forces inégales, detournent la lumiere en différens sens & l'empêchent de traverser sa masse en ligne droite comme cela est nécessaire pour la diaphanéité.

213. A l'égard de la réflexion & de la réfraction de la lumiere nous en avons assez parlé ailleurs; mais si les corps agissent sur la lumiere en la détournant de sa direction, il est aisé de comprendre que les rayons lumineux doivent aussi agir sur ces mêmes corps & le mouvement perdu dans le choc de la lumiere doit être au mouvement acquis par le corps choqué, comme la masse choquée à celle de la lumiere. Cependant si un rayon de lumiere va choquer une plume très-légere suspendue à un fil très-mince, elle ne lui communique aucun mouvement sensible, ce qui prouve que la masse d'un globule de lumiere est d'une petitesse étonnante & dont il est bien difficile de se former une idée.

214. IL y en a qui attribuent les aurores boréales à des vapeurs légeres, poussées par les rayons solaires. Il est surprenant qu'un Physicien, qui pense que les rayons ne sont autre chose que des ondes, soutienne une telle

opinion; car de telles ondes ne produiroient pas les mouvemens progressifs qu'on remarque dans les aurores. Ceux qui disent que les fleuves peuvent être rétardés, & que les tremblemens de terre peuvent être produits par l'action de la lumiere n'ont jamais fait attention que les principes de la méchanique prouvent que la masse des globules lumineux est si petite qu'elle ne sauroit produire un tel effet. Cependant les rayons solaires communiquent aux particules des corps un mouvement qui peut les déplacer & les faire passer dans des arcs répulsifs, & occasionner leur dissipation. On sait que le régule d'antimoine calciné augmente de la dixieme partie de son poids; mais cet effet ne doit être attribué qu'aux parties volatiles qui se trouvent dans l'air & non au fluide igné. La grande action de la lumiere sur les substances sulphureuses qui l'attirent puissamment & leur réaction occasionnent une espece de fermentation qui produit le feu Mais lorsque la lumiere traverse des des milieux diaphanes & homogènes comme l'air & le verre, elle ne perd aucune partie de sa vîtesse. Car si après avoir traversé un morceau de verre, elle est réfléchie de nouveau vers ce verre, elle le traversera en se réfractant de la même maniere que la premiere fois, l'angle d'incidence étant supposé le même; ce qui ne pourroit avoir lieu, si la vitesse avoit été diminuée. Dans certains corps phosphoriques la lumiere solaire, après avoir parcouru un grand nombre de labyrinthes, après avoir comme circulé autour des molécules intérieures qui la poussent & la repoussent tantôt dans un sens, tantôt dans une autre, parvient au moins en partie jusqu'à la surface d'où elle s'envole; c'est la cause pourquoi ces phosphores après avoir été exposés au Soleil, luisent dans les ténebres plus ou moins de tems selon la longueur du chemin que doit faire la lumiere pour s'échapper par leur surface. La quantité de lumiere réfléchie est d'autant plus grande que l'angle d'incidence est plus grand, parce qu'alors la vîtesse perpendiculaire étant très-petite, la force répulsive des surfaces peut la détruire plus facilement. Mais il est aisé de comprendre que les globules des rayons de différentes couleurs étant composés des points dont le nombre & l'arrangement n'est pas le même, ne doivent être ni

également réflexibles, ni également réfrangibles : cependant les globules rouges étant tous à très-peu-près égaux, leur refrangibilité sera aussi à peu-près la même, comme l'expérience l'apprend ; il en sera de même pour les rayons orangés, &c. Mais le crystal d'Islande a une propriété bien étonnante & bien digne de l'attention des Physiciens. Cette pierre affecte constamment la figure d'un parallèlipipede oblique, terminé par six parallelogrammes & huit angles solides, & lorsqu'elle réfringe un rayon de lumiere, il se divise en deux parties dont l'une est réfractée d'une maniere constante & ordinaire, tandis que l'autre est réfractée d'une maniere différente & extraordinaire (*), & cela arrive quel que soit l'angle d'incidence. Les rayons qui sortent de ce crystal observent la même loi, c'est-à-dire que celui qui a été réfracté selon la loi usitée ou inusitée, est réfracté en sortant de la même maniere ; néanmoins le rayon incident & ses deux parties qui sortent du verre sont parallèles. Si l'on applique l'une contre l'autre deux lames parallèles de ce crystal, les parties du rayon incident qui auront été réfractées selon la premiere ou la seconde maniere par la premiere lame, le seront de même par la seconde. Ce sera la même chose si les deux crystaux sont semblables & ont des positions semblables. Le même globule est réfracté d'une maniere différente selon que ses côtés sont tournés d'une maniere différente par rapport à ceux du crystal. Ce phénomène paroît dépendre des différentes forces qui ont lieu en des points différens du même globule, & qui sont la cause qu'il se réfracte selon la loi ordinaire, lorsque la partie tournée du côté du crystal n'exerce pas une force ou ne reçoit pas un mouvement capable d'empêcher l'effet de la loi ordinaire ; mais si l'autre partie est tournée du côté du crystal, la force qu'elle exercera étant différente, la réfraction le sera aussi (**). Il y en a aussi qui attribuent

(*) Lorsqu'on met un morceau de crystal d'Islande sur un livre, chaque lettre étant vue par une double réfraction, paroît double.

(**) Il y a encore un autre phénomène qui a beaucoup

le phénomène dont on vient de parler aux surfaces différentes dont, disent-ils, ce crystal est composé. Le crystal de roche produit aussi deux réfractions, mais moins inégales que celles du crystal d'Islande.

---

exercé les Physiciens & qui est très-digne de leur attention, je veux parler des *accès de facile transmission* & *de facile réflexion*. Si par le moyen du savon mêlé avec l'eau, l'on forme des bulles, leurs lames (si l'on peut s'exprimer ainsi) transmettent les rayons de toutes les couleurs tant qu'elles ont une certaine épaisseur; car d'abord elles ne paroissent point colorées, ensuite le sommet paroît rouge, puis successivement orangé, &c. Enfin on y apperçoit une espece de tache noire. La couleur rouge qui étoit d'abord au sommet descend, & après elle l'orangé, &c. Il est visible que l'eau descend du sommet de la bulle, & que ses différentes parties ou lames deviennent d'abord plus minces vers le sommet & ensuite vers le milieu, &c. de sorte qu'il paroît que l'épaisseur différente des lames transparentes des corps est la cause de leurs différentes couleurs, que l'épaisseur des particules colorées qui paroissent rouges est la plus grande de toutes, tandis que celle des particules violetes est la plus petite. Si l'on applique l'une contre l'autre les convexités de deux verres qui soient les segmens de deux grandes sphères, l'air formera autour du point de contact physique un disque dont l'épaisseur augmentera à proportion que les anneaux seront éloignés de ce point où il paroit une tache noire, & on verra tout autour des anneaux colorés, séparés les uns des autres par un anneau blanc. Il paroit que les corps sont composés de lames minces d'une certaine épaisseur, & par les expériences de Newton, les lames dont les épaisseurs sont comme les nombres 1, 3, 5, 7, &c. réfléchissent les mêmes rayons qui sont transmis par celles dont les épaisseurs suivent le rapport des nombres 2, 4, 6, 8, &c. Il y a dans chaque rayon de lumiere des dispositions alternatives, dans l'une desquelles après être arrivé à la surface qui sépare deux milieux hetérogènes, il se réfléchit, tandis qu'il est transmis dans l'autre (ce que l'on appelle *les accès de facile réflexion & de facile transmission*) avec des intervalles d'accès, après lesquels reviennent les dispositions favorables à la facile ré-

215. LA *diffraction* n'est autre chose qu'une réflexion ou une réfraction commencée. Lorsqu'un rayon arrive à une certaine distance d'un corps dont la nature est différente de celle du milieu qu'il traverse, il se fléchit en s'ap-

flexion ou à la transmission. C'est de ces intervalles différens selon les milieux, l'inclinaison d'incidence, & la couleur des rayons, que paroissent dépendre tous les phénomènes des lames minces, des couleurs naturelles & changeantes, comme aussi les couleurs des lames épaisses des corps, & enfin la diffraction qui fait que les rayons qui passent auprès des tranchans & des pointes des corps se fléchissent, & que ceux qui ont des couleurs & des réfrangibilités différentes, forment aussi des angles différens.

Si nous supposons que les globules de différentes couleurs sont aussi composés d'un nombre différent de points différemment arrangés, on pourra imaginer que tous les points d'un même globule n'ont pas été à leur départ du soleil également exposés à l'action des points repoussans, de maniere que les uns ayant reçu plus de vîtesse que les autres, ils s'en seroient séparés, si les forces qui les unissent avoient été anéanties. Il est arrivé de-là que les points qui avoient reçu plus de vîtesse ont d'abord entraîné les autres en s'en écartant un peu; mais les forces attractives ont bientôt obligé ces points de se rapprocher les uns des autres, de maniere que leurs distances sont devenues plus petites qu'auparavant; alors la force répulsive les a écartés au-delà des limites naturelles, mais la force attractive les a rapprochés, & ainsi de suite; de sorte que dans les oscillations qui persistent à travers les milieux différens que la lumiere traverse, les globules s'allongent tantôt dans un sens tantôt dans un autre. On peut donc concevoir qu'il y a dans un globule de lumiere des accès d'allongement & de contraction; mais comme les pendules qui oscillent ont moins de vîtesse vers les extrémités des arcs qu'ils décrivent & plus de vîtesse quand ils sont arrivés à la verticale, de même les tems pendant lesquels le globule reste dans l'état d'allongement, les points qui se trouvent vers les extrémités du diamètre dans lequel se fait cet allongement, étant beaucoup plus écartés qu'ils ne le seroient dans l'état naturel, ce tems, dis-je, peut

prochant ou en s'éloignant & change de direction Si la surface de ce corps étoit assez considérable, il seroit réfléchi, ou bien il traverseroit le nouveau milieu réfringent ; mais à cause qu'un tranchant ou une pointe termine cette surface en cet endroit, le rayon avance en évitant le tranchant ou la pointe & continue ensuite

être beaucoup plus grand que celui qui répond à l'état moyen de contraction, dans lequel la figure du globule differe peu de la naturelle. Ce qu'on vient de dire de l'état d'allongement doit aussi s'entendre de celui de plus grande contraction, dans lequel les points se rapprochent pour s'éloigner ensuite. Mais comme les vibrations d'un pendule cicloydal sont égales, celles d'un globule le seront de même ; de sorte qu'il se trouvera après des intervalles égaux de tems dans l'état moyen, entre la plus grande contraction & le plus grand allongement ; & les forces que les molécules du milieu excercent sur le globule ne seront pas les mêmes dans ces différens états. Imaginons maintenant qu'un globule arrive à la surface qui sépare deux milieux hétérogènes, & qu'il entre dans l'épaisseur du plan dans lequel agit la force qui trouble le mouvement des rayons. Si un certain état moyen de contraction est supposé le plus favorable à la réflexion, celui de plus grande dilatation ou de plus grande contraction étant celui de la plus facile transmission, il est visible que notre globule rebroussera son chemin, ou entrera dans le milieu selon qu'il se trouvera dans l'un ou l'autre de ces états: j'appellerai *états extrêmes* ceux de plus grande dilatation & de plus grande contraction, *état moyen* celui de contraction moyenne. Si le globule se trouvant vers un des états extrêmes, passe dans l'épaisseur dont on vient de parler, & que les forces du milieu en le détournant de son chemin, plient tellement son mouvement que la courbe devienne parallèle à la surface réfringente, tandis que les forces répulsives agissent encore, le globule rebroussera son chemin (en décrivant une courbe dont la nature dépendra de la vîtesse parallèle à la surface refringente, & de la nature de la force répulsive), & sortira du milieu dans lequel il étoit entré. La distance entre la surface de ce milieu & le point où la courbe est devenue parallèle à cette surface détermine un intervalle de réflexion. Si le globule parvenu à l'extrémité de cet intervalle avoit perdu toute sa vîtesse par

son mouvement selon une direction différente de celle qu'il avoit auparavant. En voilà assez pour le présent sur la lumiere, dont nous parlerons plus au long dans la Physique.

216. TOUT le monde sait que les divers sels ont des formes anguleuses différentes, capables de faire des impressions différentes sur les papilles nerveuses de la langue & du palais; telle est l'origine des saveurs. Les odeurs ne viennent que des vapeurs très-légeres qui se détachent du corps odorant : ces vapeurs reçues dans le nez, qui est l'organe de l'odorat, font sur les nerfs olfactoires une certaine impression qui fait rétrograder le fluide nerveux vers le sensorium. Selon que les vapeurs qui se détachent du corps odorant seront propres à produire un mouvement différent dans les esprits animaux, l'ébranlement du sensorium sera aussi différent, & l'ame éprouvera un sentiment agréable ou désagréable, selon que le cerveau sera ébranlé

rallèle, (ce cas est infiniment improbable & ne doit jamais arriver,) le globule seroit repoussé selon une ligne perpendiculaire au plan dans lequel il se trouve. Si le globule se trouve dans l'état qui lui permet de franchir l'intervalle dans lequel agit la force repoussante du milieu, il passera au-delà & aura un accès de facile transmission. Mais il est visible que selon la nature du milieu & l'inclinaison différente, l'état qui fait la facile réflexion ou la facile transmission, doit se trouver dans plus ou moins de globules; c'est pourquoi selon les différentes circonstances & les forces attractives & répulsives du milieu, le rapport de la quantité de lumiere réfléchie à celle qui est transmise sera très-différent. Il n'est pas surprenant que les rayons de différentes couleurs ayent des intervalles différens; car leurs vîtesses différentes exigent des intervalles différens entre les accès opposés, & ces accès doivent revenir dans des intervalles égaux de tems, déterminés par les durées différentes des oscillations des globules des différentes couleurs. Il est encore facile de concevoir que dans différens milieux les globules de même nature doivent avoir des intervalles différens, puisque leur vîtesse change dans ces milieux (voyez les numéros 5 & 6), & que l'action des forces différentes peut altérer & même changer l'ordre de leurs oscillations.

d'une certaine maniere plutôt que d'une autre.

217. Le son consiste de la part de l'air dans une espèce de trémoussement ou de vibration qui le rend capable d'ébranler les nerfs acoustiques, c'est-à-dire les nerfs par le moyen desquels nous entendons. On peut dans la théorie dont il est ici question, répondre facilement à une difficulté que M. Euler proposa il y a quelques années à M. de Mairan qui expliquoit la propagation simultanée des différens sons par les divers genres de particules élastiques de l'air. M. Euler lui objecta que le grand nombre des sons différens qui peuvent affecter nos oreilles & celles des autres hommes demanderoit une série continue de particules de tout genre pour transporter ces sons, ce qui ne peut pas avoir lieu dans la nature ; puisqu'autour d'un globe situé dans un plan on ne peut disposer que six autres globes (égaux) dans le même plan. Cette objection est facile à résoudre par les principes exposés ci-devant : car dans la théorie que nous développons, les molécules aëriennes n'agissent pas les unes sur les autres par un contact immédiat, mais dans une certaine distance qui peut être plus grande que le diamètre de ces particules. C'est pourquoi puisque certains globules peuvent dans les mêmes distances être inertes relativement à certains autres, tandis qu'ils exercent une action considérable sur d'autres ; il est évident que les molécules aëriennes de différens genres peuvent être tellement mêlées que les unes soient mises en mouvement, tandis que leurs voisines sont en repos. Bien plus quand on supposeroit que les molécules voisines sont aussi mises en mouvement, les unes doivent avoir des mouvemens conformes à cause de la distribution semblable des points qui les composent qui leur permet de faire des oscillations isochrones ; mais les vibrations des globules différens se troublent mutuellement, tandis que celles des molécules semblables sont entretenues (après la premiere action) par les mouvemens conformes & semblables des autres, comme nous voyons que cela arrive dans les cordes consonantes des instrumens, dans lesquels l'une étant frappée les autres deviennent sonores.

Ne peut-on pas expliquer par les mêmes principes, pourquoi une corde de violon & une flûte qui rendent

le même ton, ne nous affectent cependant pas également? Les molécules de la flûte & de la corde de violon étant différentes, ne peuvent-elles pas agir d'une maniere différente sur les mêmes molécules de l'air, & communiquer à leurs particules un mouvement de vibration différent; leurs forces répulsives se réunissant (si l'on peut parler ainsi) sur des points différens dans ces molécules aëriennes? ou bien cela ne viendroit-il pas de ce que les fibres de différens instrumens capables de rendre le même ton, sont tellement différentes, qu'elles agissent sur des molécules d'air différentes, qui font entendre des sons différens, quoique également graves ou également aigus? Nous invitons les Physiciens à s'exercer sur ce phénomene, dont personne n'a encore entrepris de rendre raison. Quand à ce qui regarde les sentimens agréables que les accords peuvent exciter dans notre ame, nous en avons parlé ailleurs. Nous nous contenterons d'ajouter ici que l'ordre & le rapport qu'on observe entre les mouvemens des fils de trois pendules dont les longueurs sont comme 16, 9, 4 (fig. 129), situés assez près les uns des autres, & dont les vibrations commencent en même-tems, causent un sentiment agréable, ainsi que les accords formés par les sons qui dans le même-tems rendent des vibrations dont les nombres sont comme 4, 3, 2; de sorte qu'il y a une espece d'analogie entre l'organe de l'ouie & celui de la vue.

218. Nous avons dit plus haut que la cause de la chaleur consistoit dans une espèce de fermentation de la lumiere avec la matiere sulphureuse; le froid consistera donc, ou dans le défaut de cette substance, ou dans le défaut de mouvement du fluide igné ou lumineux. Il peut aussi se faire qu'il existe des molécules nitreuses, ou à peu-près de la même nature, qui par leurs forces attractives enchaînent pour ainsi dire les particules dont la fermentation produiroit la chaleur, & parce que le fluide igné est très-élastique, qu'il cherche à se mettre en équilibre en se répandant dans les lieux où il est moins abondant, un corps très-chaud peut facilement être refroidi par le séjour que fait auprès de lui un autre corps froid: le fluide lucide qui fermentoit dans le premier, se répandant en grande partie dans le second. Si un violent tourbillon qui entraîne l'air vers le

le ciel passe auprès d'une maison fermée, l'air intérieur par sa force expansive brise les portes & les fenêtres & renverse tout pour aller occuper l'espace de celui que le tourbillon a enlevé, afin de rétablir l'équilibre ; de même le fluide igné abandonne les corps dans lesquels ils se trouve en grande quantité pour entrer dans les corps voisins qui en manquent & se mettre en équilibre. On ne doit pas s'imaginer cependant que le feu se répand également dans tous les corps ; car selon leur différente force attractive les uns peuvent retenir & attirer une plus grande quantité de ce fluide que les autres : aussi voyons-nous que les corps denses comme le mercure & le fer refroidissent plus nos mains & en moins de tems que le bois, ce qui vient sans doute de leur plus grande force attractive qui nous enleve le fluide igné Il peut se faire aussi que certaines substances repoussent le feu dans son état naturel, quoiqu'elles l'attirent lorsqu'il se trouve mêlé avec d'autres matieres. Ainsi rien n'empêche de dire que l'air repousseroit la matiere ignée ; mais qu'à cause des particules hétérogènes qu'il contient, parmi lesquelles se trouve sur-tout l eau réduite en vapeurs, il en enlève une petite quantité. C'est pourquoi lorsque les molécules qui voltigent dans l'air, & qui peuvent attirer ou fixer cette substance, s'approcheront des autres comme de celles de l'eau, il pourra arriver des concrétions & des congelations subites : ce qui rend raison des neiges & de la grêle. Et parce que les corps n'ont pas tous les mêmes forces pour attirer, ou retenir le feu, ou pour agir sur lui, il est visible que la diminution ou l'augmentation de la chaleur ne doit pas être la même dans tous les corps, ni suivre exactement la raison de leur densité.

219. ON peut tirer des mêmes principes l'explication des phénomènes électriques. Par la théorie de l'ingénieux Franklin, confirmée par le savant Beccaria, il paroît qu'il y a dans la nature un fluide *électrique* qui peut facilement se mouvoir sur la surface & dans l'intérieur de certains corps (qu'on appelle *corps électriques par communication*) tandis que les corps qu'on nomme *électriques par eux-mêmes* ou *idioélectriques* empêchent son mouvement quoiqu'ils ayent (du moins plusieurs) une grande quantité de ce fluide qu'ils retiennent par leur force attractive, &

qu'ils laissent échapper quand on les frotte, ou que leurs parties internes acquierent un certain mouvement d'oscillation. Dans les corps non électriques par eux-mêmes le fluide dont nous venons de parler se met en équilibre, quitte celui qui en contient une plus grande quantité, pour se répandre dans les lieux circonvoisins jusqu'à saturité; mais à cause de leurs forces attractives & répulsives différentes, de la disposition de leurs parties & de leur densité, la quantité nécessaire pour la saturation n'est pas la même pour tous. Aussi-tôt qu'on approche à une certaine distance deux de ces corps dont l'un a une plus grande quantité respective de fluide, ou dont l'un est électrique par *excès* & l'autre par défaut, les atmosphères électriques qui les environnent & dont la force attractive empêchoit la dissipation, ne gardent plus leur équilibre; mais le fluide coule du corps électrique par excès vers celui qui est électrique par défaut jusqu'à ce qu'il y ait une saturation respective égale. Mais on sent bien cependant que le fluide électrique de ce dernier peut aussi être mis en mouvement de maniere qu'une partie tende vers le premier pour remplir, si l'on peut parler ainsi, une partie de l'espace que celui-ci vient d'abandonner; de maniere qu'il doit y avoir des mouvemens simultanés opposés jusqu'à ce que l'équilibre soit entierement établi.

Dans ces écoulemens, les corps, s'ils sont legers, ou quelquefois s'ils sont librement suspendus, s'approchent les uns des autres, & si le mouvement & la quantité de fluide condensé est considérable, on verra des étincelles, & des explosions. Les nuages peuvent devenir fortement électriques, les uns par excès, les autres par défaut, & les torrents électriques sortant des uns pour entrer dans les autres peuvent produire les éclairs, la foudre & le tonnerre. Il est visible que lorsqu'il n'y a point d'obstacle suffisant, les corps dont les parties attirent quoiqu'inégalement le fluide électrique, doivent s'approcher les uns des autres. L'air humide enlevant continuellement le fluide électrique qu'un globe de verre frotté fournit à un conducteur métallique, doit nuire aux phénomènes électriques, comme l'expérience l'apprend. Mais l'expérience de Leyde est plus difficile à expliquer; il paroit néanmoins que la matiere électrique

qui ſe condenſe dans une bouteille à demi remplie d'eau, peut traverſer en partie cette bouteille ſi elle eſt mince, & que la force expanſive du fluide électrique ſoit aidée par l'attraction d'un corps non électrique appliqué à la ſurface intérieure du verre, alors la nouvelle matiere affluente attirée de proche en proche par celle qui a traverſé le verre & par le corps non électrique ſe condenſe de plus en plus dans la bouteille, l'attraction l'emportant ſur la répulſion; & lorſqu'on établit une communication libre entre les deux ſurfaces du verre par le moyen des corps électriques par communication, le fluide électrique coule rapidement de la ſurface intérieure du verre à l'extérieure : ce qui paroît confirmer cette explication (qui peut également s'appliquer aux phénomênes du cadre de Franklin) c'eſt que l'expérience de Leyde manque lorſque le verre eſt trop épais.

A l'égard de la différence entre la matiere ignée & le fluide électrique, elle paroît conſiſter principalement en ce que celle-ci eſt moins propre à fermenter, ſoit par la colliſion, ſoit par ſon mélange avec les ſubſtances ſulphureuſes (*).

(*) Les phénomènes de l'aimant ſemblent plus difficiles à expliquer, cependant il paroît qu'on peut les réduire à l'attraction de certaines ſubſtances entr'elles; car la direction & l'inclinaiſon peuvent s'expliquer par la ſeule attraction. Nous obſervons que l'aiguille aimantée s'incline auprès des mines de fer. S'il y avoit vers les deux pôles des grands aimans à quelques diſtances les uns des autres, des grandes quantités de fer, il eſt viſible que toutes les aiguilles aimantées ſe dirigeroient vers les pôles; mais avec quelque déviation vers les autres lieux de la terre, dans leſquels ſe trouveroient des maſſes de fer ou d'aimant dont l'action ſeroit aſſez forte pour produire un effet ſenſible, & plus ou moins ſelon les diſtances: & parce que les mines ſe forment, s'altérent ou ſe détruiſent continuellement, il y aura des variations plus ou moins irrégulieres, ſelon que les changemens s'opereront avec plus ou moins de régularité. Différens phénomènes font voir que la force attractive des aimans naturels ou artificiels dépend de la diſpoſition & de l'arangement des parties. A l'égard des pôles attractifs d'un

220. LA terre, selon les Anciens, est un corps fossile, simple, friable, dur, que l'on ne peut volatiliser, & qui n'est dissoluble ni dans l'eau, ni dans l'air, ni dans l'huile, ni dans l'alcool. On doit distinguer principalement deux espèces de terre, l'une stérile, l'autre fertile : la seconde contient une matiere onctueuse, dissoluble dans l'eau ; la premiere ne renferme rien de semblable. Le fumier, les limons, les végétaux pourris rendent la terre fertile ; parce que ces substances contiennent beaucoup de cette terre onctueuse, qui pa-

côté & répulsifs de l'autre, on peut imaginer que cela ne vient que de ce que les forces attractives de l'un sont plus grandes que celles de l'autre. Ainsi en supposant un aimant MN suspendu en t (fig. 150), si les forces attractives de la partie CM se réunissent en C, celles de la partie Tm de l'autre aimant en D, & qu'on suppose pour les raisons que nous allons développer, que les forces D & les forces C conspirent, tandis que les forces P de la partie tN & les forces F de la partie Tn de l'autre aimant agissent pour approcher les pôles N & n ; si ces dernieres forces sont plus grandes que les premieres, l'aimant suspendu tournera autour du point t, les pôles N & n s'approcheront, tandis que les pôles M & n paroîtront se fuir. La raison pour laquelle les forces qui tendent à unir les points F & P, peuvent être plus grandes que celles qui agissent sur les points D & C peut venir de la disposition, des distances & de l'arrangement des particules. La distance à laquelle ces forces agissent fait une difficulté plus grande ; mais peut-être y a-t-il une loi différente & qui s'étend à des plus grandes distances à l'égard du fer & de l'aimant & des matieres dont les molécules ont une disposition analogue à celle de ces substances, à moins qu'on n'admette une espece de fluide particulier qui par ses forces pourroit agir sur des masses éloignées, quoiqu'un tel fluide ait jusqu'ici échappé aux yeux des observateurs. Je ne donne tout ceci que comme une conjecture sur laquelle on ne doit pas faire grand fonds ; mais je pourrai reprendre cette matiere qui demande une longue discussion, dans un Ouvrage de Physique que je me propose de publier dans peu de tems.

roît être composée d'eau, de sel & d'une matiere particuliere onctueuse.

221. LES pierres croissent & se forment continuellement dans la terre : car les carrieres une fois épuisées, se remplissent de nouveau après un long intervalle de temps ; & l'Histoire de l'Académie, année 1738, fait mention des carrieres de pierres à fusil qu'on trouve près de Saint-Aignan dans le Berry, dont on tire depuis long-temps une si grande quantité : lorsqu'une est vuide on la ferme, & quelques années après on y trouve des pierres à fusil comme auparavant : ainsi les carrieres épuisées se remplissent de nouveau, & leur fécondité ne peut être révoquée en doute. La formation des pierres est dûe à une espece de suc pierreux ; car on observe fréquemment que des morceaux de bois, des os & des plantes se changent en pierres ; ce qui semble exiger que les parties de ces corps soient réduites en chaux, désunies & emportées par un suc pierreux qui transporte une nouvelle matiere. On trouve souvent dans les cailloux les plus durs, des pierres précieuses & des os. On a trouvé à Rome dans une statue de marbre quatre instrumens de fer considérables, dont les Anciens se servoient pour tirer les pierres. Ces outils ayant été abandonnés dans les carrieres, le suc pierreux les avoit peu-à-peu incrustés

222. TOURNEFORT a pensé que les pierres & les métaux viennent, à la maniere des plantes, de semences ou petits œufs ; mais cette opinion paroît peu probable, & il est facile de concevoir la formation des pierres par le moyen d'un suc particulier, sans admettre aucune semence : car les mollécules acqueuses contenues dans ce suc pierreux, venant à s'évaporer insensiblement, les parties salines & terrestres s'approchent de plus près, & acquiérent une plus grande adhérence. Ne voit-on pas tous les jours que par la seule évaporation de l'eau salée, les sels se forment en crystaux ? L'origine du crystal dans les cavernes souterraines paroît être la même. Plus l'humidité s'évapore lentement & plus elle contient de ces petites lames dont sont composés les crystaux, plus la pierre est transparente & solide. Les écailles dont sont environnés les corps de certains animaux ont une semblable origine.

Le caillou tient le milieu entre les piérres opaques & les transparentes ; & si les pierres une fois formées sont de nouveau pétrifiées, si l'on peut s'exprimer ainsi, elles se changent en cailloux : aussi trouve-t-on des pierres qui ne sont cailloux que d'un côté ; on trouve encore des cailloux dont les noyaux ne sont pas bien solides. De la même maniere toutes les terres compactes peuvent se changer en pierres.

Certaines pierres figurées ont la forme de certains os, de certaines plantes, de certains coquillages.

Les turquoises ont une couleur bleue, leur dureté est à peine égale à celle du crystal ; elles tirent leur origine des os des animaux remplis d'un suc pierreux, & elles acquiérent cette belle couleur par l'action du feu : en effet, quant on les tire de la terre elles n'ont pas cette couleur, seulement on observe comme des veines obscures d'où la couleur, par l'action du feu auquel on expose ces pierres, se répand dans toute la masse. C'est la raison pourquoi les turquoises dans lesquelles ces sortes de veines sont fort rares, n'acquiérent qu'une couleur très-foible.

Le diamant est la plus belle & la plus chère des pierres précieuses ; il y en a de différentes couleurs, les blancs sont les plus communs. Si on l'enferme dans un vase de porcelaine non-cuite, & qu'on l'expose à un grand feu, il s'évapore, dit-on, sans laisser aucun résidu & sans scories.

Le bezoard est une espèce de pierre qui s'engendre dans le corps de certains animaux, principalement dans l'estomac d'une espèce de chèvre sauvage, qui se nourrit d'herbes aromatiques. Il est composé de plusieurs lames d'une couleur verdâtre, que la chaleur peut séparer les unes des autres ; mais le noyau est dur, & renferme souvent des pailles, des poils, des cailloux, &c.

Le calcul de la vessie tire son origine d'une inflammation des reins, qui se termine par la suppuration lorsqu'elle n'est pas bien traitée, ou que le mal est plus fort que les remedes. Alors le pus qui se trouve dans les mammelons que forment les dernieres divisions des artères avec les conduits de l'urine, enveloppe les parties grasses, salines, terreuses de l'urine, & forme des grains que l'urine en passant entraine souvent avec elle :

parvenus dans le vessie, s'ils n'en sont bientôt expulsés, ils servent de base aux calculs. Les parties grasses, terrestres, salines s'attachent à leur surface & se durcissent insensiblement. Cette incrustation successive forme de petites lames, produit les pierres de la vessie, qu'il est fort difficile de dissoudre par les médicamens, & très-dangereux d'extraire par une opération.

Le corail paroît n'être autre chose qu'une espèce de ruche où se logent des insectes marins. Quelques Auteurs en font une plante. L'aimant est un espèce de minéral qui approche beaucoup de la nature du fer; mais sa nature n'est pas aussi connue qu'on le désireroit.

223. OUTRE les pierres, notre globe renferme encore différentes substances métalliques. Les métaux sont des corps d'une nature particuliere; leur gravité spécifique est plus grande que celle d'autres corps; on peut les fondre par le moyen d'un feu plus ou moins violent; ils different beaucoup entr'eux par la ductilité, la dureté, la couleur & le poids. La table suivante représente la gravité spécifique des sept métaux connus des Anciens.

L'or	1368
Le mercure	$977\frac{1}{7}$
Le plomb	828
L'argent	744
Le cuivre	648
Le fer	576
L'étain	$532\frac{4}{5}$

A ces métaux on doit joindre la platine ou l'or blanc, ce métal qu'on trouve dans l'Amérique Espagnole est fort dur; sa gravité spécifique est à peu-près la même que celle de l'or.

La fluidité du mercure ne vient que de la grande quantité de fluide igné qu'il contient; car les Académiciens de Pétersbourg ont remarqué en 1759 qu'un grand froid peut le rendre solide & malléable. Il est donc certain que l'argent vif, ainsi que les autres métaux, est fluide ou solide selon la plus ou moins grande quantité de feu qu'il renferme.

Il paroît que l'origine des métaux est semblable à celle des pierres, c'est-à-dire qu'il existe dans les entrailles de la terre une espece de suc métallique, qui, en se filtrant à travers les veines des pierres, forme les métaux parfaits & imparfaits. On trouve souvent des particules métalliques dans les plantes, elles y ont été transportées avec le suc nourricier. On trouve même des insectes renfermés dans les minéraux, preuve certaine que ces matieres ont été autrefois molles &

fluides. L'on peut diſſoudre les matieres métalliques & les rendre volatiles : pourquoi donc n'y auroit-il pas dans la terre un ſuc qui contienne des corpuſcules propres à ſe réunir & à former les métaux ?

Les Alchimiſtes ſe vantent de ſçavoir faire l'or & l'argent ; mais bien loin que les chercheurs d'or jouiſſent d'une grande fortune, la plupart périſſent dans la miſere ; & ſi jamais l'Art a paru faire de l'or, certainement l'Artiſte avoit renfermé des petits morceaux d'or ou de la poudre de ce métal dans les ſoufflets, dans les charbons ou dans la ſpatule dont il ſe ſervoit pour remuer la matiere contenue dans le creuſet.

224. MAIS qu'eſt-ce que la matiere ? Dans la théorie dont il s'agit ici les corps ſont compoſés d'un nombre fini de points homogènes inétendus que les forces répulſives tiennent éloignés les uns des autres tandis que les forces attractives les empêchent de ſe diſſiper. S'il étoit un monde dont les points fuſſent ſoumis à une loi différente de forces, de maniere que ſes molécules n'euſſent aucune action ſur celles de notre Univers & réciproquement, ce monde quoiqu'exiſtant au milieu du nôtre n'auroit aucun commerce avec lui, nous n'en aurions aucune connoiſſance, nous pourrions paſſer ſans réſiſtance à travers les corps de ce monde ; & les animaux, s'il y en avoit, paſſeroient à travers de notre corps ſans que nous puiſſions nous en appercevoir. Mais quoique l'homme puiſſe connoître quelques propriétés des ſubſtances corporelles, nous ne devons pas nous flatter de parvenir à la connoiſſance parfaite de l'intérieur des corps, de la figure de leurs molécules & de la nature des ſubſtances. Le grand Architecte de l'univers, en créant la matiere & la ſémant pour ainſi dire, dans l'eſpace, a vu ſeul toutes les combinaiſons & la courbe que chacun de ſes points devoit décrire (*). Car tous les corps ſont dans un mouvement

(*) Les Géomètres de ce ſiecle ont fait les plus grands efforts pour réſoudre le fameux problême de trois corps, ou pour trouver la nature de l'orbite de la lune, ſans pouvoir ſe flatter de l'avoir déterminée d'une maniere rigoureuſe. Que ſeroit-

continuel, la terre, les planètes, les comètes, &c.; les distances des points & les forces qui les poussent changent continuellement, ils se meuvent dans des courbes compliquées dont l'éternel Géomètre connoît seul la nature. Et parce que le nombre de ces points inétendus est borné & que l'espace est étendu, il est infiniment probable & par conséquent certain, (car une probabilité infinie doit être regardée comme une certitude.) qu'aucun point de matiere n'occupera jamais deux instans de suite le même point de l'espace, n'y reviendra jamais après l'avoir une fois quitté, & ne se trouvera même jamais dans le lieu dans lequel s'est

---

ce, s'ils vouloient résoudre le problême dans lequel on demanderoit de trouver la courbe que décrit une planète animée d'une force de projection, tandis qu'elle est attirée en même tems par toutes les autres planètes & les comètes. La parfaite connoissance des mouvemens de la lune est si cachée, & si embrouillée de difficultés (ainsi que l'avoue M. Euler dans ce fameux ouvrage, intitulé: *Theoria motuum lunæ nova methodo pertractata una cum tabulis astronomices unde ad quodvis tempus loca lunæ expeditè computari possunt*, &c. *Petropoli* 1772) qu'elle paroît surpasser les forces de l'esprit humain. En effet, si l'on veut calculer les mouvemens des planètes avec exactitude & trouver la courbe véritable qu'elles décrivent, il n'est plus permis de les supposer sphériques, puisque la lune s'éloigne assez de cette figure, & qu'il est hors de doute que les autres corps célestes ne sont pas non plus des globes parfaits. On ne peut donc pas supposer que l'attraction suit la raison renversée du quarré des distances, entre leurs centres, quand même cette loi existeroit pour les corps sphériques. Ajoutons à cela que la lune est attirée par les autres planètes, sur-tout par Vénus & Jupiter; bien plus, il peut arriver qu'une comète produise dans cet astre des troubles assez considérables, qu'on ne peut ni prévoir ni calculer. Il ne faut donc pas se flatter que les Géomètres connoîtront un jour la vraie & exacte théorie de la lune: ce problême, comme bien d'autres, ne sera jamais, selon toutes les apparences, complettement résolu.

trouvé un autre point de matiere. Quelle sagesse ne faut-il pas pour distribuer les points de maniere qu'il en résulte des molécules de tant de genres propres à former tous les corps naturels (*); pour résoudre ces problêmes si élevés qui ont rapport au nombre infini de combinaisons possibles, & pour choisir celles qui étoient propres à représenter cette sorte de phénomènes que nous admirons dans l'univers. Quelle étoit ta folie grand Descartes lorsque tu disois: *Donnez-moi de la matiere & du mouvement & je ferai un monde*? Si ta demande t'eût été accordée, nous aurions vu, je pense, un monde bien ridicule. Comment aurois-tu disposé la lumiere pour que ses rayons ne se troublassent point dans leurs mouvemens; pour qu'ils eussent différentes refrangibilités & différens accès de réflexion & de réfraction suivant les couleurs différentes, pour qu'ils produisissent la chaleur & les fermentations ignées? D'autre côté quel arrangement aurois-tu donné aux molécules des corps, de quelle épaisseur aurois-tu fait leurs lames propres à réfléchir certaines couleurs, à transmettre ou à absorber les autres? Connoissois-tu la nature des humeurs & la disposition des parties de l'œil propre à recevoir l'image des objets, à transmettre l'impression au sensorium (**)? Connoissois-tu la nature de l'air,

(*) Si quelqu'un refusoit d'admettre ce systême (que le célebre Boscovich, qui en est l'inventeur, a développé dans ce fameux livre qui a pour titre : *Theoria Philosophiæ Naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*), & que nous donnons pour ce qu'il est, c'est-à-dire comme une hypothèse physique & non comme une vérité de Géométrie, uniquement parce qu'on y suppose les premiers élémens des corps inétendus, il pourroit en conservant tout le reste, admettre dans ces élémens une étendue très-petite, & la même loi des forces par lesquelles nous les faisons agir les uns sur les autres.

(**) Je suppose aussi que Dieu eût fourni à Descartes les ames qu'il auroit demandées pour animer les corps humains qu'il auroit formés avec la matiere & le mouvement; mais en vérité ces corps (si cependant on peut dire qu'il en auroit formé) auroient été bien mal construits & bien mal organisés.

ce fluide dans lequel nous nous mouvons, par lequel nous entendons, qui entretient notre vie par la respiration, conserve la chaleur diurne pendant la nuit, produit les vents pour la navigation, enlève les vapeurs d'où se forment les pluyes & les neiges qui fertilisent nos campagnes? Que dirai-je de la gravité qui retient les planètes & les comètes dans leurs orbites, la mer dans ses limites, fait couler les fleuves, tomber les neiges & les pluies, donne aux pendules ces mouvemens uniformes qui servent à mesurer le tems? Si elle venoit à cesser tout-à-coup, où irions-nous? L'air se dissiperoit par son élasticité, la moindre impulsion, le moindre vent suffiroit pour détacher un homme de la terre & lui communiquer un mouvement qui le faisant errer dans l'espace immense, le sépareroit du commerce des autres hommes. Quelle géométrie n'a-t-il pas fallu pour trouver les combinaisons propres à former, à nourrir & à développer les corps organisés des hommes & des animaux, les arbres, les fleurs, les plantes différentes? Mais que sont ces choses en les comparant à celles dont nous n'avons pas la moindre idée, & desquelles nous ignorons même si nous les ignorons?

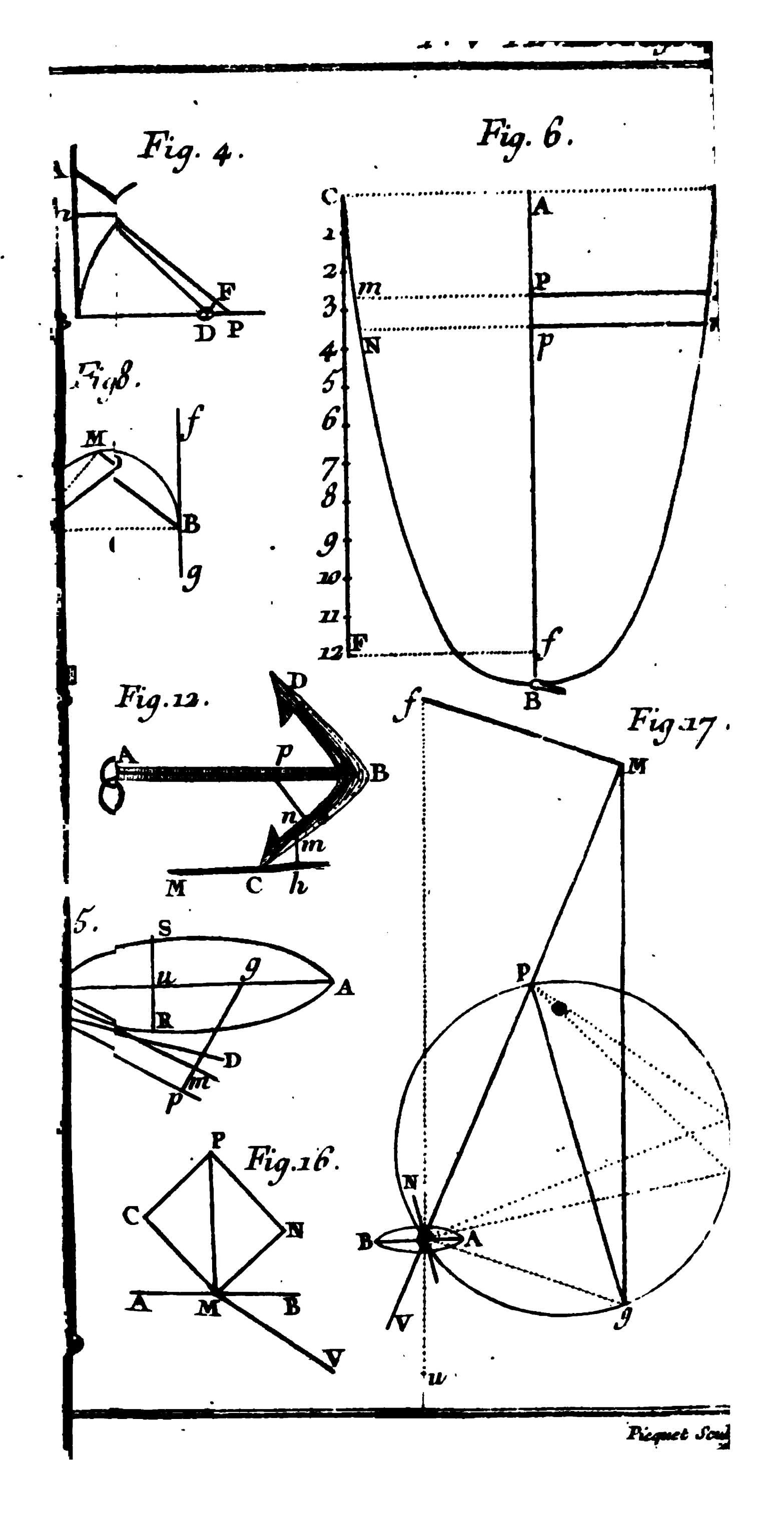
Celui là seul peut ignorer qu'il y a un Etre infiniment sage, infiniment puissant, infiniment savant, qui ferme les yeux, les oreilles ou plutôt (car ce n'est pas assez de les fermer) qui s'arrache les yeux, le tympan, le limaçon, tout ce qui contribue à la vue & à l'ouie, ne fait aucune attention, ni à la circulation du sang, ni à la nutrition, ni à son ame, ni à son corps, ni à l'univers (*). Quelle reconnoissance ne devons-nous pas au grand Etre qui en créant la nature & choi-

(*) Il a cependant paru, il y a quelques années, un ouvrage connu sous le nom de *Systême de la Nature*, dans lequel on a fondu, pour ainsi dire, toutes les difficultés que les athées anciens & modernes avoient proposées contre l'existence de Dieu; mais l'auteur de ce livre fameux que nous avons réfuté fort au long dans notre Métaphysique, n'est ni Géomètre ni Physicien.

fiſſant les moyens propres à obtenir la fin qu'il s'eſt propoſée, nous a comblés de tant de bienfaits, nous a donné des yeux pour voir les aſtres & tant d'autres merveilles, des oreilles pour entendre, une langue pour communiquer nos penſées à nos ſemblables, des pieds pour nous tranſporter d'un lieu dans un autre, des mains pour ſaiſir les corps néceſſaires à nos beſoins, des grains, des animaux, des fruits délicieux pour nous nourrir, ou pour en faire des boiſſons encore plus délicieuſes, des bois pour nous réchauffer pendant l'hiver, des fruits rafraîchiſſans pour modérer les chaleurs de l'été, des fleurs pour flatter agréablement notre odorat, des plantes, des minéraux & des animaux dont nous tirons tant de remèdes propres à guérir ou à ſoulager les maladies auxquelles notre machine eſt expoſée, & tant d'autres choſes dont j'entreprendrois envain de faire l'énumération.

Ainſi la Phyſique, en nous faiſant connoître les mouvemens des aſtres, les végétaux, la nature des corps animés & inanimés & les raiſons de tant de phénomènes étonnans que nous préſente le ſpectacle admirable de cet univers, peut nous donner une idée, quoiqu'imparfaite, de la gloire, de la ſageſſe, de la puiſſance du grand Etre, & contribuer à faire naître dans nos cœurs des ſentimens d'amour, de vénération & de reconnoiſſance envers l'auteur de tant de merveilles, qui nous a comblés & qui nous comble tous les jours de tant de bienfaits : tels ſont les avantages que l'on peut retirer de la contemplation de la nature.

FIN DU TOME CINQUIEME ET DERNIER.


Fig. 4.
h
F
D P
Fig. 8.
M
f
B
g
Fig. 6.
C
A
1
2
P
m
3
4
N
p
5
6
7
8
9
10
11
F
12
f
B
Fig. 12.
D
A
p
B
n
m
M
C
h
f
Fig. 17.
M
5.
S
u
g
A
R
D
m
p
P
Fig. 16.
C
N
A
M
B
V
P
N
B
A
V
g
u
Picquet Sculp

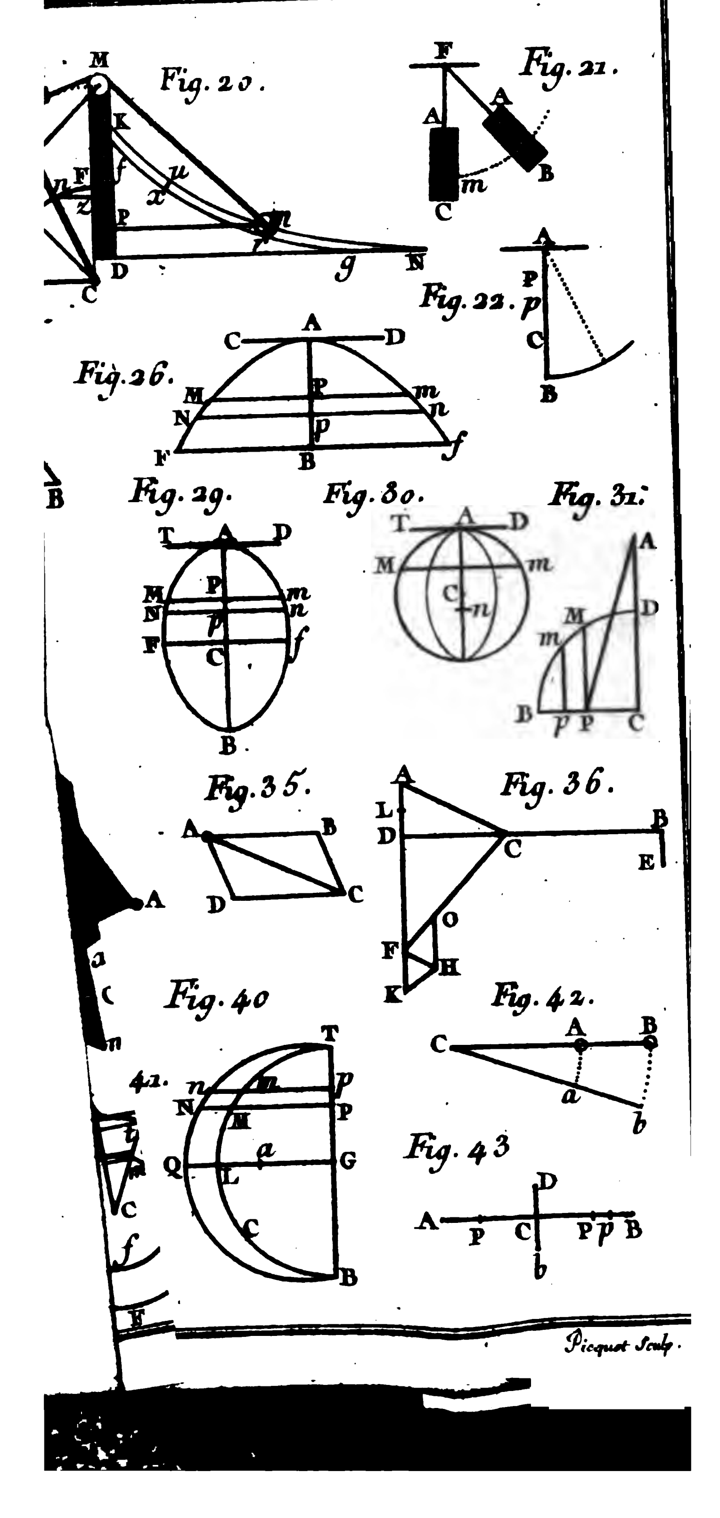
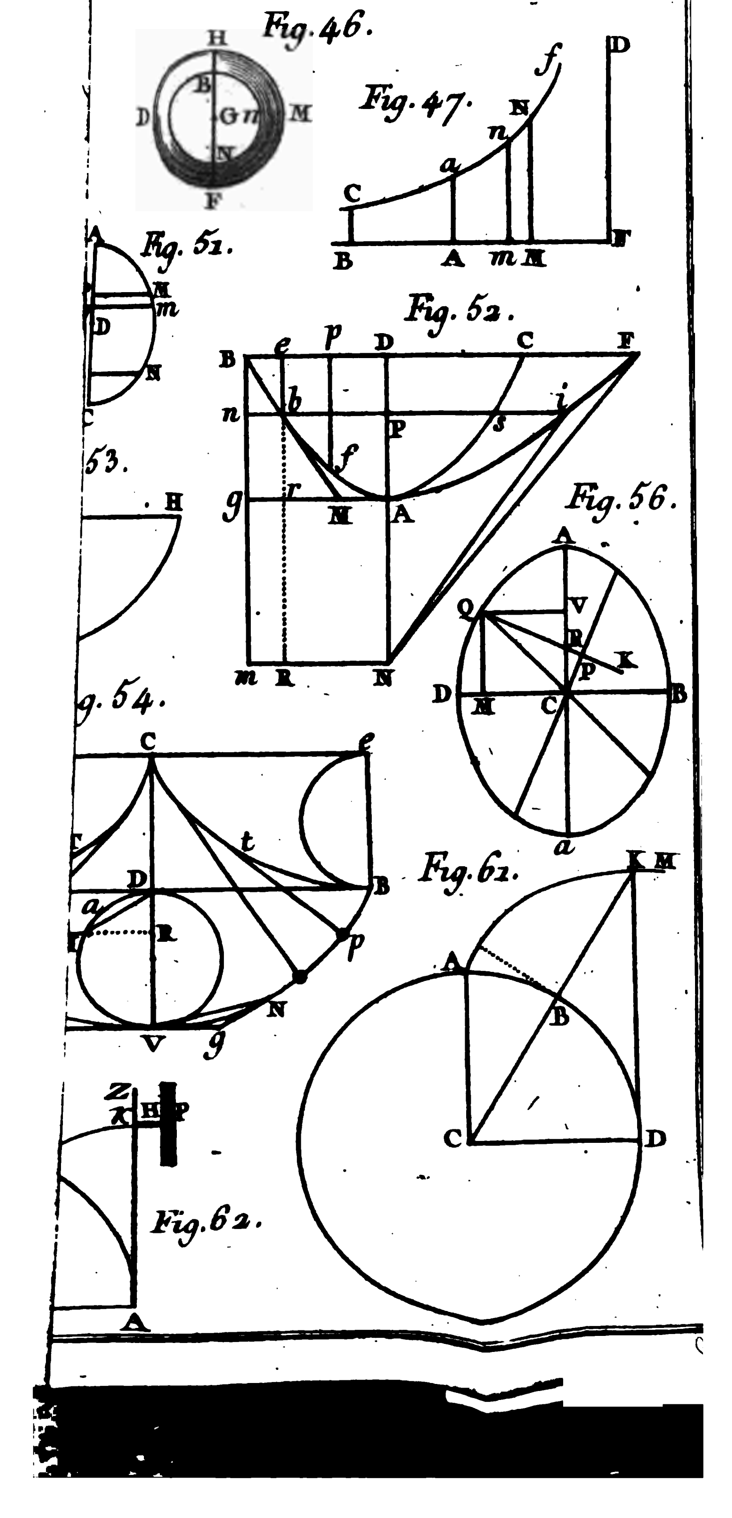
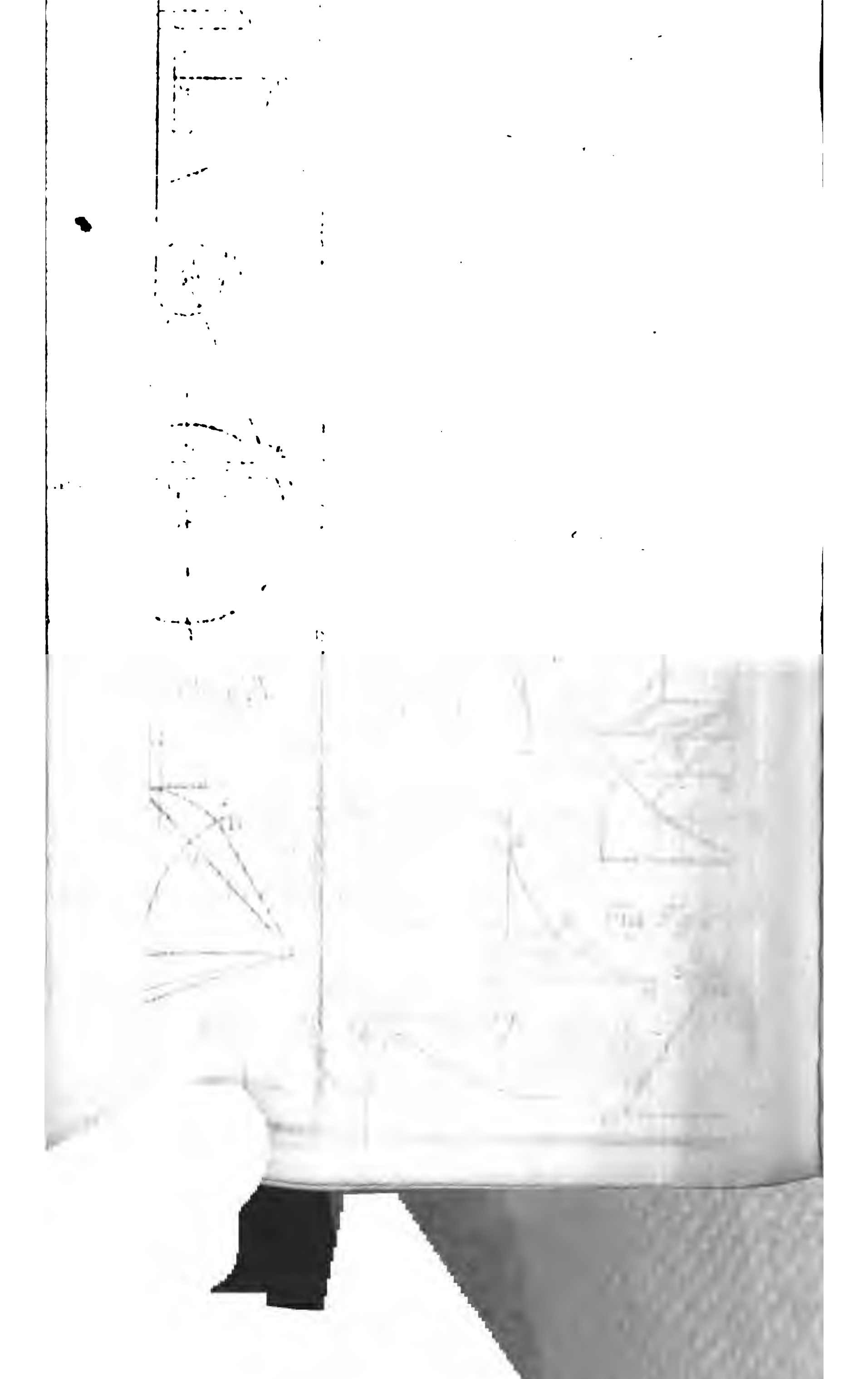


Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 26.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 40
Fig. 42.
Fig. 43
Picquet Sculp.


Fig. 46.
H
B
D
G
n
M
N
F
Fig. 47.
f
D
N
n
a
C
B
A
m
M
F
Fig. 51.
A
M
m
D
N
C
53.
H
Fig. 52.
B
e
p
D
C
F
n
b
P
s
i
f
g
r
M
A
m
R
N
Fig. 56.
A
V
Q
R
K
P
D
M
C
B
a
g. 54.
C
e
t
D
B
a
R
p
N
V
g
Fig. 61.
K
M
A
B
C
D
Z
K
H
P
Fig. 62.
A



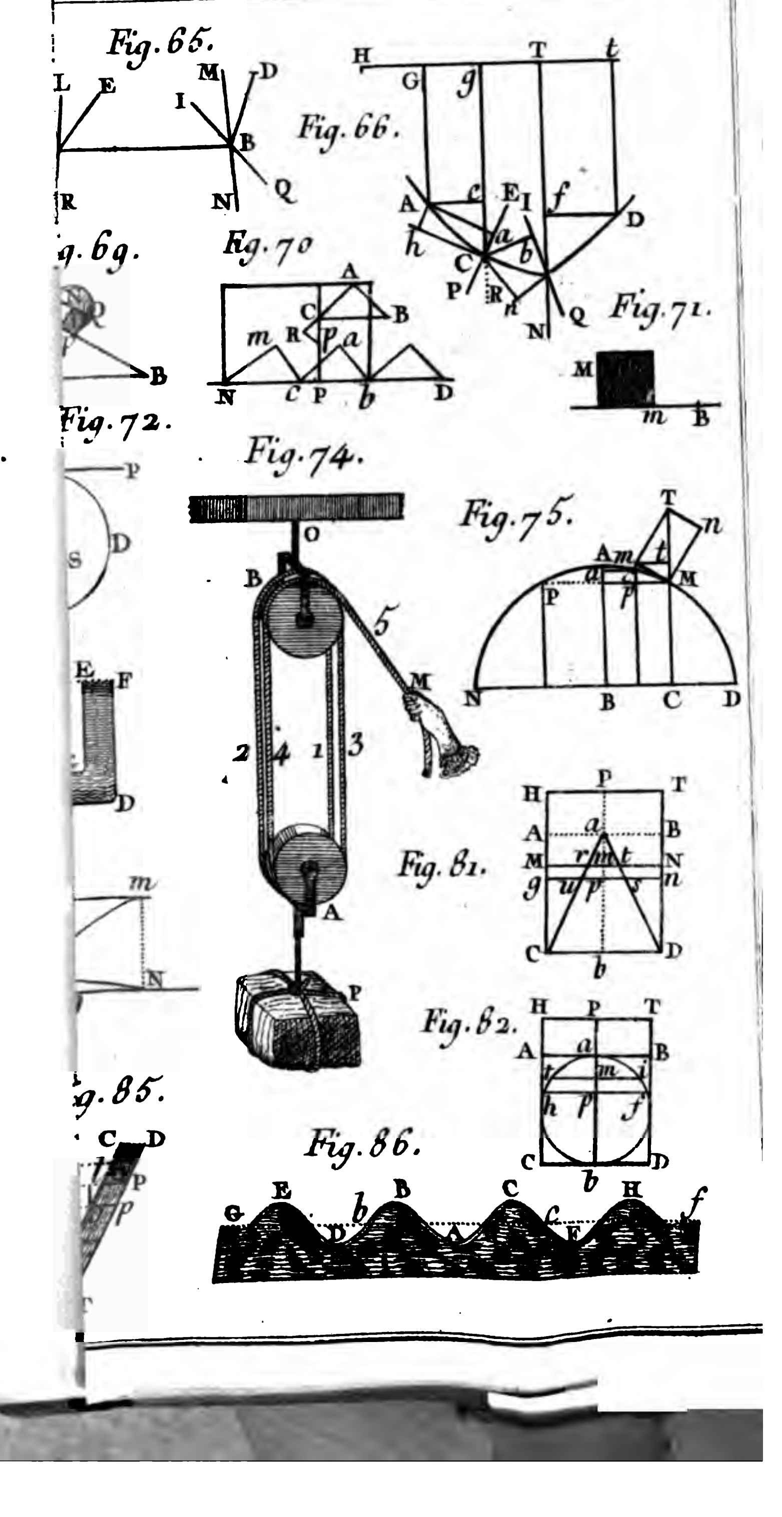
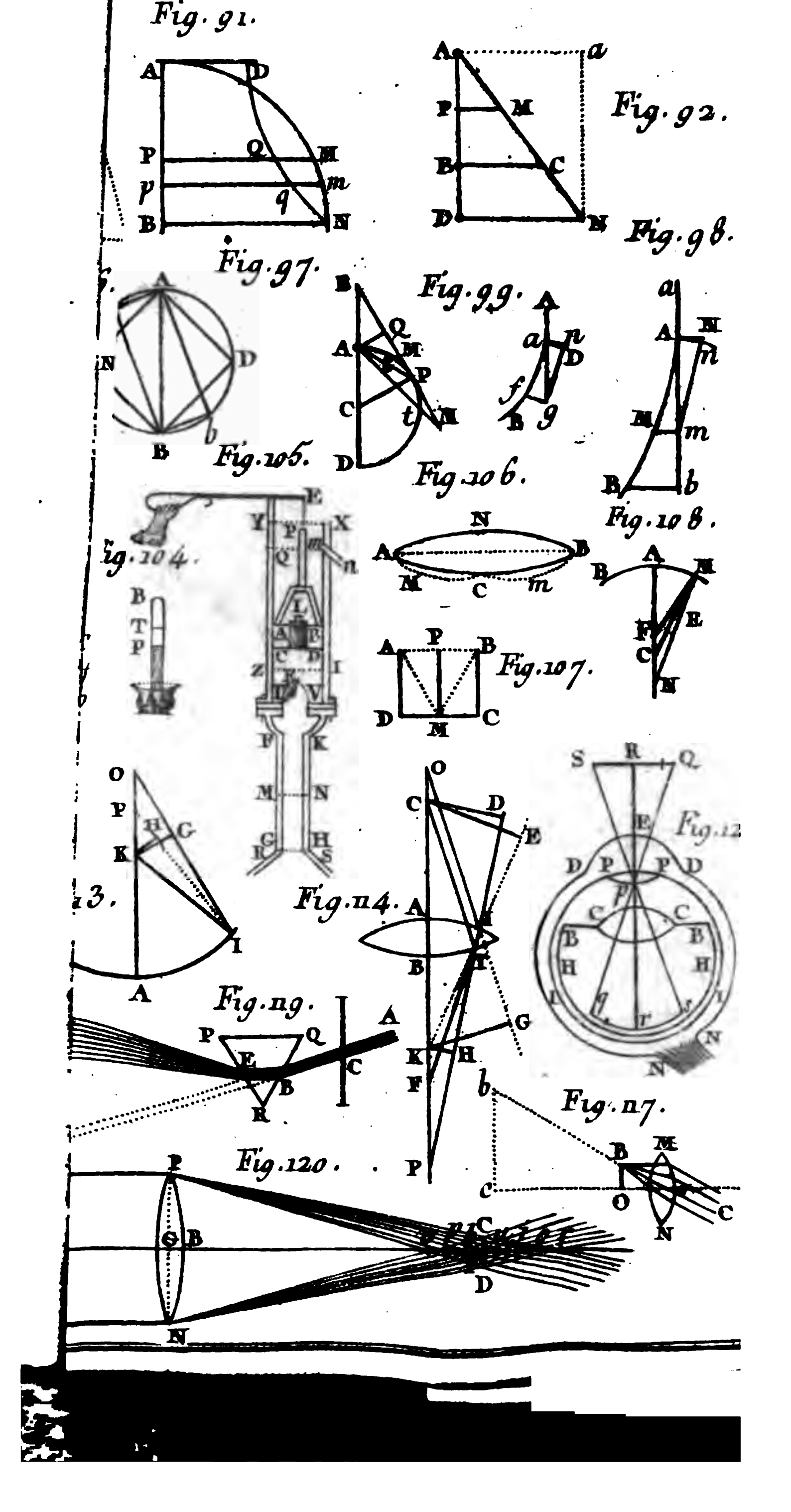


Fig. 65.
Fig. 66.
g. 69.
Fig. 70
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 81.
Fig. 82.
g. 85.
Fig. 86.


Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 98.
Fig. 97.
Fig. 99.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 108.
ig. 104.
Fig. 107.
Fig. 12
13.
Fig. 114.
Fig. 119.
Fig. 117.
Fig. 120.

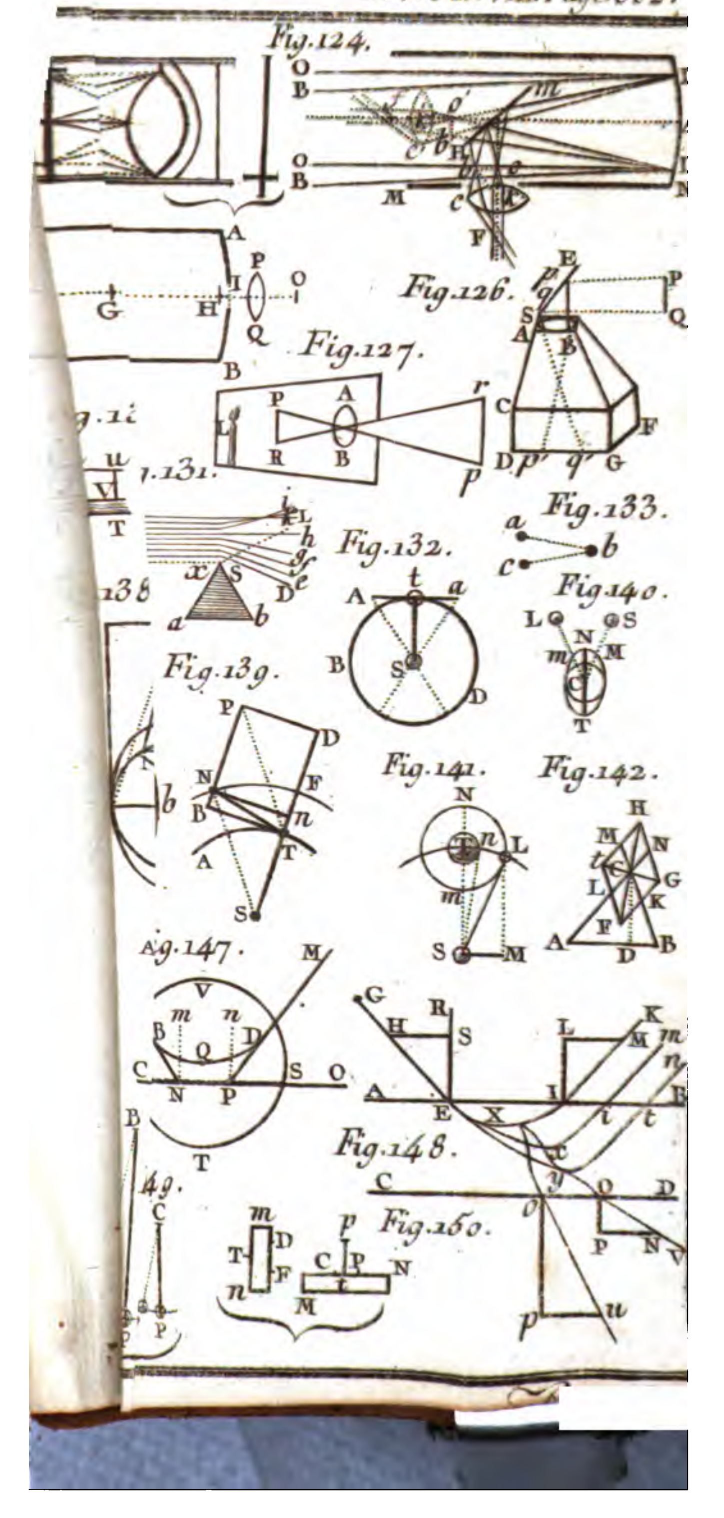

Fig.124.
Fig.126.
Fig.127.
Fig.131.
Fig.132.
Fig.133.
Fig.138
Fig.139.
Fig.140.
Fig.141.
Fig.142.
Fig.147.
Fig.148.
Fig.149.
Fig.150.



TABLE DES MATIERES

CONTENUES DANS CE VOLUME.

CALCUL INTÉGRAL.

FIN DE LA TABLE.

Nota. Malgré tous nos soins, il s'est glissé quelques fautes d'impression faciles à appercevoir.

TOME V.

Page.	*Ligne.*	*Faute.*	*Correction.*
25	20	$\frac{dA}{dx} = \frac{dB}{dy}$	$\frac{dB}{dx} = \frac{dA}{dy}$.
Cette faute ne se trouve pas dans tous les exemplaires.			
54	1	ceux	les termes.
106	23	Culer	Euler.
138	11	dy	dx.
192	2	ordonnées	variables.
203	dern.	$dz =$ &	$dz = 0$ &
214	9	ppQ	ddQ.
232	33-34-35	g''	g'.
Ibid.	36	g	g'.
293	3	grande	petite.
311	4	VP*n*	VC*n*.
328	1	BP	AP.
411	17	un *maximum*.	variable.
429	18	3 diamètres.	3, diamètre.
507	13	$\frac{n.}{N}$	$\frac{n.h}{N}$.
521	20	*la ut*	*la UT.*
Ibid.	21	*UT mi*	*ut mi.*
556	31	entr'elles : :	entr'elles comme.
543	31	CN	CD.

Dans le Tome III.

Page.	*Ligne.*	*Faute.*	*Correction.*
303	14	$(x + p)$	$(x + p)^2$.

Achevé d'imprimer pour la premiere fois le 25 de Juillet 1774.

De l'Imprimerie de J. G. CLOUSIER, rue Saint-Jacques, vis-à-vis celle des Mathurins.